Université Mohamed V–Agdal
Faculté des Sciences Juridiques,
Économiques et Sociales, Rabat
www.fsjesr.ac.ma
Filière de Sciences Économiques et de Gestion

Session : Printemps–Été 2006/2007

Semestre : $\boldsymbol{S}_2$

Professeure : Amale LAHLOU

Sections : A & B

Contrôle Final

Durée : 2 heures

Module 6 : Méthodes Quantitatives I
Matière : Mathématiques I

N.B. :
- Les téléphones portables et les calculatrices ne sont pas autorisés ;
- Toute réponse doit être justifiée, faute de quoi elle ne sera pas comptée ;
- La clarté de la rédaction est un élément important dans l'appréciation des copies (1 point).

Exercice 1 : [2 pts]

On considère la fonction réelle f définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x}+x} - \sqrt{\dfrac{1}{x}-x}}{x+|x|}$.

1. Déterminer D_f, le domaine de définition de f ;
2. la fonction f est-elle prolongeable par continuité à l'origine ? Si oui, donner son prolongement sur $D_f \cup \{0\}$.

Exercice 2 : [10 pts]

On considère la fonction réelle g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-x}$.

1. Montrer que l'équation $g(x) = 2 - x$ admet une solution unique sur $[-2\ln(2), -\ln(2)]$ (on a $\ln(2) \simeq 0.7$) ;
2. Soit un réel $x < 0$.
   (a) Appliquer le Théorème des Accroissements Finis à g sur $[x, 0]$;
   (b) Déterminer le(s) point(s) le vérifiant ;
   (c) Comparer les trois termes x, $1 - e^{-x}$ et xe^{-x} ;
3. La fonction réelle h définie par $h(x) = (1+x)e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   (a) Par un raisonnement par récurrence, montrer qu'il existe deux suites réelles de termes généraux $a_n = (-1)^n$ et $b_n = (-1)^n(1-n)$ telles que la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la fonction h s'écrit :
   $$h^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{-x} ;$$
   (b) Quelle est la valeur de $g^{(2007)}(0)$?
4. En utilisant la règle de l'Hospital, calculer la limite suivante :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)}{x}$$

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3 : [4 pts]

Déterminer le Développement Limité au voisinage de l'origine et à l'ordre 4 de la fonction réelle définie par :

$$f(x) = (e^{-x} + x)^{\frac{1}{3}}.$$

Indication : Au voisinage de l'origine,

$$\begin{aligned} e^u &= 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{3!}u^3 + \frac{1}{4!}u^4 + o(u^4) \\ (1+u)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + o(u^2) \end{aligned}$$

Exercice 4 : [4 pts]

Soit une fonction réelle f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Étant donné son Développement Limité à l'ordre 3 au voisinage du point d'abscisse 2 :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{6}(x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^3 + o\left((x-2)^3\right)$$

étudier localement la fonction f en ce point :

- ✓ f est-elle continue ou prolongeable par continuité au point 2 (on notera aussi par f son prolongement) ?
- ✓ Déterminer un équivalent de f au voisinage du point d'abscisse 2,
- ✓ Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2,
- ✓ Déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente au point d'abscisse 2,
- ✓ Déterminer les 3 premières dérivées de f au point 2,
- ✓ $\mathcal{C}_f$ présente t-elle un extremum local au point d'abscisse 2 ?
- ✓ $\mathcal{C}_f$ présente t-elle un point d'inflexion au point d'abscisse 2 ?
- ✓ Étudier la convexité de f au voisinage du point d'abscisse 2.

Bonne Chance