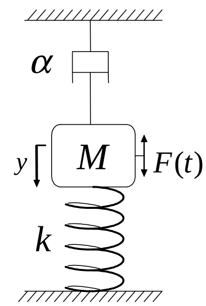
SÉRIE DE TD N° 5 DE PHYS. 3

Exercice 1. Translation Oscillatoire Éxcitée à un Degré de Liberté.

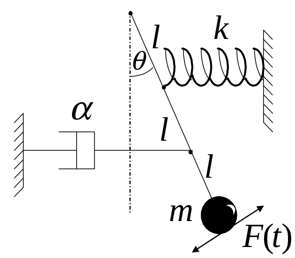
Une masse m, suspendue par un ressort de raideur k et un amortisseur de de coefficient de frottement α, oscille verticalement sous l'effet d'une excitation F de la forme $F(t)=F_0\cos\Omega t$.



1. Trouver l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle U, et la fonction de dissipation $\mathcal{D}$.
2. Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement.
3. Trouver, à l'aide de la représentation complexe, la solution permanente de l'équation du mouvement. (*Préciser son amplitude* A *et sa phase* ϕ)
4. Donner la condition de résonance et la pulsation de résonance Ω_R.
5. Donner la bande passante B pour un amortissement faible: $\lambda \ll \omega_0$.

Exercice 2. Rotation Oscillatoire Éxcitée à un Degré de Liberté.

Dans le système ci-contre, la boule est ponctuelle et la tige est de longueur totale $3l$ et de masse négligeable. Avec $F(t)=F_0\cos\Omega t$.



1. Trouver l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle U, et la fonction de dissipation $\mathcal{D}$. ($\theta \ll 1$.)
2. Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement.
3. Trouver, à l'aide de la représentation complexe, la solution permanente de l'équation du mouvement. (*Préciser son amplitude* A *et sa phase* ϕ)
4. Déduire la pulsation de résonance Ω_R.
5. Donner les pulsations de coupure Ω_{c1}, Ω_{c2} et la bande passante B pour un amortissement faible: $\lambda \ll \omega_0$.
6. Calculer Ω_R, B, et le facteur de qualité si $m=\mathbf{1}$kg, $k=\mathbf{15}$N/m, $l=\mathbf{0{,}5}$m, $\alpha=\mathbf{0{,}5}$N.s/m, $g=\mathbf{10}$m.s^{-2}.

Rappels: *L'équation de Lagrange d'un système forcé est:*

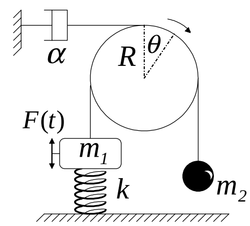
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=-\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{x}}+F. \quad (\textit{Pour une translation})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}=-\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{\theta}}+\mathcal{M}. \quad (\textit{Pour une rotation})$$

EXERCICES RÉSOLUS

Pour plus d'exercices résolus, aller sur **http://sites.google.com/site/exerev**

Exercice résolu* **Oscillation Éxcitée à un Degré de Liberté.**



Le fil autour du disque (de masse négligeable) est inextensible et non glissant.

1. *Trouver l'énergie cinétique T, potentielle U, et la fonction de dissipation $\mathcal{D}$.*

2. *Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement.* (F=$F_0\cos\Omega t$.)

3. *Trouver, à l'aide de la représentation complexe, la solution permanente de l'équation du mouvement. (Préciser son amplitude A et sa phase ϕ)*

4. *Déduire la pulsation de résonance Ω_R.*

5. *Donner les pulsations de coupure Ω_{c1}, Ω_{c2} et la bande passante B pour un amortissement faible: $\lambda \ll \omega_0$.*

6. *Calculer Ω_R, B, et le facteur de qualité si* m_1=**2**kg, m_2=**1**kg, k=**10**N/m, α=**0,1**N.s/m.

Solution:

1. $T = T_{m_1} + T_{m_2} = \frac{1}{2}m_1R^2\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2R^2\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)R^2\,\dot{\theta}^2.$ $\qquad \mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha R^2\,\dot{\theta}^2.$

$U = U_{m_1} + U_{m_2} + U_k = m_1gR\theta - m_2gR\theta + \frac{1}{2}k(z_0 - R\theta)^2.$

$= \frac{1}{2}kR^2\theta^2.$ (La condition d'équilibre élimine tous les termes linéaires.)

2. $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)R^2\,\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kR^2\theta^2.$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{\theta}} + FR \Longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m_1+m_2}\dot{\theta} + \frac{k}{m_1+m_2}\theta = \frac{F_0}{(m_1+m_2)R}\cos\Omega t.}$$

3. L'équation est de la forme $\ddot{\theta}+2\lambda\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=(\frac{F_0}{a})\cos\Omega t$. $\lambda=\frac{\alpha}{2(m_1+m_2)}$. $\omega_0^2=\frac{k}{m_1+m_2}$. $a=(m_1+m_2)R$

La solution permanente est $\theta=A\cos(\Omega t+\phi)$. Utilisons la représentation complexe pour trouver A et ϕ:

$$\boxed{\begin{array}{c}(F_0/a)\cos\Omega t \longrightarrow (F_0/a)\,e^{j\Omega t}\\ \theta=A\cos(\Omega t+\phi) \longrightarrow \underline{\theta}=\underline{A}e^{j\Omega t}.\end{array}}$$

On obtient $-\Omega^2\underline{A}e^{j\Omega t} + 2\lambda j\Omega\underline{A}e^{j\Omega t} + \omega_0^2\underline{A}e^{j\Omega t} = (F_0/a)\,e^{j\Omega t} \Longrightarrow \underline{A} = \frac{F_0/a}{\omega_0^2-\Omega^2+2\lambda j\Omega}.$

L'amplitude est $\boxed{A=\frac{F_0/a}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\lambda^2\Omega^2}}.}$ La phase est donnée par $\boxed{\tan\phi = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}.}$

4. La pulsation de résonance est Ω_R telle que $\left.\frac{\partial A}{\partial\Omega}\right|_{\Omega_R} = 0 \Longrightarrow \boxed{\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}.}$

5. Pour un amortissement faible $\lambda \ll \omega_0$: $\boxed{\Omega_{c1} \approx \omega_0-\lambda. \quad \Omega_{c2} \approx \omega_0+\lambda.}$ $\boxed{B=\Omega_{c2}-\Omega_{c1}=2\lambda.}$

6. A.N: $\Omega_R\approx$**1,82**rad/s. $B \approx$ **3.10^{-2}**Hz. Le facteur de qualité est $Q=\frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{\omega_0}{B} \approx$ **60,9**.

CORRIGÉ DE LA SÉRIE N°5 DE PHYS. 3

Exercice 1

1. $T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$.

$U = U_m + U_k = -mg(y_0 + y) + \frac{1}{2}k(y_0 + y)^2 \rightarrow$ Grâce à la condition d'équilibre $\rightarrow$ $U = \frac{1}{2}ky^2 + C^{te}$.

$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha v^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$.

2. $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{1}{2}ky^2$.

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{y}} + F \Longrightarrow m\ddot{y} + ky = -\alpha\dot{y} + F \Longrightarrow \boxed{\ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t.}$

3. L'équation est de la forme $\ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t$. $\quad \lambda = \frac{\alpha}{2m}$. $\quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

La solution permanente est $y = A\cos(\Omega t + \phi)$. Utilisons la représentation complexe pour trouver A et ϕ:

$$\boxed{\begin{array}{c}\frac{F_0}{m}\cos\Omega t \longrightarrow \frac{F_0}{m}e^{j\Omega t} \\ y = A\cos(\Omega t + \phi) \longrightarrow \underline{y} = \underline{A}e^{j\Omega t}.\end{array}}$$

On obtient $-\Omega^2\underline{A}e^{j\Omega t} + 2\lambda j\Omega\underline{A}e^{j\Omega t} + \omega_0^2\underline{A}e^{j\Omega t} = \frac{F_0}{m}e^{j\Omega t} \Longrightarrow \underline{A} = \dfrac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\lambda j\Omega}$.

L'amplitude est $\boxed{A = \dfrac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}.}$ La phase est donnée par $\boxed{\tan\phi = \dfrac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.}$

4. La condition de résonance est $\left.\frac{\partial A}{\partial\Omega}\right|_{\Omega_R} = 0$, ce qui donne la pulsation de résonance $\boxed{\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}.}$

5. Pour un amortissement faible $\lambda \ll \omega_0$: $\boxed{B = \Omega_{c2} - \Omega_{c1} \approx 2\lambda.}$

Exercice 2

1. $T = T_m = \frac{1}{2}m(3l\dot{\theta})^2 = \frac{9}{2}ml^2\dot{\theta}^2$.

$U = U_m + U_k \approx mg(3l - 3l\cos\theta) + \frac{1}{2}k(l\sin\theta)^2 \approx \frac{3}{2}mgl\theta^2 + \frac{1}{2}kl^2\theta^2$. $\quad \mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha(2l\dot{\theta})^2 = 2\alpha l^2\dot{\theta}^2$.

2. $\mathcal{L} = \frac{9}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(3mgl + kl^2)\theta^2$.

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{\theta}} + F.3l \Longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{4\alpha^2}{9m}\dot{\theta} + \frac{3mg + kl}{9ml}\theta = \frac{F_0}{3ml}\cos\Omega t.}$

3. L'équation est de la forme $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = (F_0/3ml)\cos\Omega t$. $\quad \lambda = \frac{2\alpha}{9m}$. $\quad \omega_0^2 = \frac{3mg + kl}{9ml}$.

La solution permanente est $\theta = A\cos(\Omega t + \phi)$. Utilisons la représentation complexe pour trouver A et ϕ:

$$\boxed{\begin{array}{c}(F_0/3ml)\cos\Omega t \longrightarrow (F_0/3ml)\,e^{j\Omega t} \\ \theta = A\cos(\Omega t + \phi) \longrightarrow \underline{\theta} = \underline{A}e^{j\Omega t}.\end{array}}$$

On obtient $-\Omega^2\underline{A}e^{j\Omega t} + 2\lambda j\Omega\underline{A}e^{j\Omega t} + \omega_0^2\underline{A}e^{j\Omega t} = (F_0/3ml)\,e^{j\Omega t} \Longrightarrow \underline{A} = \dfrac{F_0/3ml}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\lambda j\Omega}$.

L'amplitude est $\boxed{A = \dfrac{F_0/3ml}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}.}$ La phase est donnée par $\boxed{\tan\phi = \dfrac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.}$

4. La pulsation de résonance est Ω_R telle que $\left.\frac{\partial A}{\partial\Omega}\right|_{\Omega_R} = 0 \Longrightarrow \boxed{\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}.}$

5. Pour un amortissement faible $\lambda \ll \omega_0$: $\boxed{\Omega_{c1} \approx \omega_0 - \lambda. \quad \Omega_{c2} \approx \omega_0 + \lambda.}$ $\boxed{B = \Omega_{c2} - \Omega_{c1} = 2\lambda.}$

6. A.N: $\Omega_R \approx$ **2,88** rad/s. $\quad B \approx$ **0,22** Hz. Le facteur de qualité du système est $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{\omega_0}{B} \approx$ **13,1**.