www.fsjesr.ac.ma
Université Mohammed V-Agdal
Faculté des Sciences Juridiques,
Économiques et Sociales, Rabat
Filière de Sciences Économiques et de Gestion

Automne–Hiver 2008-2009
Section : B
Semestre : S_1

Module 3 : Introduction aux Sciences économiques
Matière : Instruments d'Analyse Économique

Professeure Amale LAHLOU
www.amalelahlou.net

Corrigé du Contrôle Final

Énoncé

Exercice 1 : Soient p et q deux propositions simples. En utilisant les règles logiques, simplifier la proposition composée :

$$(p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}).$$

Exercice 2 : Via un raisonnement par récurrence, montrer que $(4^n - 1)$ est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 : La relation binaire suivante est-elle une relation d'équivalence dans $\mathbb{N}$?

$$a, b \in \mathbb{N} \qquad a\,\mathcal{R}\,b \quad \Longleftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} \qquad a - b = 3n.$$

Exercice 4 : Soit l'intervalle I_m de $\mathbb{R}$ défini par : $I_m = \{x \in \mathbb{R} / \quad |x-1| \leq m^2\}$ où $m \in \mathbb{R}$.

1. Écrire en extension l'intervalle I_m ;
2. Expliciter les intervalles I_{-1}, I_0, I_1 et I_2 ;
3. En déduire l'ensemble $I_2 \cap \mathbb{N}$;
4. Déterminer les valeurs de m pour que $I_m \subseteq [-3, 2]$;
5. Existe-il m tel que $I_m \cap [-3, 2] = \emptyset$.

Exercice 5 : Soit le polynôme :

$$P(x) = x^5 - x^4 - 9x^3 + 13x^2 + 8x - 12.$$

1. Calculer $P(-1)$ et $P(1)$, puis conclure ;
2. Déterminer $Q(x)$ le quotient de la division Euclidienne de $P(x)$ par $(x^2 - 1)$;
3. Vérifier que 2 est racine de $Q(x)$, puis factoriser $Q(x)$ via la méthode des coefficients indéterminés ;
4. En déduire une factorisation en éléments simples de $P(x)$.

Réponse

Solution 1 : Simplifions l'expression suivante :

$$(p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$$

$$\begin{aligned}
& (p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \\
\equiv\ & [(p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q)] \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \ \ (\text{car } \vee \text{ associative}) \\
\equiv\ & [p \wedge (\bar{q} \vee q)] \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \ \ (\wedge \text{ distributive par rapport à } \vee) \\
\equiv\ & (p \wedge \theta) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \ \ (\text{car } \bar{q} \vee q = \theta \text{ tautologie}) \\
\equiv\ & p \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \ \ (\text{car } p \wedge \theta = p,\ \theta \text{ neutre pour } \wedge) \\
\equiv\ & (p \vee \bar{p}) \wedge (p \vee \bar{q}) \ \ (\vee \text{ distributive par rapport à } \wedge) \\
\equiv\ & \theta \wedge (p \vee \bar{q}) \ \ (\text{car } p \vee \bar{p} = \theta) \\
\equiv\ & p \vee \bar{q} \ \ (\text{car } \theta \text{ neutre pour } \wedge)
\end{aligned}$$

D'où, la proposition

$$(p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \equiv p \vee \bar{q}.$$

■

Solution 2 : Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4^n - 1 \text{ est divisible par 3.}$$

c'est-à-dire,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad 4^n - 1 = 3k.$$

Vérification : Pour $n = 0$ on a $4^0 - 1 = 0 = 3(0)$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

Hypothèse de récurrence : Supossons que la propriété est vraie à l'ordre n, c'est-à-dire,

$$\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \quad 4^n - 1 = 3k.$$

Démonstration : Montrons que la propriété est vraie à l'ordre $(n+1)$, c'est-à-dire,

$$\exists k' \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \quad 4^{n+1} - 1 = 3k'.$$

$$\begin{aligned}
4^{n+1} - 1 &= 4.4^n - 1 \\
&= 4(3k+1) - 1 \\
&= 3(4k) + 3 \\
&= 3(4k+1) \\
&= 3k'
\end{aligned}$$

avec $k' = 4k + 1 \in \mathbb{Z}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3. ■

Solution 3 : Soit la relation binaire :

$$a, b \in \mathbb{N} \qquad a\,\mathcal{R}\,b \quad \Longleftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} \qquad a - b = 3n.$$

$\mathcal{R}$ n'est pas une relation symétrique dans $\mathbb{N}$ est par suite, elle n'est pas une relation d'équivalence dans $\mathbb{N}$. En effet, si pour $a, b \in \mathbb{N}$, $a\,\mathcal{R}\,b$ alors $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $a - b = 3n$, et par suite $b - a = 3(-n)$.Ce qui implique qu'on a pas $b\,\mathcal{R}\,a$ puisque $(-n) \notin \mathbb{N}$. ■

<u>Solution 4</u> Soit l'intervalle I_m de $\mathbb{R}$ défini par :

$$I_m = \{x \in \mathbb{R} / \quad |x-1| \leq m^2\} \qquad \text{où } m \in \mathbb{R}.$$

1. Écrivons en extension l'intervalle I_m :

$$\begin{array}{rcl} I_m & = & \{x \in \mathbb{R} / \quad |x-1| \leq m^2\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} / \quad -m^2 \leq x-1 \leq m^2\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} / \quad 1-m^2 \leq x \leq 1+m^2\} \\ & = & [1-m^2, 1+m^2]. \end{array}$$

2. Explicitons les intervalles I_{-1}, I_0, I_1 et I_2 :

$$\begin{array}{rclcl} I_{-1} & = & [1-1, 1+1] & = & [0,2] \\ I_0 & = & [1-0, 1+0] & = & \{1\} \\ I_1 & = & [1-1, 1+1] & = & [0,2] \\ I_2 & = & [1-4, 1+4] & = & [-3,5] \end{array}$$

3. $I_2 \cap \mathbb{N} = [-3,5] \cap \mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5\}$.

4. Déterminer les valeurs de m pour que :

$$I_m \subseteq [-3,2]$$

$$\begin{array}{rcl} I_m \subseteq [-3,2] & \Leftrightarrow & -3 \leq 1-m^2 \text{ et } 1+m^2 \leq 2 \\ & \Leftrightarrow & m^2 \leq 4 \text{ et } m^2 \leq 1 \\ & \Leftrightarrow & m^2 \leq 1 \\ & \Leftrightarrow & |m| \leq 1 \\ & \Leftrightarrow & -1 \leq m \leq 1 \\ & \Leftrightarrow & m \in [-1,1]. \end{array}$$

5. Il n'existe aucune valeur de m telle que

$$I_m \cap [-3,2] = \emptyset.$$

En effet,

$$\begin{array}{rcl} I_m \cap [-3,2] = \emptyset & \Leftrightarrow & 1+m^2 < -3 \text{ ou bien } 2 < 1-m^2 \\ & \Leftrightarrow & m^2 < -4 \text{ ou bien } m^2 < -1 \end{array}$$

et dans les deux cas c'est impossible. ■

<u>Solution 5 :</u> Soit le polynôme

$$P(x) = x^5 - x^4 - 9x^3 + 13x^2 + 8x - 12.$$

1. On a :

$$\begin{array}{rclcl} P(-1) & = & -1-1+9+13-8-12 & = & 0 \\ P(1) & = & 1-1-9+13+8-12 & = & 0 \end{array}$$

$P(x)$ est divisible par $(x+1)$ et par $(x-1)$. Donc, $P(x)$ est divisible par $(x^2-1) = (x+1)(x-1)$.

2. Déterminons $Q(x)$, le quotient de la division Euclidienne de $P(x)$ par (x^2-1) :

$$\begin{array}{l|l} x^5 - x^4 - 9x^3 + 13x^2 + 8x - 12 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -x^5 + x^3 & x^3 - x^2 - 8x + 12 \\ \hline -x^4 - 8x^3 + 13x^2 + 8x - 12 & \\ x^4 - x^2 & \\ \hline -8x^3 + 12x^2 + 8x - 12 & \\ 8x^3 - 8x & \\ \hline 12x^2 - 12 & \\ -12x^2 + 12 & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

Donc,

$$Q(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$$

Ainsi,

$$P(x) = (x^2-1)(x^3 - x^2 - 8x + 12).$$

3.

$$Q(2) = 2^3 - 2^2 - 8(2) + 12 = 0$$

Donc, 2 est bien une racine de $Q(x)$.

Factorisons $Q(x)$ via la méthode des coefficients indéterminés : on remarque que $\deg(Q(x) = 3$ et $Q(x)$ est divisible par $(x-2)$. Autrement dit,

$$\exists Q_1(x) \in \mathbb{R}[X], \quad Q_1(x) = ax^2 + bx + c \, (a,b,c \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0)$$

tel que,

$$Q(x) = (x-2)Q_1(x).$$

Ainsi,

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)(ax^2 + bx + c).$$

De façon directe, on peut montrer que

$$a = 1 \quad \text{et} \quad c = -6.$$

Reste à déterminer b.

$$\begin{array}{rcl} x^3 - x^2 - 8x + 12 & = & (x-2)(ax^2 + bx + c) \\ & = & (x-2)(x^2 + bx - 6) \\ & = & x^3 + (b-2)x^2 - (6+2b)x + 12 \end{array}$$

Par identification des coefficients des deux polynômes, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} b - 2 = -1 \\ 6 + 2b = 8 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad b = 1.$$

Ainsi, $Q_1(x) = x^2 + x - 6$ et par suite,

$$Q(x) = (x-2)(x^2 + x - 6).$$

En calculant le discriminant de $Q_1(x) = 0$ $(\Delta = 5^2)$, on trouve que $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$ sont deux racines de $Q_1(x)$. D'où,

$$Q_1(x) = (x-2)(x+3)$$

et par suite,

$$Q(x) = (x-2)(x+3)(x-2) = (x-2)^2(x+3).$$

4. On déduit que :

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & (x^2-1)Q(x) \\ & = & (x-1)(x+1)(x-2)^2(x+3). ■ \end{array}$$