Université Mohamed V–Agdal
Faculté des Sciences Juridiques, Économiques et Sociales, Rabat
www.fsjesr.ac.ma
Filière de Sciences Économiques et de Gestion

Session : Automne–Hiver 2008/2009
Semestre : $\boldsymbol{S}_1$

Professeure : Amale LAHLOU
www.amalelahlou.net

Section : B

Série 2

Module 3 : Introduction aux Sciences Économiques
Matière : Instruments d'Analyse Économique

Thèmes : Ensemble, intersection et réunion d'ensembles, ensembles complèmentaires, ensemble des parties d'un ensemble, partition d'un ensemble.

Exercice 1 : Montrer les propriétés suivantes :

1.
$$\begin{aligned} A \cap B &\subseteq A \subseteq A \cup B, \\ A \cap B &\subseteq B \subseteq A \cup B. \end{aligned}$$

2. Si $A \subseteq B$ alors, $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$.

3. L'intersection et la réunion sont commutatives : pour toutes parties A et B de E,
$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A, \\ A \cup B &= B \cup A. \end{aligned}$$

4. L'intersection et la réunion sont associatives : pour toutes parties A, B et C de E,
$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C, \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C. \end{aligned}$$

5. L'ensemble E est neutre pour l'intersection : pour toute partie A de E,
$$A \cap E = E \cap A = A;$$

6. L'ensemble vide est neutre pour la réunion : pour toute partie A de E,
$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A.$$

7. L'ensemble vide est absorbant pour l'intersection : pour toute partie A de E,
$$A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset;$$

8. L'ensemble E est absorbant pour la réunion : pour toute partie A de E,
$$A \cup E = E \cup A = E.$$

9. L'intersection est distributive par rapport à la réunion : pour toutes parties A, B et C de E,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad \text{et} \qquad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

10. La réunion est distributive par rapport à l'intersection :pour toutes parties A, B et C de E,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad \text{et} \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Exercice 2 : Soient A et B trois parties d'un ensemble E. On note $\bar{X} = \mathcal{C}_E\, X$, le complémentaire de X dans E. Montrer que l'on a :

1. $A \cup B = A \iff B \subseteq A$;
2. $A \cap B = A \iff A \subseteq B$;
3. $A \subseteq B \implies \bar{B} \subseteq \bar{A}$.

Exercice 3 : Écrire $\mathcal{P}(E)$ si $E = \{a, b, c, d\}$. Puis donner une partition de $\mathcal{P}(E)$ formée de quatre sous ensembles.

Exercice 4 : Soient A et B deux parties non disjointes d'un ensemble E tels que $A \cup B \subset E$, $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$. Montrer que les ensembles suivants forment une partition de E :

$$E_1 : A \cap B, \qquad E_2 : \mathcal{C}_A(A \cap B), \qquad E_3 : \mathcal{C}_B(A \cap B) \qquad \text{et} \qquad E_4 : \mathcal{C}_E(A \cup B).$$

Exercice 5 : Soit l'ensemble $A_m = \{x \in \mathbb{R} /\ \ |x - 2| < m\}$ où $m \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer m pour que $A_m \subset]1, 5[$;
2. Existe-t-il $m \in \mathbb{R}$ tel que $A_m \cap]1, 5[= \emptyset$?

Exercice 6 : Soient les ensembles suivants :

$$A = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\frac{\pi}{5} /\ \ k \in \mathbb{Z} \right\} \qquad \text{et} \qquad B = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\frac{\pi}{5} /\ \ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Montrer que $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 7 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. On pose $I = [a, b]$ et $J = [1 - b, 1 - a]$

1. Montrer que $I \cap J = \emptyset \iff \left(a > \frac{1}{2} \text{ ou } b < \frac{1}{2}\right)$.
2. Quand a-t-on $I \cap J \neq \emptyset$?
3. Démontrer les implications suivantes :

$$\begin{aligned} a + b = 1 &\implies I \cap J = I = J; \\ a + b < 1 &\implies I \cap J = [1 - b, b]; \\ a + b > 1 &\implies I \cap J = [a, 1 - a]. \end{aligned}$$

4. Déterminer $I \cap J$ dans les deux cas :

$$i) \quad b = \frac{1}{2}; \qquad ii) \quad a = \frac{1}{2}.$$