Université Mohammed V-Agdal
Faculté des Sciences Juridiques, Économiques et Sociales
www.fsjesr.ac.ma

Filière	de Sciences Économiques et de Gestion
Module 6	Méthodes Quantitatives I
Matière	Mathématiques I
Session	Printemps – Été 2007
Semestre	S2
Sections	A & B

Professeure : Amale LAHLOU

Le contenu du présent polycopié correspond au contenu des diapositives présentées en cours. Ils ne contient que les définitions et résultats principaux du cours.

Ce polycopié contient les outils de base de l'analyse fonctionnelle : limites, continuité, dérivabilité et développements limités. Des notions simples, précises et rigoureuses permettant aux étudiants d'acquérir une bonne formation mathématique nécessaire pour explorer avec profit le vaste domaine des techniques économiques.

En annexes :

- **2003/2004 : Sections A, B, C & D**
  - ☑ Série 1
  - ☑ Série 2
  - ☑ Série 3
  - ☑ Contrôle Final
  - ☑ Contrôle Final
  - ☑ Contrôle Final
  - ☑ Contrôle de Rattrapage
  - ☑ Contrôle de Rattrapage
- **2004/2005 : Section B**
  - ☑ Fiche d'exercices variés
  - ☑ Contrôle Final
  - ☑ Contrôle de Rattrapage
- **2005/2006 : Sections A & B**
  - ☑ Contrôle Final
  - ☑ Contrôle de Rattrapage

Étude d'une fonction numérique à une seule variable réelle

Chapitre I — Limites et continuité

Chapitre II — Dérivabilité et applications

Chapitre III — L'outil développement limité

Ces notes de cours sont issues de l'enseignement du

Module 6 / Méthodes Quantitatives I / Mathématiques I

MQ I :Mathématiques I

Chapitre I :
Limites et continuité des fonctions numériques d'une seule variable réelle

Généralité sur les fonctions numériques

- Limite d'une fonction numérique
  - ✓ Limite finie d'une fonction quand la variable tend vers un nombre fini
  - ✓ Limite infinie d'une fonction quand la variable tend vers un nombre fini
  - ✓ Limite à droite et limite à gauche
  - ✓ Limite finie d'une fonction quand la variable tend vers l'infini
  - ✓ Limite infinie d'une fonction quand la variable tend vers l'infini
  - ✓ Propriétés des limites
  - ✓ Formes indéterminées
  - ✓ Opérations sur les limites
  - ✓ Étude des asymptotes et des branches infinies
  - ✓ Fonctions négligeables, fonctions équivalentes, quelques équivalents usuels
- Continuité d'une fonction numérique
  - ✓ Fonction continue en un point
  - ✓ Fonction continue sur un intervalle
  - ✓ Fonction discontinue, cas de discontinuité
  - ✓ Prolongement par continuité
  - ✓ Règles opératoires sur les fonctions continues
  - ✓ Fonctions monotones
  - ✓ Propriétés des fonctions continues sur un intervalle
  - ✓ Propriétés des fonctions continues strictement monotones sur un intervalle
  - ✓ Fonctions réciproques
- Fonctions logarithmiques et exponentielles

MQ I :Mathématiques I

Chapitre II :
Dérivabilité des fonctions numériques et applications

Introduction

- Fonction différentiable en un point
- Fonction dérivable en un point
- Interprétation géométrique de la dérivée
- Dérivée à droite et dérivée à gauche
- Dérivabilité et continuité
- Dérivabilité sur un intervalle
- Opérations sur les fonctions dérivées
- Dérivée de la fonction réciproque
- Dérivées successives
- Formule de Leibniz
- Les fonctions circulaires
- Sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle
- Points extremums, points d'inflexions, convexité, concavité
- Théorème de Rolle, généralisation du théorème de Rolle
- Théorème des accroissements finis
- Inégalité des accroissements finis
- Formule généralisée des accroissements finis
- Règle de l'Hospital

MQ I :Mathématiques I

Chapitre III :
L'outil développement limité

Introduction

- Formule de Taylor
  - ✓ Formule de Taylor-Lagrange
  - ✓ Formule de Taylor-Young
  - ✓ Formule de Mac-Laurin
- Développement limité au voisinage de l'origine
- Propriétés de développement limité au voisinage de l'origine
- Développement limité à gauche et à droite de l'origine
- Développement limité au voisinage d'un point quelconque
- Développement limité au voisinage de l'infini
- Calcul des développements limités
- Opérations sur les développements limités
- Développements limités généralisés au voisinage de l'origine
- Développements limités usuels au voisinage de l'origine
- Applications des développements limités
  - ✓ Prolongement par continuité d'une fonction
  - ✓ Dérivabilité d'une fonction
  - ✓ Calcul des dérivées successives d'une fonction en un point
  - ✓ Extremum d'une fonction
  - ✓ Position d'une courbe par rapport à une tangente
  - ✓ Recherche des équivalents
  - ✓ Calcul de limites
  - ✓ Étude des branches infinies

MQ I :Mathématiques I

Chapitre I

On va dans ce premier chapitre revoir et approfondir les techniques d'étude des fonctions numériques d'une variable réelle vues d'ores et déjà en terminale :

limites et continuité d'une fonction numérique d'une seule variable réelle

MQ I :Mathématiques I

Définition d'une fonction : $f: E \to F$ est une fonction de E vers F si :

$$\forall x \in E \quad \exists\, au\ plus \quad y \in F \quad tel\ que \quad f(x) = y$$

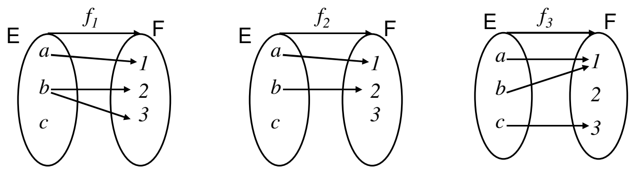
Si y existe et est unique, f est dite une application de E vers F.

E : ensemble de départ de f F : ensemble d'arrivée de f

y : image de x par f x : la variable ou encore l'antécédent de y par f

Si $E \subseteq \mathbf{R}$ *et* $F \subseteq \mathbf{R}$, f est dite fonction réelle d'une variable réelle ou tout simplement une fonction numérique d'une variable réelle. On note

$$\begin{aligned} f: \ & E \to F \\ & x \mapsto y = f(x) \end{aligned}$$



f_1 n'est pas une fonction
f_1 n'est pas une application

f_2 est une fonction
f_2 n'est pas une application

f_3 est une fonction
f_3 est une application

MQ I :Mathématiques I

Soit $f: E \to F$ une fonction de E vers F. On appelle :

Domaine de définition de f, l'ensemble : $D_f = \{x \in E \ / \ f(x)\ existe\} \subseteq E$

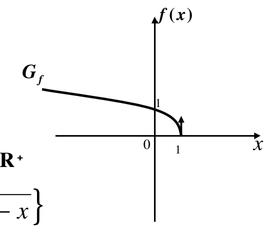
Image de f, l'ensemble :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= f(E) = \{f(x) \ / \ x \in E\} \\ &= \{y \in F \ / \ \exists x \in E \quad f(x) = y\} \subseteq F \end{aligned}$$

Graphe de f, l'ensemble : $G_f = \{(x, f(x)) \ / \ x \in D_f\} \subseteq E \times F$

Soit la fonction numérique :

$$\begin{aligned} f: \ & \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ & x \mapsto y = f(x) = \sqrt{1-x} \end{aligned}$$



$$D_f = \{x \in \mathbf{R} \ / \ 1 - x \geq 0\} =]-\infty, 1]$$

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbf{R} \ / \ \exists x \in]-\infty,1] \quad y = \sqrt{1-x}\} = \mathbf{R}^+$$

$$\begin{aligned} G_f &= \{(x, y) \in]-\infty, 1] \times \mathrm{R}^+ \ / \ y = \sqrt{1-x}\} \\ &= \{(x, \sqrt{1-x}) \ / \ x \in]-\infty, 1]\} \subseteq]-\infty, 1] \times \mathrm{R}^+ \end{aligned}$$

MQ I :Mathématiques I

- On désigne par $\mathbf{R}^E$ l'ensemble des fonctions numériques définies sur $E \subseteq \mathbf{R}$
- On munit $\mathbf{R}^E$ par trois lois de composition interne :

$$\forall f, g \in \mathbf{R}^E, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} \qquad \begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (f \times g)(x) &= f(x) \times g(x) \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

- $\forall x \in E, \quad g(x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
- Soient $f \in \mathbf{R}^E, \quad g \in \mathbf{R}^F \quad avec \quad F \subseteq f(E)$

  On appelle fonction composée de g *et* f la fonction notée $g \circ f \in \mathbf{R}^E$ définie par :

  $$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

  N.B. : En général $f \circ g \neq g \circ f$
- On définit sur $\mathbf{R}^E$ la relation d'ordre partiel $\leq$ (compatible avec les lois + et x) par :

  $$\forall f, g \in \mathbf{R}^E \quad (f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in E)$$

- *Soit* $f \in \mathbf{R}^E$, f est bornée sur E ssi $\exists A \in \mathbf{R}^*_+, \quad \forall x \in E \quad |f(x)| \leq A$

ssi : f est majorée sur E (i.e., $\exists M \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in E \quad f(x) \leq M$) et f est minorée sur E (i.e., $\exists m \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in E \quad m \leq f(x)$)

Exemples : $|\cos(x)| \leq 1$ $\qquad |\sin(x)| \leq 1$

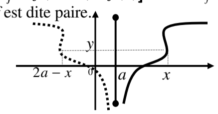
MQ I :Mathématiques I

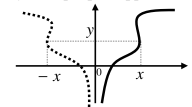
Parité et périodicité des fonctions :

Si $\forall x \in D_f, \quad [(2a-x) \in D_f \ et \ f(2a-x) = f(x)]$ alors, G_f est symétrique par rapport à l'axe $x=a$. Cas particulier, si $a=0$, f est dite paire.

Exemple :

$\cos(-x) = \cos(x)$

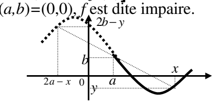


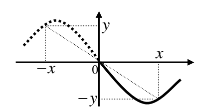


Si $\forall x \in D_f, \quad [(2a-x) \in D_f \quad et \quad f(2a-x) = 2b - f(x)]$ alors, G_f est symétrique par rapport au point de coordonnées (a,b). Cas particulier, si $(a,b)=(0,0)$, f est dite impaire.

Exemple :

$$\sin(-x) = -\sin(x),$$
$$\tan(-x) = -\tan(x)$$





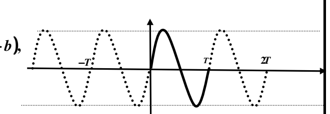
Si $\exists T \in \mathbf{R} \quad \forall x \in D_f \quad (x + T \in D_f \quad et \quad f(x+T) = f(x))$ alors, f est dite périodique.

Si T est une période de f alors kT est aussi une période de f, $\forall k \in \mathrm{Z}$. La période de f est la plus petite période strictement positive de f.

Exemple :

$$\sin\left(ax + b + \frac{2k}{a}\pi\right) = \sin(ax+b), \qquad \cos\left(ax + b + \frac{2k}{a}\pi\right) = \cos(ax+b),$$

$$\tan\left(ax + b + \frac{k}{a}\pi\right) = \tan(ax+b) \qquad k \in \mathbf{Z}$$



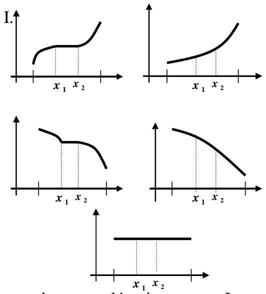
Exercice : Montrer que $f(x) = x - E(x)$ est périodique de période 1.

Fonctions monotones :

Définitions :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I.

- f est croissante sur I si,
  $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$
- f est strictement croissante sur I si,
  $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- f est décroissante sur I si,
  $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$
- f est strictement décroissante sur I si,
  $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- f est constante sur I si,
  $\exists k \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in I \quad f(x) = k$
- f est monotone sur I si f est croissante ou décroissante sur I
- f est strictement monotone sur I si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur I



NB. : Si on note $T_f = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ alors f est croissante (resp. décroissante) ssi

$\forall x_1, x_2 \in I \quad T_f \ge 0$ (resp. $\forall x_1, x_2 \in I \quad T_f \le 0$)

Variation d'une fonction numérique :

Étudier le sens de variation d'une fonction numérique définie sur un intervalle I, c'est chercher les sous intervalles de I sur lesquels la fonction est croissante, décroissante ou constante.

Limite d'une fonction :

Nous considérons dans toute la suite que des fonctions numériques d'une variable réelle.

Quand on parle de limite d'une fonction f en un point $x_0 \in \mathbf{R}$, on suppose toujours que D_f contient un intervalle ouvert de la forme $]a, x_0[\; avec \; a < x_0$ ou de la forme $]x_0, b[\; avec \; x_0 < b$ ou les deux à la fois.

De même, quand on parle de limite de f en $+\infty$ (resp. $-\infty$) on suppose que D_f contient un intervalle de la forme $]b, +\infty[$ (resp. $]-\infty, a[$)

On utilise souvent la notion de voisinage centré en x_0, noté $V(x_0) =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\quad (\varepsilon > 0)$

On introduit souvent la phrase : « *f définie au voisinage de x_0 sauf peut être au point x_0* »
et qui laisse entendre que $f(x_0)$ peut ne pas exister $(i.e., x_0 \notin D_f)$

La notion de limite est une notion locale. Pour définir la limite de f en x_0 il faut et il suffit que f soit définie au voisinage de x_0 sauf peut être en x_0.

Remarque :

Soit $f(x) = \sqrt{x^2(x-1)}, \; D_f = [1, +\infty[\cup \{0\}$

f est définie en 0 $(i.e., 0 \in D_f)$ mais f est non définie au voisinage de 0 (D_f ne contient aucun intervalle contenant 0)

f une fonction numérique définie au voisinage de x_0 (fini ou infinie) sauf peut être en x_0

Limite finie d'une fonction f quand la variable tend vers un nombre fini :

Définition :

f admet comme limite $l \in \mathbf{R}$ quand x tend vers $x_0 \in \mathbf{R}$ si :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad (\forall x \in D_f \; et \; 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

On écrit : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \quad ou \quad \lim\limits_{x_0} f = l$

En correspondance d'un nombre positif assez petit $\varepsilon > 0$, il est possible de déterminer un nombre réel positif $\eta > 0$, tels que pour toutes les valeurs $x \in D_f$ différentes de x_0 et vérifiant $|x - x_0| < \eta$ on obtienne : $|f(x) - l| < \varepsilon$

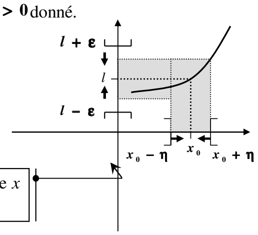
Pour montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ il faut déterminer $\eta > 0$ pour un $\varepsilon > 0$ donné.

$0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow x \ne x_0 \; et \; x_0 - \eta < x < x_0 + \eta$

$\Rightarrow x \ne x_0 \; et \; x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$

$|f(x) - l| < \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

$\Rightarrow f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$



$f(x)$ est aussi proche que l'on veut de la limite l à condition que x soit suffisamment proche de x_0

Exemples : Soient $f(x) = 3x + 1 \quad et \quad g(x) = 2x^2 - x + 1$

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$. ***Soit*** $\varepsilon > 0, \quad \exists ? \eta > 0$

$|f(x) - 4| < \varepsilon \Rightarrow |3x + 1 - 4| < \varepsilon \Rightarrow |3x - 3| < \varepsilon \Rightarrow |x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

Donc, $\exists \; 0 < \eta \le \dfrac{\varepsilon}{3}$ pour lequel $|x - 1| < \eta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$

2) Montrer que $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$. ***Soit*** $\varepsilon > 0, \quad \exists ? \eta > 0$

$|g(x) - 2| < \varepsilon \Rightarrow |2x^2 - x + 1 - 2| < \varepsilon \Rightarrow |2x^2 - x - 1| < \varepsilon \Rightarrow |x - 1||2x + 1| < \varepsilon$

On prend $|x - 1| < 1$ ce qui implique $|2x + 1| < 5$

$|2x + 1| < 5 \Rightarrow |2x + 1||x - 1| < 5|x - 1| < \varepsilon \quad ainsi \quad |x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{5}$

Il suffit de prendre : $|x - 1| < 1 \quad et \quad |x - 1| < \varepsilon/5$

Donc $\exists \; 0 < \eta \le \inf \left\{ \dfrac{\varepsilon}{5}, 1 \right\}$ pour lequel $|x - 1| < \eta \Rightarrow |g(x) - 2| < \varepsilon$

Remarque :

✓ On suppose la limite connue dans la définition

Théorème : **(unicité de la limite)**

La limite lorsqu'elle existe est unique.

Preuve : sera traitée en cours magistral.

MQ I : Mathématiques I

Limite infinie d'une fonction f quand la variable tend vers un nombre fini :

Définition :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall A>0\ \exists\eta>0\ \left(\forall x\in D_f\ et\ 0<|x-x_0|<\eta \Rightarrow |f(x)|>A\right)$$

$f(x)$ est aussi grande que l'on veut si x est suffisamment proche de x_0 des deux cotés et distinct de x_0.

$$|f(x)|>A \Rightarrow f(x)>A \quad ou \quad f(x)<-A$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall A>0\ \exists\eta>0\ \left(\forall x\in D_f\ et\ 0<|x-x_0|<\eta \Rightarrow f(x)<-A\right)$$

$-f(x)$ est aussi grande que l'on veut si x est suffisamment proche de x_0 des deux cotés et distinct de x_0

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall A>0\ \exists\eta>0\ \left(\forall x\in D_f\ et\ 0<|x-x_0|<\eta \Rightarrow f(x)>A\right)$$

$f(x)$ est aussi grande que l'on veut si x est suffisamment proche de x_0 des deux cotés et distinct de x_0

Exemple : Soit $f(x)=\frac{2}{x}$, $x\in\mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to 0} f(x)=\infty$

Soit $A>0,\ \exists?\eta>0\ \left(x\in\mathbb{R}^*,\ 0<|x-0|<\eta \Rightarrow \left|\frac{2}{x}\right|>A\right)$

Comme $\left|\frac{2}{x}\right|>A \Rightarrow |x|<\frac{2}{A} \Rightarrow |x-0|<\frac{2}{A}$ il suffit de prendre $\eta \le \frac{2}{A}$

MQ I : Mathématiques I

Limite à gauche

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=l_1 \Leftrightarrow$$

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\eta>0\left(\forall x\in D_f\ et\ x_0-\eta<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-l_1|<\varepsilon\right)$$

$f(x)$ est aussi proche que l'on veut de la limite l_1 si x *est* suffisamment proche de x_0 *et* strictement inférieur *à* x_0

Limite à droite

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=l_2 \Leftrightarrow$$

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\eta>0\left(\forall x\in D_f\ et\ x_0<x<x_0+\eta \Rightarrow |f(x)-l_2|<\varepsilon\right)$$

$f(x)$ est aussi proche que l'on veut de la limite l_2 si x *est* suffisamment proche de x_0 *et* strictement supérieur *à* x_0

Si pour f, la limite à gauche et la limite à droite de x_0 existent et sont égales, alors f admet une limite au point x_0 et on écrit : $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$

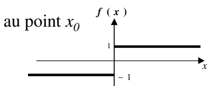
$f(x)$ est aussi proche que l'on veut de la limite $l=l_1=l_2$ si x *est* suffisamment proche de x_0 des deux cotés et distinct de x_0

Remarque : Si l_1 et l_2 existent et $l_1 \neq l_2$ alors f n'admet pas de limite au point x_0

Exemples : $f(x)=\frac{|x|}{x}$, $x\in\mathbb{R}^*$, $x_0=0$ $\quad D_f=\mathbb{R}^*$

On remarque que $x_0 \notin D_f$ donc f est non définie au point x_0.

$$f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases} 1 & si\quad x>0\\ -1 & si\quad x<0\end{cases}$$



$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} (-1)=-1$$

D' où $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas. On dit que f présente un saut au point $x_0=0$

MQ I : Mathématiques I

Limite finie d'une fonction f quand la variable tend vers l'infini :

Définition :

f a pour limite $l\in\mathbb{R}$ quand x tend vers ∞ (ou encore $|x|$ tend vers $+\infty$) :

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)=l\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists B>0\ \left(\forall x\in D_f\ et\ |x|>B \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon\right)$$

$f(x)$ est aussi proche que l'on veut de la limite l si $|x|$ est suffisamment grande.

$$\left(|x|\to+\infty \Leftrightarrow x\to-\infty\ ou\ x\to+\infty\right) \quad et \quad \left(|x|>B \Rightarrow x>B\ ou\ x<-B\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=l\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists B>0\ \left(\forall x\in D_f\ et\ x<-B \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon\right)$$

$f(x)$ est aussi proche que l'on veut de la limite l si x est suffisamment petit

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=l\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists B>0\ \left(\forall x\in D_f\ et\ x>B \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon\right)$$

$f(x)$ est aussi proche que l'on veut de la limite l si x est suffisamment grand

MQ I : Mathématiques I

Limite infinie d'une fonction f quand la variable tend vers l'infini :

Définition :

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall A>0\ \exists B>0\ \left(\forall x\in D_f\ et\ |x|>B \Rightarrow |f(x)|>A\right)$$

$|f(x)|$ est aussi grande que l'on veut si $|x|$ est suffisamment grande

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall A>0\ \exists B>0\ \left(\forall x\in D_f\ et\ x>B \Rightarrow f(x)>A\right)$$

$f(x)$ est aussi grande que l'on veut si x est suffisamment grand

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall A>0\ \exists B>0\ \left(\forall x\in D_f\ et\ x<-B \Rightarrow f(x)>A\right)$$

$f(x)$ est aussi grande que l'on veut si x est suffisamment petit

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall A>0\ \exists B>0\ \left(\forall x\in D_f\ et\ x>B \Rightarrow f(x)<-A\right)$$

$-f(x)$ est aussi grande que l'on veut si x est suffisamment grand

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall A>0\ \exists B>0\ \left(\forall x\in D_f\ et\ x<-B \Rightarrow f(x)<-A\right)$$

$-f(x)$ est aussi grande que l'on veut si x est suffisamment petit

Exemples :

1. Soit $f(x) = \dfrac{-2}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$, *quand* $|x| \to +\infty$, $l = 0$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0 \quad \textit{et mieux encore} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^- \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists ?B > 0$ $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*,\ |x| > B \ \Rightarrow \left| \dfrac{-2}{x} - 0 \right| < \varepsilon \right)$

Comme $\left|\dfrac{2}{x}\right| < \varepsilon \Rightarrow |x| > \dfrac{2}{\varepsilon}$ il suffit de prendre $B \geq \dfrac{2}{\varepsilon}$

$$\begin{cases} x \to +\infty, & |x| = x \quad \textit{et} \quad x > 2/\varepsilon \\ x \to -\infty, & |x| = -x \quad \textit{et} \quad x < -2/\varepsilon \end{cases}$$

2. Soit $f(x) = \dfrac{-2x}{3}$ $\quad \lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \infty$ *et mieux encore* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$

Soit $A > 0$, $\exists ?B > 0$ $\left(x \in \mathbb{R},\ |x| > B \ \Rightarrow \left| \dfrac{2x}{3} \right| > A \right)$

Comme $\left|\dfrac{2x}{3}\right| > A \Rightarrow |x| > \dfrac{3A}{2}$ il suffit de prendre $B \geq \dfrac{3A}{2}$

$$\begin{cases} x \to +\infty, & |x| = x \quad \textit{et} \quad x > 3A/2 \\ x \to -\infty, & |x| = -x \quad \textit{et} \quad x < -3A/2 \end{cases}$$

Remarque : Les fonctions $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \tan(x)$ n'admettent pas de limites au voisinage de l'infini.

Propriétés sur limites :

- $\forall x \in V(x_0)$ $f(x) < g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \\ f \quad \textit{positive} \end{cases} \Rightarrow l \geq 0$
- $\forall x \in V(x_0)$ $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \begin{pmatrix} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \end{pmatrix}$
- (Théorème des gendarmes)*Supposons que* $\forall x \in V(x_0)$ $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ *alors,*
  $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$
- Si f est bornée et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$
- $\begin{cases} |f(x) - l| \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R}$ alors, $\lim\limits_{x\to x_0} \lambda f(x) = \lambda l$ *(avec* $\lambda \in \mathbb{R}^*$*)*
  $\lim\limits_{x\to x_0} f^n(x) = l^n$ *(avec* $n \in \mathbb{N}^*$*)*, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + g(x) = l + l'$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \times g(x) = ll'$
- Changement de variable pour le calcul des limites : Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ *et* $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = l$
  alors, $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim\limits_{y\to f(x_0)} g(y) = l$

Exemples :

1) Soit $f(x) = \dfrac{x + \cos(x)}{x+1}$. On remarque pour x assez grand : $\dfrac{x-1}{x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{x+1}{x+1}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x+1} = 1$ alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

2) Soit $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On remarque que $\left| x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \right| \leq x^2$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ alors, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Formes indéterminées : ***algébriques et exponentielles***

On dit qu'il y'a une Forme Indéterminée ou il y'a une indétermination dans les cas suivants :

$$+\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \times \infty, \quad \infty^0, \quad 1^\infty, \quad 0^0$$

N.B. : $\mathbf{0^\infty}$ n'est pas une FI

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x = +\infty - \infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-1} - x\right)\left(\sqrt{x^2-1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2-1} + x\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt{x^2-1} + x\right)} = 0^-$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x - 1}} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}} = 1$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|\left(|x| + 1\right)}{|x|\left(|x| - 1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{|x| + 1}{|x| - 1} = -1$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{1+x} - 1\right) = \infty \times 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x} - 1\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x} - 1\right)\left(\sqrt{1+x} + 1\right)}{x\left(\sqrt{1+x} + 1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}$$

- $\lim_{x \to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sin(x)} = \infty^0$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sin(x)} = \lim_{x \to 0^+} e^{\sin(x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to 0^+} e^{\sin(x)\ln(1+x)-\frac{\sin(x)}{x}x\ln(x)} = e^0 = 1$$

- $\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = 1^{+\infty}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^1 = e$$

- $\lim_{x \to 0^+} x^x = 0^0$

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x\ln(x)} = 1$$

- $\lim_{x \to +\infty} x^{-x} = +\infty^{-\infty}$ N'est pas une forme indéterminée

$$\lim_{x \to +\infty} x^{-x} = \lim_{x \to +\infty} e^{-x\ln(x)} = 0$$

Opérations sur les limites :

Étant données $\lim_{x \to x_0} f(x)$ et $\lim_{x \to x_0} g(x)$, on détermine :

$$\lim_{x \to x_0} (\lambda g)(x), \quad \lim_{x \to x_0} (f+g)(x), \quad \lim_{x \to x_0} (f \times g)(x) \quad et \quad \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

$\lim_{x \to x_0} \lambda g(x)$

$(\lambda \cdot g)$	l	$+\infty$	$-\infty$
0	0	FI	FI
$\lambda > 0$	λl	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda < 0$	λl	$-\infty$	$+\infty$

1[ère] colonne : $\lim_{x \to x_0} f(x)$

1[ère] ligne : $\lim_{x \to x_0} g(x)$

$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x)$

$(f+g)$	l_2	$+\infty$	$-\infty$
l_1	l_1+l_2	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

$\lim_{x \to x_0} (f \times g)(x)$

$(f \times g)$	0^+	0^-	$l_2>0$	$l_2<0$	$+\infty$	$-\infty$
0^+	0^+	0^-	0^+	0^-	FI	FI
0^-	0^-	0^+	0^-	0^+	FI	FI
$l_1>0$	0^+	0^-	l_1l_2	l_1l_2	$+\infty$	$-\infty$
$l_1<0$	0^-	0^+	l_1l_2	l_1l_2	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	FI	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	FI	FI	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$

(f/g)	0^+	0^-	$l_2>0$	$l_2<0$	$+\infty$	$-\infty$
0^+	FI	FI	0^+	0^-	0^+	0^-
0^-	FI	FI	0^-	0^+	0^-	0^+
$l_1>0$	$+\infty$	$-\infty$	l_1/l_2	l_1/l_2	0^+	0^-
$l_1<0$	$-\infty$	$+\infty$	l_1/l_2	l_1/l_2	0^-	0^+
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI	FI
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

Étude des branches infinies :

On dit que C_f présente une branche infinie si l'une au moins des coordonnées d'un point M du graphe C_f devient infinie, i.e., $f(x) \to \pm\infty$ *ou* $x \to \pm\infty$

Exemples :

1) $f(x) = x^2$ admet une branche infinie en $-\infty$ et $+\infty$. En effet $\lim_{|x| \to +\infty} x^2 = +\infty$

2) $f(x) = \frac{1}{x}$ admet des branches infinies en $-\infty$, en $+\infty$ et en 0. En effet, $\lim_{|x| \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$

3) $f(x) = \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de branche infinie en 0. En effet, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ *n'existe pas*

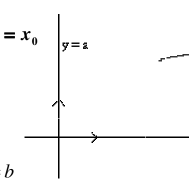
Direction asymptotique :

La direction de la droite (D) passant par l'origine est dite direction asymptotique de C_f si (D) est la position limite de la droite (OM) quand le point M décrit une branche infinie de C_f. Si M est d'abscisse x alors le rapport $\frac{f(x)}{x}$ est le coefficient directeur de la droite (OM). D'où, on étudie

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = ?$$

Recherche pratique des branches infinies :

- $\lim_{x \to x_0 \in \mathbb{R}} f(x) = \infty$ C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$



Exemple : $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

- Au voisinage de ∞, C_f admet toujours une branche infinie

- $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = b \in R$ C_f admet une asymptote horizontale $y = b$

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ alors, y = ax est une direction asymptotique de la branche infinie.

✓ $\lim_{x \to \infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$ la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à C_f.

Exemple : $\lim_{x \to \infty} 3x + 1 + \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \to \infty} \frac{3x+1+\frac{1}{x}}{x} = 3$, $\lim_{x \to \infty} (3x+1+\frac{1}{x} - 3x) = 1$

✓ $\lim_{x \to \infty} f(x) - ax = \infty$ la droite $y = ax$ est une branche parabolique de C_f

Exemple : $\lim_{x \to +\infty} 2x + \sqrt{x} = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+\sqrt{x}}{x} = 2$, $\lim_{x \to +\infty} 2x + \sqrt{x} - 2x = +\infty$

✓ $\lim_{x \to \infty} f(x) - ax$ n'existe pas. Alors, C_f n'admet ni asymptote ni branche parabolique

Exemple : $\lim_{x \to \infty} 3x + \sin(x) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} \frac{3x + \sin x}{x} = 3$, $\lim_{x \to \infty} (3x + \sin x - 3x)$ *n'existe pas*

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ C_f a pour direction asymptotique celle de (x'Ox). C_f admet une branche parabolique parallèle à (x'Ox)

Exemple : $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ C_f a pour direction asymptotique celle de (y'Oy). On dit que C_f admet une branche parabolique parallèle à (y'Oy)

Exemple : $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$, $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x} = \infty$

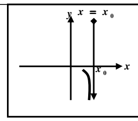
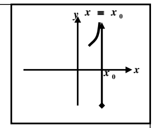
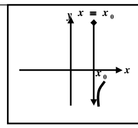
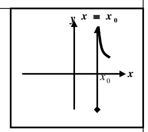
d) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ n'existe pas. Alors, C_f n'admet pas de direction asymptotique.

Exemple : $\lim_{x \to \infty} x\sin(x) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} \frac{x\sin(x)}{x}$ *n'existe pas*

Asymptote verticale : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$

(On suppose que $x_0 > 0$)

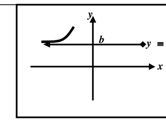
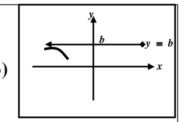
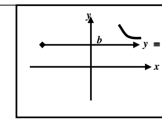
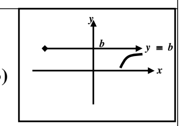
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$		$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{2-x} = +\infty$	
$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{2-x} = -\infty$		$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$	

MQ I :Mathématiques I

Asymptote horizontale : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = b \in \mathbf{R}$

C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$ au voisinage de l'infini

(On suppose que $b > 0$)

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$	$f(x) \geq b$ *au* $V(-\infty)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$		$f(x) \leq b$ *au* $V(-\infty)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$	
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$	$f(x) \geq b$ *au* $V(+\infty)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$		$f(x) \leq b$ *au* $V(+\infty)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$	

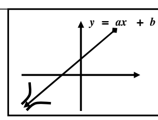
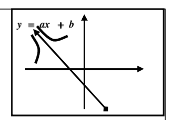
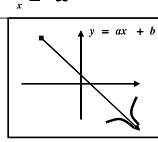
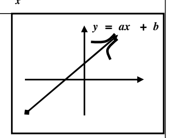
MQ I :Mathématiques I

Asymptote oblique : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0 \qquad a \in \mathbf{R}^*, b \in \mathbf{R}$

ou équivalent à,

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R}^* \quad , \lim_{|x| \to +\infty} \left[f(x) - ax\right] = b \in \mathbf{R}$$

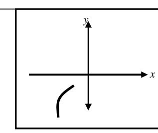
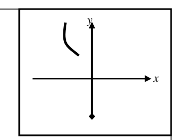
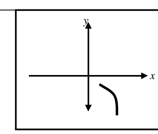
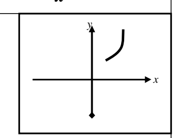
C_f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ au voisinage de l'infini.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0^-$ Ou bien $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0^+$		$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0^-$ ou bien $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0^+$	
C_f *est au dessous ou au dessus de son asymptote* *cas* 1 : $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x + 1 + \frac{1}{x} = -\infty$ *cas* 2 : $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x + 1 - \frac{1}{x} = -\infty$		C_f *est au dessous ou au dessus de son asymptote* *cas* 1 : $\lim\limits_{x \to -\infty} -3x - 1 + \frac{1}{x} = +\infty$ *cas* 2 : $\lim\limits_{x \to -\infty} -3x - 1 - \frac{1}{x} = +\infty$	
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0^-$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0^+$		$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0^-$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0^+$	
C_f *est au dessous ou au dessus de son asymptote* *cas* 1 : $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x + 1 - \frac{1}{x} = -\infty$ *cas* 2 : $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x + 1 + \frac{1}{x} = -\infty$		C_f *est au dessous ou au dessus de son asymptote* *cas* 1 : $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x + 1 - \frac{1}{x} = +\infty$ *cas* 2 : $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x + 1 + \frac{1}{x} = +\infty$	

MQ I :Mathématiques I

Branche parabolique : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$

C_f admet une branche parabolique de direction l'axe $(y'Oy)$

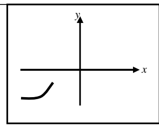
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$		$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$	
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$		$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$	
$\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2}{x} = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = +\infty$

MQ I :Mathématiques I

Branche parabolique : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=\infty \qquad \lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

C_f admet une branche parabolique de direction l'axe $(x'Ox)$

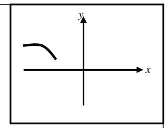
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0^+$



C_f *est au dessous de* $(x'Ox)$ ***au*** $V(-\infty)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{|x|}=-\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{|x|}}{x}=0^+$

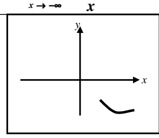
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0^-$



C_f *est au dessus de* $(x'Ox)$ ***au*** $V(-\infty)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{|x|}=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{|x|}}{x}=0^-$

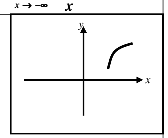
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0^-$



C_f *est au dessous de* $(x'Ox)$ ***au*** $V(+\infty)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\sqrt{x}=-\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\sqrt{x}}{x}=0^-$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0^+$



C_f *est au dessus de* $(x'Ox)$ ***au*** $V(+\infty)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=0^+$

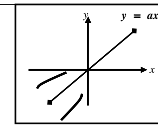
MQ I :Mathématiques I

Direction parabolique :

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)=\infty,\quad \lim_{|x|\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*,\quad \lim_{|x|\to+\infty} f(x)-ax=\infty$$

C_f admet une branche parabolique oblique de direction la droite $y=ax$

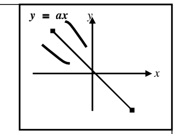
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^* \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{|x|}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+\sqrt{|x|}}{x}=2 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{|x|}-2x=+\infty$

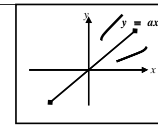
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^* \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} -2x+\sqrt{|x|}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x+\sqrt{|x|}}{x}=-2 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} -2x+\sqrt{|x|}+2x=+\infty$

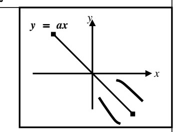
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^* \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\infty$



$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+\sqrt{|x|}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\sqrt{|x|}}{x}=2 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} 2x+\sqrt{|x|}-2x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^* \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\infty$



$\lim\limits_{x\to+\infty} -2x+\sqrt{x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x+\sqrt{x}}{x}=-2 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} -2x+\sqrt{x}+2x=+\infty$

MQ I :Mathématiques I

Fonctions négligeables :

Définition : On dit qu'une fonction f est négligeable devant g au voisinage de x_0 s'il existe une application $\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in V(x_0)\quad f(x)=\varepsilon(x)g(x)$ *avec* $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$

On note $f=o(g)$ (notation de Landau) ou tout simplement, $f=o(g)$ au voisinage de x_0

Remarque : $f\underset{x_0}{=}o(1)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

Exemple : *si* $\alpha<\beta$ *alors* $x^\beta\underset{0}{=}o(x^\alpha)$ *et* $x^\alpha\underset{+\infty}{=}o(x^\beta)$

Propriété : $n,m\in\mathbb{N}$

$$f(x)\underset{x_0}{=}o(x^n)\Leftrightarrow f(x)=x^n\varepsilon(x) \qquad \lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$$

$$x^n o(x^m)\underset{\infty}{=}o(x^{n+m}) \qquad x^n o(x^m)\underset{0}{=}o(x^{n+m})$$

$$o(x^n)+o(x^m)\underset{\infty}{=}o(x^{\max\{n,m\}}) \qquad o(x^n)+o(x^m)\underset{0}{=}o(x^{\min\{n,m\}})$$

Fonctions équivalentes :

Théorème : On dit que f et g (g ne s'annule pas au voisinage de x_0) sont équivalentes au voisinage de x_0 (x_0 fini ou infini) si $f-g\underset{x_0}{=}o(g)$ ou équivalent à $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$

On note : $f(x)\underset{x\to x_0}{\approx}g(x)$ *ou* $f\underset{x_0}{\approx}g$

Exemple : Montrons que : $f\underset{0}{\approx}g$ où $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$ *et* $g(x)=x$.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2x}{x^2+2}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2}{x^2+2}=1$$

MQ I :Mathématiques I

Proposition : soit x_0 (fini ou infini), f_i et g_i sont définies au $V(x_0)$

$$\begin{cases} f_1 \underset{x_0}{\approx} f_2 \\ f_2 \underset{x_0}{\approx} f_3 \end{cases} \Rightarrow f_1 \underset{x_0}{\approx} f_3 \quad et \quad \begin{cases} f_1 \underset{x_0}{\approx} g_1 \\ f_2 \underset{x_0}{\approx} g_2 \end{cases} \Rightarrow f_1\times f_2 \underset{x_0}{\approx} g_1\times g_2$$

Si f_2 et g_2 sont non nulles au voisinage de x_0,

$$\begin{cases} f_1 \underset{x_0}{\approx} g_1 \\ f_2 \underset{x_0}{\approx} g_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\approx} \dfrac{g_1}{g_2} \\ \dfrac{1}{f_2} \underset{x_0}{\approx} \dfrac{1}{g_2} \end{cases}$$

Si f et g sont strictement positives et $\alpha\in\mathbb{R}$ alors, $f\underset{x_0}{\approx}g \Rightarrow f^\alpha\underset{x_0}{\approx}g^\alpha$

Remarques :

- $\begin{cases} f_1 \underset{x_0}{\approx} g_1 \\ f_2 \underset{x_0}{\approx} g_2 \end{cases}$ ***n'implique pas forcement*** $f_1+f_2 \underset{x_0}{\approx} g_1+g_2$

  Exemple : $\begin{cases} x^3 \underset{+\infty}{\approx} x^3+x \\ -x^3 \underset{+\infty}{\approx} -x^3 \end{cases}$ *mais* $0 \underset{+\infty}{\not\approx} x$

  Toutefois, l'implication est vraie si g_1 et g_2 sont positives au voisinage de x_0

- $f_1 \underset{x_0}{\approx} g_1$ ***n'implique pas forcement*** $h\circ f_1 \underset{x_0}{\approx} h\circ g_1$

  Exemple : $x^2+x \underset{+\infty}{\approx} x^2$ mais $e^{x^2+x} \underset{+\infty}{\not\approx} e^{x^2}$, en effet $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

Corollaire : (***équivalence d'un polynôme***) Soit le polynôme défini par :

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_px^p \quad avec \quad \deg(P)=n, \quad val(P)=p \quad (p\le n)$$

$$P(x)\underset{0}{\approx} a_px^p \qquad et \qquad P(x)\underset{\infty}{\approx} a_nx^n$$

Exemple : $3x^2+x-3=-3\left(1-x^2-\frac{x}{3}\right)\underset{0}{\approx}-3$ et $3x^2+x-3=3x^2\left(1+\frac{1}{3x}-\frac{1}{x^2}\right)\underset{\infty}{\approx}3x^2$

Corollaire : (***équivalence d'une fonction rationnelle***) On suppose que : $a_n\neq0, \ a_p\neq0, \ b_m\neq0, \ b_q\neq0.$

$$\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_px^p}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_qx^q}\underset{0}{\approx}\frac{a_p}{b_q}x^{p-q} \qquad et \qquad \frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_px^p}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_qx^q}\underset{\infty}{\approx}\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$$

Exemple :

$$\frac{3x^2+x-3}{6x^6+x^3-x}\underset{0}{\approx}\frac{-3}{-x} \qquad et \qquad \frac{3x^2+x-3}{6x^6+x^3-x}\underset{\infty}{\approx}\frac{3x^2}{6x^6}=\frac{1}{2x^4}$$

Quelques équivalents usuels :

$(1+x)^\alpha-1\underset{0}{\approx}\alpha x, \quad \forall\alpha\in R$

$\ln(1+x)\underset{0}{\approx}x \qquad e^x-1\underset{0}{\approx}x$

$\sin(x)\underset{0}{\approx}x \qquad \tan(x)\underset{0}{\approx}x$

$\cos(x)\underset{0}{\approx}1-\frac{1}{2}x^2$ ou $1-\cos(x)\underset{0}{\approx}\frac{1}{2}x^2$

$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}=1 \qquad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1$

$\lim_{x\to0}\frac{\tan(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$

Exemples :

1) On prend $\alpha=1/2$, et on a $\sqrt{1+x}-1\underset{0}{\approx}\frac{x}{2}$ *en effet* $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}}=1$

2) Calculer $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2}=?$

Posons $u=3x^2$, *quand* $x\to0$, $u\to0$ et on sait que : $\sqrt{1+u}-1\underset{0}{\approx}\frac{u}{2}$

Donc $\sqrt{1+3x^2}-1\underset{0}{\approx}\frac{3x^2}{2}$ *ce qui implique* $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2}=\frac{3}{2}$

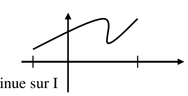
Exercice : Soient $a,b\in R^*$ Calculer :

$\lim_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{ax}=? \qquad \lim_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{bx}=? \qquad \lim_{x\to0}\frac{\tan(ax)}{ax}=? \qquad \lim_{x\to0}\frac{\tan(ax)}{bx}=?$

$\lim_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}=? \qquad \lim_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{\tan(bx)}=? \qquad \lim_{x\to0}\frac{\tan(ax)}{\tan(bx)}=? \qquad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(ax)}{x^2}=?$

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{ax}=?$

Continuité :



f est continue sur I

Notion intuitive :

Pour une fonction *f* définie et continue sur un intervalle, la présentation graphique se fait par trait continu, c'est-à-dire sans lever le stylo et sans sauts.

Définition plus rigoureuse :

Définition : Soit *f* une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert $I\subseteq D_f$, $x_0\in I$

f est continue en x_0 ssi $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

$$\Leftrightarrow \ \forall\varepsilon>0 \ \exists\eta>0 \ \left(x\in D_f \ et \ |x-x_0|<\eta \ \Rightarrow \ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\right)$$

$f(x)$ est assez proche de $f(x_0)$ quand x est suffisamment proche de x_0

Si $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$ alors *f* est dite continue à droite de x_0

Si $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ alors *f* est dite continue à gauche de x_0

Ainsi, *f* est continue en x_0 ssi $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$

f est continue sur $]a,b[$ ssi *f* est continue en tout point de cet intervalle.

f est continue sur $[a,b]$ *ssi f* est continue sur $]a,b[$, à droite de *a* et à gauche de *b*.

Exemple de fonctions continues :

- Toute fonction polynôme est continue sur R
- Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition
- La fonction racine $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue sur R+
- Les fonctions trigonométriques $x\mapsto\sin(x), x\mapsto\cos(x)$ sont continues sur R
- La fonction trigonométrique $x\mapsto\tan(x)$ tangente est continue sur $R/\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in Z\right\}$

Proposition : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Remarque : Soit *f* une fonction numérique continue sur un intervalle I=[*a,b*]. Si *f* est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante sur I) alors,

$f([a,b])=[f(a),f(b)]$

$f([a,b[)=\left[f(a),\lim_{x\to b^-}f(x)\right[$

$f(]a,b])=\left]\lim_{x\to a^+}f(x),f(b)\right]$

$f(]a,b[)=\left]\lim_{x\to a^+}f(x),\lim_{x\to b^-}f(x)\right[$

$f(]-\infty,b])=\left]\lim_{x\to-\infty}f(x),f(b)\right]$

$f([a,+\infty[)=\left[f(a),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[$

$f(]-\infty,+\infty[)=\left]\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[$

resp.

$f([a,b])=[f(b),f(a)]$

$f([a,b[)=\left]\lim_{x\to b^-}f(x),f(a)\right]$

$f(]a,b])=\left[f(b),\lim_{x\to a^+}f(x)\right[$

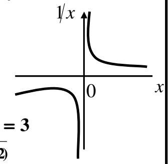
$f(]a,b[)=\left]\lim_{x\to b^-}f(x),\lim_{x\to a^+}f(x)\right[$

$f(]-\infty,b])=\left[f(b),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right[$

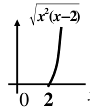
$f([a,+\infty[)=\left]\lim_{x\to+\infty}f(x),f(a)\right]$

$f(]-\infty,+\infty[)=\left]\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right[$

Cas de discontinuité : $x_0 \in \mathbf{R}$ est un point de discontinuité de f si f n'est pas continue en x_0

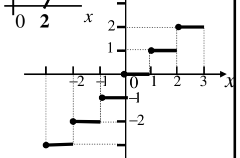


- f non définie en x_0
  - ✓ $f(x) = 1/x, \quad 0 \notin D_f, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = \infty$
  - ✓ $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}, \quad 1 \notin D_f, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2+x+1 = 3$
- f définie en x_0 mais f non définie au voisinage de x_0 :
  - ✓ $f(x) = \sqrt{x^2(x-2)}, \quad D_f = [2,+\infty[\cup \{0\}, \quad 0 \in D_f$



- f définie en x_0 et au voisinage de x_0 et,
  - ✓ $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$

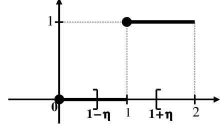
Soit $f(x) = E(x)$ on a $\forall x \in [n, n+1[\quad E(x) = n \quad (n \in \mathbf{Z})$



$E(2{,}5) = 2; \quad E(5) = 5; \quad E(0{,}3) = 0; \quad E(-5{,}7) = -6$

$x_0 = 1, \quad I =]1-\eta, 1+\eta[\qquad \eta > 0$ *assez petit*

$$\begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} E(x) = \lim_{x\to 1^-} 0 = 0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} E(x) = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$



✓ $\lim_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas

Soit $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)$ n'existe pas

✓ $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$

Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

✓ $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \in \mathbf{R}$ *et* $f(x_0) \neq l$

Soit $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & x \neq 2 \\ 5 & x = 2 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3 \neq f(2)$

Remarque : $\forall x \in \mathbf{R} \quad x-1 < E(x) \leq x$ en effet,

$E(x) = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1$ donc $E(x) \leq x < E(x)+1$ ce qui implique :

$$\begin{cases} E(x) \leq x \\ x < E(x)+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(x) \leq x \\ x-1 < E(x) \end{cases}$$

Ainsi, $x-1 < E(x) \leq x$

Proposition : (Règles opératoires sur les fonctions continues)

Soient f et g deux fonctions continues sur I et $\lambda \in \mathbf{R}^*$, alors $\lambda f, |f|, f+g, f \times g$ sont continues sur I

Si, de plus, g est non nulle sur I, alors $\dfrac{1}{g}, \ \dfrac{f}{g}$ sont continues sur I.

Soient f une fonction continue sur I et g une fonction continue sur un intervalle J contenant f(I).

Alors, $g \circ f$ est continue sur I. La réciproque est fausse (contre exemple).

Exemple : Soit $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^4+2}$. f est continue sur R. En effet,

✓ $x \mapsto x^2+1$ est polynomiale, donc continue sur R, par ailleurs, elle est à valeur dans R⁺

✓ $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur R⁺. Par composition, on en déduit que $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur R

✓ $x \mapsto x^4+2$ est continue sur R

✓ Par quotient, on en déduit la continuité de f sur R.

Remarques :

- Si $|f|$ est continue en un point x_0, ceci n'implique pas que f est continue en x_0
- Si f définie sur un intervalle ouvert I($x_0 \in I$) et g définie sur un intervalle J contenant $f(I)$ alors,

$$\begin{cases} \lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbf{R} \\ g \text{ continue en } l \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = g(l)$$

Contre exemple : la réciproque est fausse

$g(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}, \ g \circ f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$ *et* $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq f(0)$

Prolongement par continuité :

Dans le cas où $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \in \mathbf{R}$ mais $f(x_0)$ n'existe pas $(x_0 \notin D_f)$.

On pourra poser,

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in D_f \qquad x \neq x_0 \\ l & si \quad x = x_0 \end{cases}$$

Et on a, $\lim_{x\to x_0} \hat{f}(x) = \hat{f}(x_0)$

$\hat{f}(x_0)$ est dite *valeur de continuité*

On dit que :

- f est continue par prolongement au point x_0
- $\hat{f}$ est continue en x_0

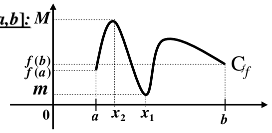
Exemple : Soit $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. f(0) n'existe pas mais $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ ***puisque*** $\sin(x) \underset{0}{\approx} x$

donc f est continue par prolongement au point 0. On pose, $\hat{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

Propriétés des fonctions continues sur I =[a,b]:

Définition : f est continue sur $[a,b]$ si :

- f est continue en tout point $]a,b[$
- f est continue à droite de a
- f est continue à gauche de b

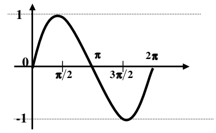


Théorème : Si f est continue sur [a,b], alors f y est bornée. C'est-à-dire, $\exists m = \inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\} \in \mathbf{R}$ (borne inférieure) et $\exists M = \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\} \in \mathbf{R}$ (borne supérieure) tels que : $\forall x \in [a,b] \quad m \le f(x) \le M$

(i.e., $f([a,b]) \subseteq [m,M]$) et,

$\exists$ *au moins* $x_1, x_2 \in [a,b]$, $f(x_1) = m$, *et* $f(x_2) = M$

Exemple : $f(x) = \sin(x)$ est continue sur $[0,2\pi]$



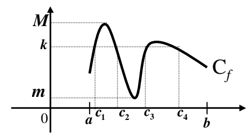
$-1 \le \sin(x) \le 1 \Leftrightarrow |\sin(x)| \le 1$ *et* $\begin{cases} \sin(\pi/2) = 1 \\ \sin(3\pi/2) = -1 \end{cases}$

Théorème : ***(valeur intermédiaire)***

Soit f une fonction continue sur [a,b]. On note m sa borne inférieure et M sa borne supérieure.

Si $k \in]m,M[$ alors,

$\exists$ *au moins* $c \in]a,b[$ *tel que* $f(c) = k$



Exemple : Montrons que l'équation $g(x)=0$ admet au moins une solution dans]0,1[avec,

$g(x) = x^3 + x^2 - 1 - k, \quad k \in]-1,1[$

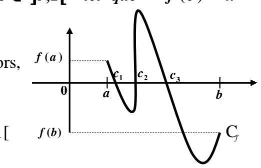
on pose $f(x) = x^3 + x^2 - 1.$

$\begin{cases} f \text{ continue sur } [0,1] \\ f(0) = -1,\ f(1) = 1, [-1,1] \subseteq [m,M] \\ k \in]-1,1[\end{cases} \Rightarrow \exists c \in]0,1[\text{ tel que } f(c) = k$

Et on a : $f(c) = k \Leftrightarrow g(c) = 0$

Théorème : Soit f continue sur [a,b]. Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors,

$\exists$ *au moins* $c \in]a,b[$ *tel que* $f(c) = 0$



Exemple : Soit $f(x) = x^3 + x^2 - 1$

Montrer que $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans]0,1[

$\begin{cases} f \text{ continue sur } [0,1] \\ f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \exists c \in]0,1[\text{ tel que } f(c) = 0$

Remarque :

Si f est continue sur $[a,b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$ alors, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a,b[$. Si en plus, f est strictement monotone sur $[a,b]$ alors la solution est unique dans $]a,b[$.

Exercice : Soit f une fonction numérique continue sur [0,1] tel que $f(1) \ge 3.$ Montrons qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que : $c^2 f(c) - 2 = 0$

Application réciproque : Soit f une application bijective. f^{-1} est son application réciproque telle que :

$f: \begin{array}{l} E \to F \\ x \mapsto y = f(x) \end{array}$ *et* $f^{-1}: \begin{array}{l} F \to E \\ y \mapsto x = f^{-1}(y) \end{array}$

et $(x \in E,\ y = f(x)) \Leftrightarrow (y \in F,\ x = f^{-1}(y))$

Ainsi, $\forall z \in E \quad (f^{-1} \circ f)(z) = z$ *et* $\forall z \in F \quad (f \circ f^{-1})(z) = z$

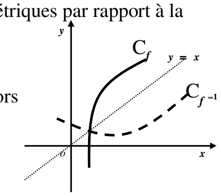
Théorème : On suppose que f est continue et strictement monotone sur I. Alors,

- f est bijective de I vers f(I)=J,
- sa fonction réciproque f^{-1} est continue sur J et de même sens de monotonie que f (si f est croissante alors, f^{-1} est croissante et si f est décroissante alors, f^{-1} est décroissante)
- $C_{f^{-1}}$, le graphe de f^{-1} et C_f , le graphe de f, sont symétriques par rapport à la première bissectrice $y = x$

Théorème :

Si f est bijective de E vers F et g est bijective de F vers G, alors

$g \circ f$ est bijective de E vers G et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$



Exemple :

Soit $f(x) = \sqrt{x+1} \quad D_f = [-1,+\infty[$

f est une application continue et

$x, y \in D_f \quad \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = \dfrac{\sqrt{y+1} - \sqrt{x+1}}{y - x} = \dfrac{1}{\sqrt{y+1} - \sqrt{x+1}} > 0$

Donc f strictement croissante sur $[-1,+\infty[$ d'où f est bijective de $[-1,+\infty[$ vers $f([-1,+\infty[)$

or $f([-1,+\infty[) = [f(-1), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [0,+\infty[$

f est donc bijective de $[-1,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$

La réciproque f^{-1} de f existe et donc définie sur $[0,+\infty[$

$f^{-1} : \begin{array}{l} [0,+\infty[\to [-1,+\infty[\\ y \mapsto x = f^{-1}(y) = y^2 - 1 \end{array}$

En effet,

$f(x) = y \Leftrightarrow y = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow y^2 = x + 1 \Leftrightarrow x = y^2 - 1 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = y^2 - 1$

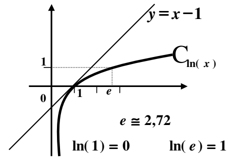
Fonction logarithme népérien : $f(x)=\ln(x)$ est continue sur $D_f=]0,+\infty[=\mathbb{R}_+^*$

$\forall x,y\in\mathbb{R}_+^*,\quad \forall r\in\mathbb{Q}^*$

$x=y\Leftrightarrow \ln(x)=\ln(y)\quad et\quad x<y\Leftrightarrow \ln(x)<\ln(y)$

$\ln(x\times y)=\ln(x)+\ln(y)\quad et\quad \ln(x^r)=r\ln(x)$

$\ln\left(\frac{1}{y}\right)=-\ln(y)\quad et\quad \ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$



$\lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty\qquad \lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty\qquad \lim_{x\to0^+}x\ln(x)=0^-$

$\lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1\qquad \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0^+$

N.B. : $\forall x,y\in\mathbb{R},\quad x\times y>0,\qquad \ln(x\times y)=\ln(|x|)+\ln(|y|)$

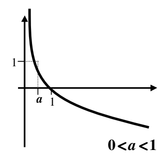
Fonction logarithme de base a :

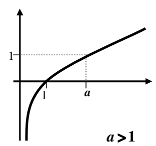
Soit $a\in\mathbb{R}_+^*\quad et\quad a\neq1$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\qquad \log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Fonction logarithme décimal (ou de base 10):

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\qquad \log(x)=\log_{10}(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$





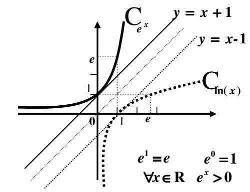
Fonction exponentielle népérienne :

La fonction réciproque de $f(x)=\ln(x)$ est la fonction exponentielle népérienne, $f^{-1}(x)=\exp(x)=e^x$ continue sur $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

$\begin{cases}y=e^x\\x\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\ln(y)\\y\in\mathbb{R}_+^*\end{cases}$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\qquad e^{\ln(x)}=x$

$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \ln(e^x)=x$



$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad \forall r\in\mathbb{Q}$

$x=y\quad\Leftrightarrow\quad e^x=e^y\qquad et\qquad x<y\quad\Leftrightarrow\quad e^x<e^y$

$e^{x+y}=e^x\times e^y,\qquad e^{-y}=\frac{1}{e^y}\qquad e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}\qquad e^{rx}=\left(e^x\right)^r$

$\lim_{x\to-\infty}e^x=0^+\qquad \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty\qquad \lim_{x\to-\infty}xe^x=0^-\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty\qquad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

Fonction exponentielle de base a : Soit $a\in\mathbb{R}_+^*\qquad \exp_a(x)=a^x=e^{x\ln(a)}$

Fonction réciproque de $\log_a(x)$:

$x=\log_a(y),\ y\in\mathbb{R}_+^*\quad\Leftrightarrow\quad y=a^x,\ x\in\mathbb{R}$

On a : $\forall x\in\mathbb{R}\qquad \ln(a^x)=x\ln(a)$

Fonctions puissances : $x\in]0,+\infty[\qquad \alpha\in\mathbb{R}\qquad x^\alpha=e^{\alpha\ln(x)}$

$$\lim_{x\to0^+}x^\alpha=\begin{cases}+\infty & si\ \alpha<0\\1 & si\ \alpha=0\\0 & si\ \alpha>0\end{cases}\quad et\quad \lim_{x\to+\infty}x^\alpha=\begin{cases}0 & si\ \alpha<0\\1 & si\ \alpha=0\\+\infty & si\ \alpha>0\end{cases}$$

Comparaison locale des fonctions logarithmiques, exponentielles et puissances : Soient $n,m\in\mathbb{N}^*$

$\lim_{x\to-\infty}x^me^{nx}=0$ — On pose $t=\frac{n}{m}x$, $\lim_{x\to-\infty}x^me^{nx}=\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{m}{n}\right)^m\left(te^t\right)^m=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{nx}}{x^m}=+\infty$ — On pose $t=\frac{n}{m}x$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{nx}}{x^m}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{n}{m}\right)^m\left(\frac{e^t}{t}\right)^m=+\infty$

$\lim_{x\to0^+}x^m\ln^n(x^p)=0$ — On pose $t=x^{\frac{m}{n}}$, $\lim_{x\to0^+}x^m\ln^n(x^p)=\lim_{t\to0^+}\left(\frac{np}{m}\right)^n\left(t\ln(t)\right)^n=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^n(x^p)}{x^m}=0^+$ — On pose $t=x^{\frac{m}{n}}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^n(x^p)}{x^m}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{np}{m}\right)^n\left(\frac{\ln(t)}{t}\right)^n=0$

$\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+^*$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta}=0\quad et\quad \lim_{x\to0^+}x^\beta|\ln(x)|^\alpha=0\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta}=+\infty\quad et\quad \lim_{x\to-\infty}|x|^\beta e^{\alpha x}=0$

La fonction logarithme népérien croit moins vite que la fonction puissance
La fonction exponentielle croit plus vite que la fonction puissance.

Chapitre II

La notion de la dérivée est réintroduite. Les propriétés classiques sont énoncées. On y rajoute le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis, le calcul des dérivées de quelques fonctions réciproques, règle de l'Hospital.

MQ I : Mathématiques I

Fonction différentiable en un point :

Définition : f est différentiable en un point x_0 $\exists m \in \mathbf{R}$ et une fonction $\varepsilon : h \mapsto \varepsilon(h)$ définie sur un intervalle I centré en 0 telle que :

$$\forall h \in I, \quad f(x_0+h) = f(x_0) + mh + h\varepsilon(h) \quad avec \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$$

L'application linéaire $h \mapsto mh$ est dite fonction linéaire tangente à f au point x_0 ou fonction différentielle de f au point x_0 et on note : $df_{x_0}(h) = mh$

Exemples :

- Soit $f(x) = x^2+1, \quad x_0 \in \mathbf{R}, \quad \forall h \in \mathbf{R}$

$$f(x_0+h) = (x_0+h)^2+1 = x_0^2+2x_0h+h^2+1 = (x_0^2+1)+2x_0h+h^2$$

$$f(x_0+h) = f(x_0)+(2x_0)h+h(h) = f(x_0)+mh+h\varepsilon(h)$$

$$avec \quad m = 2x_0, \quad \varepsilon(h) = h \quad et \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$$

Donc f est différentiable en x_0

- Soit $g(x) = x^3+1, \quad x_0 \in \mathbf{R}, \quad \forall h \in \mathbf{R}$

$$g(x_0+h) = (x_0+h)^3+1 = x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3+1 = (x_0^3+1)+(3x_0^2)h+h(3x_0h+h^2)$$

$$g(x_0+h) = g(x_0)+(3x_0^2)h+h(3x_0h+h^2) = g(x_0)+mh+h\varepsilon(h)$$

$$avec \quad m = 3x_0^2, \quad \varepsilon(h) = 3x_0h+h^2 \quad et \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$$

Donc g est différentiable en x_0

MQ I : Mathématiques I

Fonction dérivable en un point :

Définition :

f est dérivable en un point x_0 ssi $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m \in \mathbf{R}$ ssi $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = m \in \mathbf{R}$

m s'appelle le nombre dérivé premier de f au point x_0. On le note $f'(x_0) = m$

Ou encore, f est dérivable en un point x_0 ssi $\exists f'(x_0) \in \mathbf{R}$ $f(x_0+h) = f(x_0)+f'(x_0)h+h\varepsilon(h), \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$

Remarques :

- Le rapport $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est le taux d'accroissement de f en x_0 et x_0+h.
- Pour une fonction dérivable en x_0 on a $df_{x_0}(x) = f'(x_0)dx$

Exemples :

- *Soit* $f(x) = x^2+1$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2+1-x_0^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2x_0h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x_0+h) = 2x_0$$

Donc, $f'(x_0) = 2x_0$

- *Soit* $g(x) = x^3+1$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^3+1-x_0^3-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3x_0^2h+3x_0h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(3x_0^2+3x_0h) = 3x_0^2$$

Donc, $g'(x_0) = 3x_0^2$

MQ I : Mathématiques I

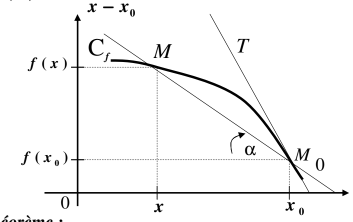
Interprétation géométrique de la dérivée :

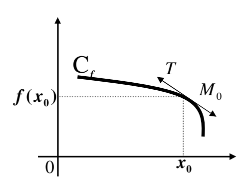
C_f *est le représentation graphique de f. Soient* $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ *et* $M = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$

Quand $x \to x_0$, *la droite* $(MM_0) \to (M_0T)$,

La droite (M_0T) *tangente à* C_f *au point* M_0 et non parallèle à l'axe (y'Oy).

$\tan(\alpha) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to m$ coefficient directeur de (M_0M) et par suite de (M_0T)





Théorème :

f est dérivable en x_0 ssi C_f admet au point $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ une tangente non parallèle à l'axe (y'Oy).

La dérivée $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de cette tangente. L'équation de cette tangente est :

$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

MQ I : Mathématiques I

Dérivée à gauche et dérivée à droite :

Définition :

f dérivable à gauche de x_0 ssi $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_1 \in \mathbf{R}$ On note $f'(x_0^-) = f_g'(x_0) = l_1$

f dérivable à droite de x_0 ssi $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_2 \in \mathbf{R}$ On note $f'(x_0^+) = f_d'(x_0) = l_2$

f dérivable au point x_0 ssi $f_g'(x_0)$ *et* $f_d'(x_0)$ existent et $f_g'(x_0) = f_d'(x_0)$

Exemple : $f(x) = |x|, \quad x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim_{x\to 0} 1 = 1 & si \quad x > 0 \\ \lim_{x\to 0} -1 = -1 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

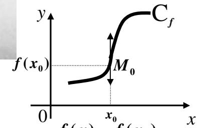
Ainsi, $f_g'(0) = -1$ *et* $f_d'(0) = 1$. Comme $f_g'(0) \neq f_d'(0)$, f est non dérivable au point 0.

Remarque :

On a pas forcement $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$

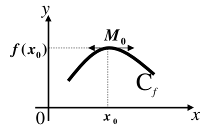
$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$ f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et $f'(0) = 0$ mais,

$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.



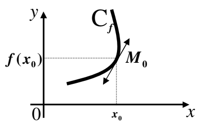
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$$

C_f admet une tangente verticale au point M_0 d'équation : $x = x_0$



$$f'(x_0)=0$$

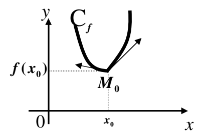
C_f admet une tangente horizontale au point M_0 d'équation : $y = f(x_0)$



$f_d'(x_0) = f_g'(x_0) \in$ R

C_f admet une tangente oblique au point M_0 d'équation :

$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$



$f_d'(x_0) \neq f_g'(x_0)$, $\quad f_d'(x_0), f_g'(x_0) \in$ R

C_f admet deux demi- tangentes au point M_0 (point anguleux) d'équations :

$$\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} y = f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$$

MQ I :Mathématiques I

Dérivabilité et continuité :

Théorème : *Si* f est dérivable en x_0 alors, f est continue en x_0.

Remarques :

- *Si* f n'est pas continue en x_0 *alors,* f n'est pas dérivable en x_0
- *Si* f est continue en x_0 *alors,* f n'est pas forcement dérivable en x_0

Exemple : $f(x) = |x|, \quad x_0 = 0$

f est continue au point 0 car $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ mais f est non dérivable au point 0.

Dérivabilité sur [a,b] :

- f est dérivable sur $]a,b[$ si f est dérivable en tout point de $]a,b[$.
- f est dérivable sur $[a,b]$ si f est dérivable sur $]a,b[$ et dérivable à droite de a et à gauche de b.
- f est dérivable sur $]-\infty,b]$ si f est dérivable sur $]-\infty,b[$ et dérivable à gauche de b.
- f est dérivable sur $[a,+\infty[$ si f est dérivable sur $]a,+\infty[$ et dérivable à droite de a.

Théorème : f est dérivable sur un intervalle ouvert $I \subseteq$ R

- f est croissante sur I ssi, $\forall x \in I, \quad f'(x) \geq 0$
- f est strictement croissante sur I ssi, $\forall x \in I, \quad f'(x) > 0$
- f est décroissante sur I ssi, $\forall x \in I, \quad f'(x) \leq 0$
- f est strictement décroissante sur I ssi, $\forall x \in I, \quad f'(x) < 0$
- f est constante sur I ssi $\forall x \in I, \quad f'(x) = 0$

MQ I :Mathématiques I

Exemples :

- Toute fonction polynomiale est dérivable sur R
- La fonction racine $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur R_+^*
- Les fonctions trigonométriques $x \mapsto \sin(x), x \mapsto \cos(x)$ sont dérivables sur R
- La fonction trigonométrique $x \mapsto \tan(x)$ est dérivable sur $\mathbf{R} / \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbf{Z}\right\}$
- La fonction $x \mapsto x^r \quad (r \in Q^* /\{1\})$ est dérivable sur R+*

Théorème :

Si f et g sont dérivables en x_0, alors $\lambda f\ (\lambda \in \mathbf{R}^*), |f|, f+g, f \times g$ sont dérivables en x_0. Si $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}, \ \frac{f}{g}$ sont dérivables en x_0.

Théorème :

Si f est dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$ alors, $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$$

Preuve :

$$(gof)'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{(gof)(x_0+h)-(gof)(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)} \times \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

or quand $h \to 0, \quad f(x_0+h) \to f(x_0)$ D'où, $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$

Exemple :

$$g(x) = \cos(x) \quad et \quad f(x) = x^2+2x+5$$

$$g'(x) = -\sin(x) \quad et \quad f'(x) = 2x+2$$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+2x+5) = \cos(x^2+2x+5)$$

$$(g\circ f)'(x) = -(2x+2)\sin(x^2+2x+5)$$

MQ I :Mathématiques I

Tableau des dérivées usuelles et opérations sur les fonctions dérivées :

fonction	*derivée*	*fonction*	*derivée*	*fonction*	*derivée*
k (constante)	0	$\frac{1}{v(x)}$	$\frac{-v'(x)}{v^2(x)}$	$\tan(u(x))$	$\frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$
$ku(x)$	$ku'(x)$	$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$	$\text{cotan}(u(x))$	$\frac{u'(x)}{\sin^2(u(x))}$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$	e^x	e^x	$\text{cotan}(x)$	$\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\arcsin(u(x))$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
$(u\circ v)(x)$	$u'(v(x))v'(x)$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$u^r(x) \quad (r\in \mathbf{Q}^*/\{1\})$	$ru'(x)u^{r-1}(x)$	$a^{u(x)} \quad (a>0)$	$u'(x)a^{u(x)}\ln(a)$	$\arccos(u(x))$	$\frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
$x^r \quad (r\in \mathbf{Q}^*/\{1\})$	rx^{r-1}	$a^x \quad (a>0)$	$a^x\ln(a)$	$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt[n]{u(x)} = u(x)^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}u'(x)u(x)^{\frac{1}{n}-1}$	$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$	$\arctan(u(x))$	$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$	$\text{arccotan}(u(x))$	$\frac{-u'(x)}{1+u^2(x)}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\text{arccotan}(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$

MQ I :Mathématiques I

Théorème :

$$\begin{cases} f \text{ dérivable sur }]a,b[\\ f \text{ strictement monotone sur }]a,b[\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1} \text{ est dérivable sur } f(]a,b[) \text{ et} \\ \forall y \in f(]a,b[) \quad (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))} \end{cases}$$

Preuve : *on a* $(x \in]a,b[\quad y = f(x)) \Leftrightarrow (y \in f(]a,b[) \quad x = f^{-1}(y))$

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}} = \frac{1}{f'(x)}$$

Ainsi, $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \dfrac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}$

Corollaire :

$$\begin{cases} f \text{ bijective} \\ f \text{ dérivable en } x_0 \\ y_0 = f(x_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1} \text{ est dérivable en } y_0 \text{ et} \\ (f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \end{cases}$$

Définition :

On dit qu'une fonction f est de classe C^k sur un intervalle I ssi f est k-fois dérivable sur I et la dérivée $k^{ième}$ est continue sur I.

On dit qu'une fonction f est de classe C^∞ sur un intervalle I ssi f est infiniment dérivable sur I.

Dérivées successives :

Théorème : f admet des dérivées successives jusqu'à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en x_0 si :

$f^{(0)}(x_0), f'(x_0), f''(x_0), f^{(3)}(x_0), \cdots, f^{(n-1)}(x_0), f^{(n)}(x_0)$ existent et $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$; $f^{(0)} = f$

Exemple : $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$, $f^{(3)}(x) = \dfrac{-2.3}{(x-1)^4}$, $f^{(4)}(x) = \dfrac{2.3.4}{(x-1)^5}$

On remarque que : $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Démonstration par récurrence :

Vérification : $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{(-1)^0 0!}{(x-1)^{0+1}}$ (par convention $f^{(0)}(x) = f(x)$)

Hypothèse de récurrence : on suppose que $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$

Démonstration : On montre que $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}$

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = (-1)^n n! \frac{-(n+1)(x-1)^n}{((x-1)^{n+1})^2} = \frac{(-1)^{n+1} n!(n+1)(x-1)^n}{(x-1)^{2n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}$$

Conclusion : $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice : Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (\sin(ax+b))^{(n)} = a^n \sin\left(ax+b-n\frac{\pi}{2}\right), \qquad (\cos(ax+b))^{(n)} = a^n \cos\left(ax+b+n\frac{\pi}{2}\right)$$

Exercice : Calculer $g^{(n)}(x)$ pour $g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

(Indication : déterminer a et b pour que $g(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$)

Formule de Leibniz :

Théorème : f et g sont n fois dérivables en x. Alors,

$$(f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) \times g^{(n-k)}(x) \quad avec \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemples :

1) Soit $h(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$. Calculons $h^{(n)}(x) = ?$ et en déduire $h^{(n)}(0) = ?$

On remarque que

$$h(x) = f(x) \times g(x) \quad avec \quad f(x) = x^3 \quad et \quad g(x) = \frac{1}{x-1}$$

On sait que $g^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{(x-1)^{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$f^{(0)}(x) = f(x) = x^3, \quad f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x, \quad f^{(3)}(x) = 6, \quad f^{(k)}(x) = 0 \quad \forall k \geq 4$$

$$\begin{aligned} h^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{3} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=4}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{3} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= C_n^0 f^{(0)}(x) g^{(n-0)}(x) + C_n^1 f'(x) g^{(n-1)}(x) + C_n^2 f''(x) g^{(n-2)}(x) + C_n^3 f^{(3)}(x) g^{(n-3)}(x) \end{aligned}$$

$$(g^{(k)}(0) = -k! \quad \forall k \in \mathbb{N}) \quad et \quad (f^{(3)}(0) = 6, \quad f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad k \neq 3)$$

$$h^{(n)}(0) = C_n^3 f^{(3)}(0) g^{(n-3)}(0) = \frac{-n!}{3!(n-3)!} 6(n-3)! = -n! \qquad Ainsi, \quad h^{(n)}(0) = -n!$$

2) Soit $h(x) = (x^2 + 2x + 2)(4x+3)^n$ Calculons $h^{(n)}(x) = ?$ et en déduire $h^{(n)}(0) = ?$

On remarque que $h(x) = f(x) \times g(x) \quad avec \quad f(x) = x^2 + 2x + 2 \quad et \quad g(x) = (4x+3)^n$

$$f^{(0)}(x) = f(x) = x^2 + 2x + 2, \quad f'(x) = 2x + 2, \quad f''(x) = 2, \quad f^{(k)}(x) = 0 \quad \forall k \geq 3$$

$$\begin{aligned} g^{(0)}(x) &= h(x) = (4x+3)^n \\ g'(x) &= 4n(4x+3)^{n-1} \\ g''(x) &= 4^2 n(n-1)(4x+3)^{n-2} \\ g^{(3)}(x) &= 4^3 n(n-1)(n-2)(4x+3)^{n-3} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} g^{(p)}(x) = 4^p n(n-1)\cdots(n-(p-1))(4x+3)^{n-p} & \forall p \leq n-1 \\ g^{(n)}(x) = 4^n n! & p = n \\ g^{(p)}(x) = 0 & \forall p \geq n+1 \end{cases}$$

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

$$\begin{aligned} h^{(n)}(x) &= C_n^0 f^{(0)}(x) g^{(n-0)}(x) + C_n^1 f'(x) g^{(n-1)}(x) + C_n^2 f''(x) g^{(n-2)}(x) \\ &= (x^2+2x+2) n! 4^n + n(2x+2) n! 4^{n-1}(4x+3) + \frac{n(n-1)}{2} 2 \frac{n!}{2} 4^{n-2}(4x+3)^2 \\ &= 4^n n!(x^2+2x+2) + 4^{n-1} n! n(2x+2)(4x+3) + \frac{1}{2} 4^{n-2} n! n(n-1)(4x+3)^2 \end{aligned}$$

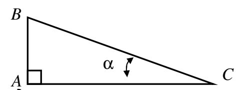
$$h^{(n)}(0) = 2n!4^n + 6n!n4^{n-1} + \frac{9}{2} 4^{n-2} n! n(n-1) = 2n!4^{n-1}(9n^2 - 5n + 4)$$

MQ I :Mathématiques I

Fonctions circulaires (cosinus, sinus, tangente et cotangente) :

Rappel :

$$\cos(\alpha)=\frac{AC}{BC},\qquad \sin(\alpha)=\frac{AB}{BC},$$



$$\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{AB}{AC}\quad et\quad \text{cotan}(\alpha)=\frac{1}{\tan(\alpha)}=\frac{AC}{AB}$$

Cercle trigonométrique : $C(O,1)=\{M(x,y)\in \mathbb{R}^2 / d(O,M)=1\}$

L'axe (y'Oy) est l'axe des sinus et l'axe (x'Ox) est l'axe des cosinus

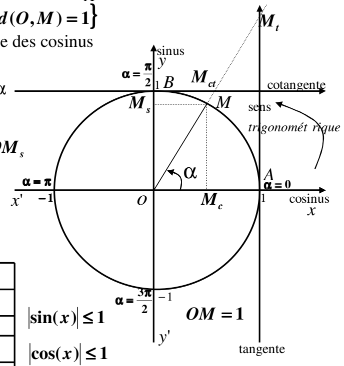
On pose $l'arc\ AM=x$. Or, $l'arc\ AM = rayon\times\alpha=\alpha$

Donc, $x=\alpha$

$$\cos(x)=\frac{OM_c}{1}=OM_c,\quad \sin(x)=\frac{M_cM}{1}=MM_c=OM_s$$

$$\tan(x)=\frac{AM_t}{1}=AM_t$$

$$\text{cotan}(x)=\tan(\tfrac{\pi}{2}-x)=\frac{BM_{ct}}{1}=BM_{ct}$$



x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\tan(x)$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0
$\text{cotan}(x)$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-$

$|\sin(x)|\le 1$

$|\cos(x)|\le 1$

$OM=1$

MQ I :Mathématiques I

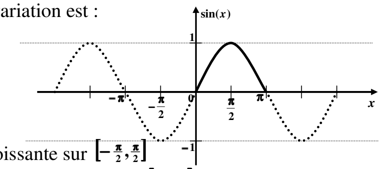
Fonction sinus et sa réciproque : $f(x)=\sin(x)$, $D_f=\mathbb{R}$ f est continue sur R.

f est une fonction impaire et périodique de période 2π. Donc le domaine d'étude est $D_E=[0,\pi]$

Sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ f est strictement croissante et sur $[\frac{\pi}{2},\pi]$ f est strictement décroissante.

$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\cos(x)$. Le tableau de variation est :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		+		−	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0



f est définie, continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

Ainsi, f bijective, f^{-1} existe et strictement croissante sur $[-1,1]$. f^{-1} sera noté **arcsin**

$$\sin : [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}] \to [-1,1],\quad x \mapsto y=\sin(x) \qquad \arcsin : [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}],\quad y \mapsto x=\arcsin(y)$$

Avec, $$[y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} y=\sin(x) \\ x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\arcsin(y) \\ y\in[-1,1]\end{cases}\right]$$

$$\forall y\in]-1,1[\qquad (f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\frac{1}{\cos(f^{-1}(y))}=\frac{1}{\cos(x)}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Puisque

$\cos(x)>0\quad sur\quad]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\quad et\quad \cos^2(x)+\sin^2(x)=1$

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\quad (\arcsin(x))'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

MQ I :Mathématiques I

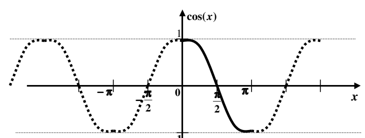
Fonction cosinus et sa réciproque : $f(x)=\cos(x)$, $D_f=\mathbb{R}$ f est continue sur R.

f est une fonction paire et périodique de période 2π. Donc le domaine d'étude est $D_E=[0,\pi]$

Sur $[0,\pi]$ f est strictement décroissante. $\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=-\sin(x)$.

Le tableau de variation est :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$			−		
$f(x)$	1	↘	0	↘	−1



f est définie, continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$

Ainsi, f bijective, f^{-1} existe et strictement décroissante sur $[-1,1]$. f^{-1} sera noté **arccos**

$$\cos : [0,\pi] \to [-1,1],\quad x \mapsto y=\cos(x) \qquad \arccos : [-1,1] \to [0,\pi],\quad y \mapsto x=\arccos(y)$$

Avec, $$[y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} y=\cos(x) \\ x\in[0,\pi]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\arccos(y) \\ y\in[-1,1]\end{cases}\right]$$

$$\forall y\in]-1,1[\qquad (f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\frac{-1}{\sin(f^{-1}(y))}=\frac{-1}{\sin(x)}=\frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}=\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Puisque

$\sin(x)>0\quad sur\quad]0,\pi[\quad et\quad \cos^2(x)+\sin^2(x)=1$

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\quad (\arccos(x))'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

MQ I :Mathématiques I

Fonction tangente et sa réciproque : $f(x)=\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

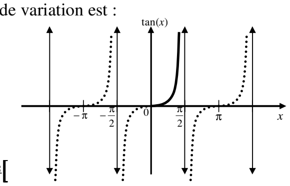
$D_f=\{x/\cos(x)\neq 0\}=\mathbb{R}/\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$ f est continue sur D_f.

f est une fonction impaire et périodique de période π. Donc le domaine d'étude est $D_E=[0,\frac{\pi}{2}[$

Sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ f est strictement croissante.

$\forall x\in D_f,\quad f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$. Le tableau de variation est :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	‖
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖



f est définie, continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

Ainsi, f bijective, f^{-1} existe et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. f^{-1} sera noté **arctan**

$$\tan :]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R},\quad x \mapsto y=\tan(x) \qquad \arctan : \mathbb{R} \to]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[,\quad y \mapsto x=\arctan(y)$$

Avec, $$[y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} y=\tan(x) \\ x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\arctan(y) \\ y\in\mathbb{R}\end{cases}\right]$$

$$\forall y\in\mathbb{R}\quad (f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\frac{1}{1+\tan^2(f^{-1}(y))}=\frac{1}{1+\tan^2(x)}=\frac{1}{1+y^2}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad (\arctan(x))'=\frac{1}{1+x^2}}$$

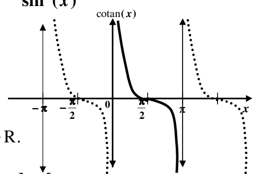
Fonction cotangente et sa réciproque : $f(x) = \text{cotan}(x) = \dfrac{1}{\tan(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \sin(x) \neq 0\} = \mathbb{R} / \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ f est continue sur D_f.

f est une fonction impaire et périodique de période π. Donc le domaine d'étude est $D_E =]0,\pi[$

Sur $]0,\pi[$ f est strictement croissante. $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2(x)}$ Le tableau de variation est :

x	0		π
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$



f est définie, continue et strictement décroissante sur $]0,\pi[$

Ainsi, f bijective, f^{-1} existe et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

f^{-1} sera noté arccotan

$$\text{cotan}: \;]0,\pi[\; \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \text{cotan}(x)$$

$$\text{arccotan}: \; \mathbb{R} \to \;]0,\pi[, \quad y \mapsto x = \text{arccotan}(y)$$

Avec, $\left[y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)\right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} y = \text{cotan}(x) \\ x \in]0,\pi[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{arccotan}(y) \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}\right]$

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{-1}{1+\text{cotan}^2(f^{-1}(y))} = \frac{-1}{1+\text{cotan}^2(x)} = \frac{-1}{1+y^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\text{arccotan}(x))' = \frac{-1}{1+x^2}}$$

Extremum (minimum ou maximum) :

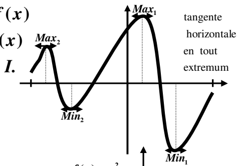
Définition : f est définie sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$. soit $x_0 \in I$.

f admet un minimum relatif (local) en x_0 si, $\exists J \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in J$ tel que $\forall x \in I \cap J$ $f(x_0) \leq f(x)$

f admet un maximum relatif (local) en x_0 si, $\exists J \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in J$ tel que $\forall x \in I \cap J$ $f(x_0) \geq f(x)$

f admet un minimum absolu (global) en x_0 si, $\forall x \in I$ $f(x_0) \leq f(x)$

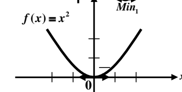
f admet un maximum absolu (global) en x_0 si, $\forall x \in I$ $f(x_0) \geq f(x)$



Théorème (CN) : f est dérivable sur un intervalle ouvert I. Soit $x_0 \in I$.

Si f présente un extremum relatif en x_0 alors, $f'(x_0) = 0$

Exemple : $f(x) = x^2$ Graphiquement, le point d'abscisse $x_0 = 0$ est un minimum absolu de f $f'(x) = 2x$, $f'(x_0) = 2x_0 = 0$



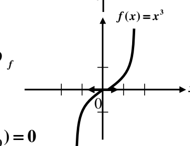
Remarque : La réciproque est fausse, c'est-à-dire,

Si $f'(x_0) = 0$ cela n'implique pas que f présente un extremum en x_0

Contre exemple : $f(x) = x^3$ On a $f'(x) = 3x^2$ *et* $f'(0) = 0$

mais le point d'abscisse $x_0 = 0$ n'est pas un extremum de f.

On remarque ici que $f'(x)$ ne change pas de signe en $x_0 = 0$



Théorème (CN) : f est deux fois dérivable sur un intervalle ouvert $I \subseteq D_f$

Si f admet un minimum relatif en x_0 alors $f''(x_0) \geq 0$

Si f admet un maximum relatif en x_0 alors $f''(x_0) \leq 0$

Théorème (CS) : f est deux fois dérivable et un intervalle ouvert I *et* $f'(x_0) = 0$

si $f''(x_0) < 0$ (resp. $f''(x_0) > 0$) alors, f admet un maximum (resp. minimum) local en x_0

Théorème : f est dérivable sur un intervalle ouvert $I \subseteq D_f$. soit $x_0 \in I$.

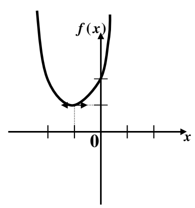
$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f' \text{ change de signe de part et d'autre de } x_0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ présente un extremum relatif en } x_0$$

Exemples:

1) Soit $f(x) = (x+1)^2 + 1$

$f'(x) = 2(x+1)$, $f'(-1) = 0$, $f(-1) = 1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	1	$\nearrow +\infty$



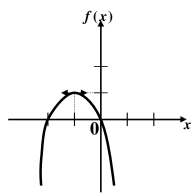
$f'(x)$ change de signe de part et d'autre de $x_0 = -1$

Donc, f présente un minimum au point $x_0 = -1$

2) *Soit* $f(x) = -(x+1)^2 + 1$

$f'(x) = -2(x+1)$, $f'(-1) = 0$, $f(-1) = 1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	1	$\searrow -\infty$



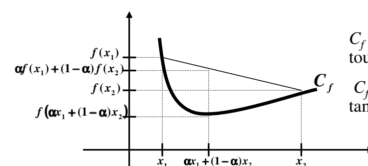
$f'(x)$ change de signe de part et d'autre de $x_0 = -1$

Donc, f présente un maximum au point $x_0 = -1$

Convexité et concavité :

Définition : f est définie sur un intervalle I.

f est convexe sur I si $\forall x_1, x_2 \in I$, $\forall \alpha \in [0,1]$, $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$



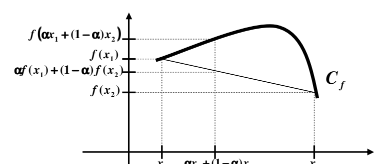
C_f, le graphe de f, a sa concavité tournée vers le haut

C_f *est* au dessus de toutes ses tangentes

Définition : f est définie sur un intervalle I.

f est concave sur I si ($-f$) est convexe, c'est-à-dire :

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad \forall \alpha \in [0,1], \quad f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$



C_f, le graphe de f, a sa concavité tournée vers le bas

C_f est au dessous de toutes ses tangentes

Théorème : f est définie et dérivable sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbf{R}$.
f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I.

Théorème : f est définie et deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I
f est convexe sur I ssi $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

Exemple : $f(x) = x^2$ est convexe sur R car $\forall x \in \mathbf{R} \quad f''(x) = 2 > 0$

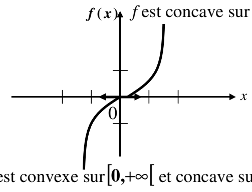
Théorème : f est définie et deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I
f est concave sur I ssi $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$

Exemple : $f(x) = -x^2$ est concave sur R car $\forall x \in \mathbf{R} \quad f''(x) = -2 < 0$

Exercice : Étudier la convexité de $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
convexite de f	$-\infty$		0		$+\infty$



f est convexe sur $[0,+\infty[$ et concave sur $]-\infty,0]$

f est dérivable sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbf{R}$. soit $x_0 \in I$.

Définition :

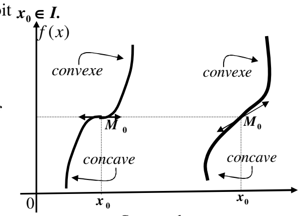
$f'(x_0) = 0$ *et* $f'(x)$ ne change pas de signe en x_0

$\Rightarrow M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ est un point d'inflexion du graphe de f

Théorème :

$f''(x_0) = 0$ *et* $f''(x)$ change de signe en x_0

$\Rightarrow M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ est un point d'inflexion du graphe de f



Exemples : Soient $f(x) = x^3 + 2$ *et* $g(x) = x^3 + x$

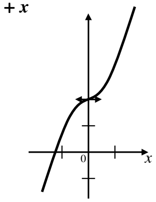
➢ $f'(x) = 3x^2, \quad f'(0) = 0, \quad f(0) = 2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	$+\infty$

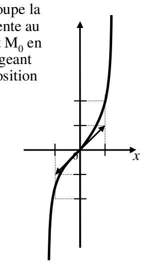
➢ $g'(x) = 3x^2 + 1, \quad g''(x) = 6x, \quad g''(0) = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$		Point 0 d'inflexion	

C_f coupe la tangente au point M_0 en changeant de position



$f(x) = x^3 + 2$

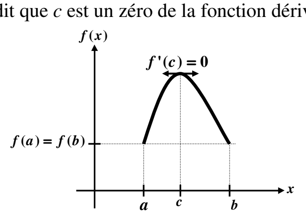


$g(x) = x^3 + x$

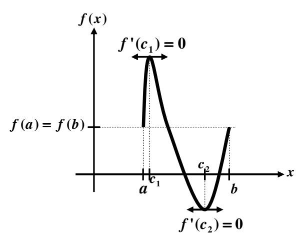
Théorème de Rolle :

$$\begin{cases} f \text{ définie et continue sur } [a,b] \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{cases} \Rightarrow \exists \text{ au moins } c \in]a,b[\text{ tel que } f'(c) = 0$$

On dit que c est un zéro de la fonction dérivée f'



Un seul point vérifie le théorème de Rolle



Deux points vérifient le théorème de Rolle

N.B. :

Avant d'appliquer le théorème de Rolle, il faut s'assurer que toutes les hypothèses susmentionnées sont bien vérifiées.

Exemples : Peut-on appliquer le théorème de Rolle aux fonctions suivantes ? Si oui, déterminer le(s) point(s) le vérifiant.

1) Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ *sur* $[-2,2]$. $\quad D_f = \mathbf{R}/\{-1,1\}$

f est non définie sur [-2,2] car $[-2,2] \not\subset D_f$. Donc, On ne peut pas appliquer le théorème de Rolle à f sur [-2,2].

2) Soit $f(x) = \begin{cases} x-2 & x > 0 \\ 2 & x \leq 0 \end{cases}$ *sur* $[0,1]$. $\quad D_f = \mathbf{R}$

f est définie sur [0,1] car $[0,1] \subseteq D_f$

f est non continue sur [0,1] car f est discontinue en 0. En effet,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -2 \neq f(0)$$

Donc, on ne peut pas appliquer le théorème de Rolle à f sur [0,1].

3) Soit $f(x) = |x-1|$ *sur* $[0,2]$. $\quad D_f = \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x \leq 1 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$$

f est définie et continue sur [0,2] et f est non dérivable au point $x_0 = 1 \in]0,2[$.
En effet,

$$f'_d(1) = 1 \quad et \quad f'_g(1) = -1$$

Donc, on ne peut pas appliquer le théorème de Rolle à f sur [0,2].

4) Soit $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ sur $[0,1]$, $D_f=\mathbb{R}/\{-2\}$

f est définie et continue sur [0,1] et dérivable sur]0,1[. Mais $f(0)\neq f(1)$

Donc, on ne peut pas appliquer le théorème de Rolle à f sur [0,1].

5) Soit $f(x)=2x^3-2x+3$ sur $[0,1]$, $D_f=\mathbb{R}$

f est définie, continue sur [0,1] et f est dérivable sur]0,1[, $f'(x)=6x^2-2$ et $f(0)=f(1)=3$

Donc, on peut appliquer le théorème de Rolle à f sur [0,1] : $\exists c\in\,]0,1[$ tel que $f'(c)=0$

On a $f'(c)=0\Leftrightarrow 6c^2-2=0\Leftrightarrow c^2=1/3\Leftrightarrow c=\mp\sqrt{3}/3$ Or $c\in\,]0,1[$ donc seul le point $c=\sqrt{3}/3$ vérifie le théorème de Rolle appliqué à f sur [0,1].

Exercice : Montrer que l'équation $x^2+\ln(1+x)=0$ n'admet que 0 comme solution.

Posons $f(x)=x^2+\ln(1+x)$ $\quad D_f=\,]-1,+\infty[$

Raisonnement par l'absurde : supposons que f admet un zéro, noté x_0, autre que le point 0.

$$x_0\in\,]-1,+\infty[,\quad x_0\neq 0,\quad f(0)=0 \quad et \quad f(x_0)=0$$

Supposons que $(0<x_0)$ même raisonnement si on suppose que $(0>x_0)$ Ainsi,

f définie, continue sur $[0,x_0]$, dérivable sur $]0,x_0[$, $f'(x)=2x+\frac{1}{1+x}=\frac{2x^2+2x+1}{1+x}$ et $f(0)=f(x_0)$

D'après le théorème de Rolle, $\exists c\in\,]0,x_0[$ $\quad f'(c)=0$

On a :
$$f'(c)=0\Leftrightarrow \frac{2c^2+2c+1}{1+c}=0\Leftrightarrow 2c^2+2c+1=0$$

Or $\Delta=-4<0$ d'où l'équation $2c^2+2c+1=0$ n'admet pas de solution réelle. Ce qui est Absurde. D'où le point 0 est le seul point solution de l'équation $x^2+\ln(1+x)=0$

Généralisation du théorème de Rolle :

Théorème :

$$\begin{cases} f \text{ définie et continue sur } [a,+\infty[\\ f \text{ dérivable sur }]a,+\infty[\\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=f(a)\end{cases} \Rightarrow \exists \text{ au moins } c\in\,]a,+\infty[\text{ tel que } f'(c)=0$$

$$\begin{cases} f \text{ définie et continue sur }]-\infty,+\infty[\\ f \text{ dérivable sur }]-\infty,+\infty[\\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)\end{cases} \Rightarrow \exists \text{ au moins } c\in\,]-\infty,+\infty[\text{ tel que } f'(c)=0$$

Exemple : Soit $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$. $\quad f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2+1)-2x(x^2+x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

➢ *Sur* $[0,+\infty[$, f définie, continue sur $[0,+\infty[$, f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=f(0)=1$
d'après le théorème de Rolle appliqué à f sur $[0,+\infty[$: $\exists$ au moins $c\in\,]0,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$
On a : $f'(c)=0\Leftrightarrow 1-c^2=0\Leftrightarrow c=\mp1$ Or $c\in\,]0,+\infty[$
donc seul le point $c=1$ vérifie le théorème de Rolle appliqué à f sur $[0,+\infty[$

➢ *Sur* $]-\infty,+\infty[$, f définie, continue *et* dérivable sur $]-\infty,+\infty[$ et $\lim_{|x|\to+\infty}f(x)=1$
d'après le théorème de Rolle appliqué à f sur $]-\infty,+\infty[$: $\exists$ au moins $c\in\,]-\infty,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$
On a : $f'(c)=0\Leftrightarrow 1-c^2=0\Leftrightarrow c=\mp1$ donc les points $c_1=-1$ et $c_2=1$ vérifient le théorème de Rolle appliqué à f sur $]-\infty,+\infty[$

Exercice : Déterminer a pour que le théorème de Rolle s'applique à $f(x)=e^{ax^2+x}$ sur $]-\infty,+\infty[$
Puis, en déduire le(s) point(s) vérifiant le théorème.

Théorème des accroissements finis :

$$\begin{cases} f \text{ est définie et continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\end{cases} \Rightarrow \exists \text{ au moins } c\in\,]a,b[\text{ tel que } f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

Preuve : On pose $g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

g est définie et continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$: $g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *et*

$$g(a)=f(a)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=0 \quad et \quad g(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=0$$

D'après le théorème de Rolle, $\exists$ au moins $c\in\,]a,b[$ tel que $g'(c)=0$

$$g'(c)=0\Leftrightarrow f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\Leftrightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

Remarque : $c\in\,]a,b[\Rightarrow a<c<b\Rightarrow 0<c-a<b-a\Rightarrow 0<\frac{c-a}{b-a}<1$

On pose, $\theta=\frac{c-a}{b-a}$ *donc* $\theta\in\,]0,1[$

De plus, on pose $b-a=h\Rightarrow b=a+h$ d'où, $\theta=\frac{c-a}{h}\Leftrightarrow c=a+\theta h$

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)\quad\Rightarrow\quad f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h$$

En posant, $a=x$ on écrit $f(x+h)-f(x)=f'(x+\theta h)h$

Pour une valeur particulière, $x=x_0$ on écrit $f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0+\theta h)h$

Exemples :

1) Soit $f(x)=\ln(1+x^2)$ sur $[0,1]$, f définie et continue sur [0,1] et f dérivable sur]0,1[.
Donc, on peut appliquer le théorème des accroissements finis à f sur [0,1]
$\exists c\in\,]0,1[$ tel que $f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$. Or $f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

$$f'(c)=\ln(2)\Leftrightarrow\frac{2c}{1+c^2}=\ln(2)\Leftrightarrow \ln(2)c^2-2c+\ln(2)=0$$

2) Soit $f(x)=1/x$ sur $[a,b]\subseteq\mathbb{R}_+^*$. Donner la formule des accroissements finis introduisant $\theta(h)\in\,]0,1[$ puis déterminer $\lim_{h\to0}\theta(h)=?$
f est définie et continue sur $[a,b]$, $a\neq 0$ et f est dérivable sur $]a,b[$: $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$

$\exists\theta\in\,]0,1[$ tel que $f'(a+\theta h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$$f'(a+\theta h)=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{-1}{a(a+h)}\Leftrightarrow\frac{-1}{(a+\theta h)^2}=\frac{-1}{a(a+h)}\Leftrightarrow(a+\theta h)^2=a(a+h)$$

$$(a+\theta h)^2=a(a+h)\Leftrightarrow a+\theta h=\sqrt{a(a+h)}\Leftrightarrow\theta=\frac{\sqrt{a(a+h)}-a}{h}$$

Ainsi, $\theta(h)=\frac{\sqrt{a(a+h)}-a}{h}$ *et* $\lim_{h\to0}\theta(h)=\frac{0}{0}(FI)$

$$\lim_{h\to0}\theta(h)=\lim_{h\to0}\frac{\left(\sqrt{a(a+h)}-a\right)\left(\sqrt{a(a+h)}+a\right)}{h\left(\sqrt{a(a+h)}+a\right)}=\lim_{h\to0}\frac{a}{\sqrt{a(a+h)}+a}=\lim_{h\to0}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{h}{a}}+1}=\frac{1}{2}$$

Exercice :

En appliquant la formule des accroissements finis à $f(x)=\sqrt{1+x}$ *sur* $[0,a], a>0$

Montrer que $\frac{a}{2\sqrt{1+a}} < \sqrt{1+a}-1 < \frac{a}{2}$

f est définie et continue sur $[0,a]\subseteq[-1,+\infty[$ et *f* est dérivable sur $]0,a[$: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

$\exists c\in\,]0,a[$ tel que $f'(c)=\frac{f(a)-f(0)}{a}$

$$f'(c)=\frac{\sqrt{1+a}-1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+c}}=\frac{\sqrt{1+a}-1}{a}\Leftrightarrow \frac{a}{2\sqrt{1+c}}=\sqrt{1+a}-1$$

On a

$$0<c<a\Rightarrow 1<1+c<1+a \Rightarrow 2<2\sqrt{1+c}<2\sqrt{1+a}\Rightarrow \frac{a}{2\sqrt{1+a}}<\frac{a}{2\sqrt{1+c}}<\frac{a}{2}, \qquad (a>0)$$

D'où, $\frac{a}{2\sqrt{1+a}} < \sqrt{1+a}-1 < \frac{a}{2}$

Théorème : **(Inégalité des accroissements finis)** Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I telle que $\exists m,M\in\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x\in I \quad m\le f'(x)\le M$

Alors,

$\forall a,b\in I \quad a\le b$ on a $m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$

Application du théorème des accroissements finis :

Théorème :

$$\begin{cases} f \text{ est définie et continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ \lim_{x\to a^+} f'(x)=l_1\in\mathbb{R},\ \lim_{x\to b^-} f'(x)=l_2\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow\quad f'_d(a)=l_1,\quad f'_g(b)=l_2$$

Exemple :

$$f(x)=\frac{x-1}{|x|+1}\quad sur[-1,1] \qquad f(x)=\begin{cases} -1 & -1\le x\le 0 \\ \frac{x-1}{x+1} & 0\le x\le 1\end{cases} \quad et \quad f'(x)=\begin{cases} 0 & -1<x<0 \\ \frac{2}{(x+1)^2} & 0<x<1\end{cases}$$

f est définie et continue sur [-1,0]

f est dérivable sur]-1,0[: $f'(x)=0$

$\lim_{x\to-1^+} f'(x)=\lim_{x\to-1^+} 0 = 0 \Rightarrow f_d'(-1)=0$

f est définie et continue sur [0,1]

f est dérivable sur]0,1[: $f'(x)=\frac{-2}{(1+x)^2}$

$\lim_{x\to1^-} f'(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{2}{(1+x)^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow f_g'(1)=\frac{1}{2}$

Remarque : La réciproque est fausse. Soit la fonction :

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$$

$x\neq0,\quad f'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right).$ f' n'admet pas de limite au point 0. Cependant,

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$

Ainsi, $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=l \nRightarrow \lim_{x\to x_0} f'(x)=l$

Formule généralisée des accroissements finis :

Théorème :

$$\begin{cases} f,g \text{ sont définies et continues sur } [a,b] \\ f,g \text{ sont dérivables sur }]a,b[\\ g'(x)\neq0 \quad \forall x\in\,]a,b[\end{cases} \Rightarrow \exists c\in\,]a,b[\text{ tel que } \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\Rightarrow \exists\theta\in\,]0,1[\text{ tel que } \frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}$$

Exemple :

Formule généralisée des accroissements finis appliquée à *f* et *g* sur [0,1] avec,

$$f(x)=e^x \quad et \quad g(x)=\ln(1+x)$$

f et *g* sont définies et continues sur [0,1] et dérivables sur]0,1[

$$f'(x)=e^x \quad et \quad g'(x)=\frac{1}{1+x} \qquad avec \quad g'(x)\neq0 \qquad sur \quad]0,1[$$

$\exists$ au moins $c\in\,]0,1[$ tel que $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}\Leftrightarrow\frac{e^c}{\frac{1}{1+c}}=\frac{e-e^0}{\ln(2)}\Leftrightarrow(1+c)e^c=\frac{e-1}{\ln(2)}$$

Le point $c\in\,]0,1[$ vérifiant le théorème généralisé des accroissements finis appliqué à *f* et *g* sur [0,1] est solution de l'équation $\ln(2)(1+c)e^c=e-1$

Règle de l'Hospital : Application de la formule généralisée des accroissements finis à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ *ou* $\frac{\infty}{\infty}$

Théorème :

$$\begin{cases} f,g \text{ sont définies et continues au } V(a) \\ f,g \text{ sont dérivables au } V(a) \text{ (sauf peut être en a)} \\ \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\alpha \quad (\alpha=0 \ ou\ \alpha=\infty) \\ g(x)\neq0,\quad g'(x)\neq0 \quad \forall x\in V(a)\end{cases} \Rightarrow \left(\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\Rightarrow\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l\right)$$

Remarque :

Si *f'/g'* donne encore Forme Indeterminée; passez à *f''/g''*, $f^{(3)}/g^{(3)}/\ldots$, si ces dérivées vérifient les conditions susmentionnées de la règle de l'Hospital à chaque fois qu'on trouve la FI

Exemple 1 : $\lim_{x\to1}\frac{x\ln(x)-x+1}{(x-1)\ln(x)}=\frac{0}{0}(FI)$ Appliquons la règle de l'Hospital à *f* et *g*

On pose, $f(x)=x\ln(x)-x+1$ et $g(x)=(x-1)\ln(x)$. *f* et *g* définies et continues au voisinage de 1

$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{\ln(x)+\frac{x-1}{x}}=\frac{0}{0}(FI)$ Donc *f* et *g* sont dérivables au voisinage de 1.

$f'(x)=\ln(x)$ *et* $g'(x)=\ln(x)+\frac{x-1}{x}.$ Appliquons une autre fois la règle de l'Hospital à *f'* et *g'*

f' et g' définies, continues et dérivables au voisinage de 1. $f''(x)=1/x$ *et* $g''(x)=1/x+1/x^2$

$$\lim_{x\to1}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{2}$$

Exemple 2 :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\frac{\infty}{\infty}(FI) \qquad et \qquad \lim_{x\to0^+}x^2\ln(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}(FI)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0^+ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0^+$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x^2}{2}=0^- \Rightarrow \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}x^2\ln(x)=0^-$$

Remarque : La réciproque de la règle de l'Hospital est fausse : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l \not\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$

Exemple :

$$f(x)=\begin{cases}x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases} \quad et \quad g(x)=\sin x$$

Chapitre III

On introduit dans ce chapitre un outil essentiel en analyse à savoir les développements limités. Il permet, entre autres, de faire l'étude locale des fonctions au voisinage d'un nombre fini ou infini.

On donne et justifie les principales techniques de calcul de développements limités.

Formule de Taylor :

Formule de Taylor -Lagrange à l'ordre n : Soit $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq b$

$$\begin{cases}f \text{ est de classe } C^n \text{ sur } [a,b]\\ f^{(n+1)} \text{ existe et définie sur }]a,b[\end{cases} \Rightarrow \exists \text{ au moins } c\in\,]a,b[\text{ tel que}$$

$$f(b)=\underbrace{\sum_{p=0}^{n}f^{(p)}(a)\frac{(b-a)^p}{p!}}_{\text{Partie régulièree à l'ordre n}}+\underbrace{f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}}_{\text{Reste de Lagrange d'ordre n}}$$

ou encore

$$f(b)=f(a)+f'(a)\frac{b-a}{1!}+f^{(2)}(a)\frac{(b-a)^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!}+f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Egalité qu'on peut l'écrire, en posant, $b=a+h,\quad c=a+\theta h,\quad \theta\in\,]0,1[$:

$$\begin{aligned}f(a+h)&=\sum_{p=0}^{n}f^{(p)}(a)\frac{h^p}{p!}+f^{(n+1)}(a+\theta h)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\\&=f(a)+f'(a)\frac{h}{1!}+f''(a)\frac{h^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!}+f^{(n+1)}(a+\theta h)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

Remarques :

- ✓ Formule valable pour tout $x_0\in[a,b]$ et tout $x=x_0+h\in[a,b]$: $\exists\theta\in\,]0,1[$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\frac{x-x_0}{1!}+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}+f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

- ✓ En posant $x_0=0$ on trouve la formule de Mac-Laurin avec le reste de Lagrange à l'ordre n :

$$f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+f^{(n+1)}(\theta x)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \theta\in\,]0,1[$$

- ✓ Pour $n=0$, c'est la formule des accroissements finis.

Exemple : Écrire le développement de la fonction $f(x)=\ln(x)$ suivant les puissances entières de $(x-1)$ en s'arrêtant au terme contenant $(x-1)^3$

f est bien définie, continue et infiniment dérivable sur $[1,x]$ et les dérivées successives sont continues sur $[1,x]$. On applique donc la formule de Taylor avec le reste de Lagrange à cette fonction. $\exists\theta\in\,]0,1[$ tel que :

$$f(x)=f(1)+f'(1)\frac{x-1}{1!}+f''(1)\frac{(x-1)^2}{2!}+f^{(3)}(1+\theta(x-1))\frac{(x-1)^3}{3!}$$

Or, $f'(x)=\frac{1}{x},\quad f''(x)=\frac{-1}{x^2},\quad f^{(3)}(x)=\frac{-2}{x^3},\quad f(1)=0,\quad f'(1)=1,\quad f''(1)=-1$

D'où $f(x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{3(1+\theta(x-1))^3}(x-1)^3 \qquad \theta\in\,]0,1[$

MQ I :Mathématiques I

Formule de Taylor-Young à l'ordre n :

f est de classe C^n sur un intervalle ouvert I. Soients $a, x \in I$

$$f(x)=\sum_{p=0}^{n} f^{(p)}(a)\frac{(x-a)^p}{p!}+(x-a)^n\varepsilon(x) \qquad avec \quad \lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$$

Egalité qu'on peut l'écrire, en posant, $x=a+h$,

$$f(a+h) \;=\sum_{p=0}^{n} f^{(p)}(a)\frac{h^p}{p!}+\underbrace{h^n\varepsilon(h)}_{\text{Reste de YOUNG}}$$

$$=f(a)+f'(a)\frac{h}{1!}+f''(a)\frac{h^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!}+h^n\varepsilon(h) \quad avec \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$$

On a l'égalité $u(h)\underset{0}{=}o(h^n)$ *si* $\lim_{h\to 0}\frac{u(h)}{h^n}=0.$ Notons que : $o(h^{m+n})=h^m o(h^n)$

Aussi, Le reste de Young se note $h^n\varepsilon(h)=o(h^n)$ (Notation de Landau). Ainsi,

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)\frac{h}{1!}+f''(a)\frac{h^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!}+o(h^n)$$

Remarques : A l'ordre 1, la formule s'écrit :

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+h\varepsilon(h) \qquad avec \qquad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$$

C'est-à-dire, f a pour dérivée $f'(a)$ en a.

Pour a=0 on obtient la formule de Mac-Laurin avec reste de Young à l'ordre n :

$$f(x)=\sum_{p=0}^{n} f^{(p)}(0)\frac{x^p}{p!}+o(x^n)$$

MQ I :Mathématiques I

Exemples : Application de la Formule de Mac-Laurin avec reste de Young,

1) à l'ordre n, à $f(x)=e^x$. On a f est infiniment dérivable sur R (f est de classe C^∞ sur **R**)

$$f^{(k)}(x)=e^x \qquad \forall k\in \mathbf{N} \qquad Ainsi, \qquad f^{(k)}(0)=1 \qquad \forall k\in\mathbf{N}$$

$$f(x)=\sum_{p=0}^{n} f^{(p)}(0)\frac{x^p}{p!}+x^n\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0 \text{ ou encore } f(x)=\sum_{p=0}^{n} f^{(p)}(0)\frac{x^p}{p!}+o(x^n)$$

$$\boxed{e^x=\sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}+o(x^n)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)}$$

2) à l'ordre n, à $f(x)=e^{-x}$. On change x par $-x$ dans le DL de e^x puisque quand $x\to 0, -x\to 0$

$$\boxed{e^{-x}=\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p x^p}{p!}+o(x^n)=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+o(x^n)}$$

3) à l'ordre n, à $f(x)=a^x=e^{x\ln(a)}, a>0.$ On remplace x par $x\ln(a)$ dans le DL de e^x puisque quand $x\to 0, x\ln(a)\to 0$

$$e^{x\ln(a)}=\sum_{p=0}^{n}\frac{\ln^p(a)x^p}{p!}+o(x^n)=1+\frac{\ln(a)x}{1!}+\frac{\ln^2(a)x^2}{2!}+\frac{\ln^3(a)x^3}{3!}+\cdots+\frac{\ln^n(a)x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\boxed{a^x=\sum_{p=0}^{n}\frac{\ln^p(a)x^p}{p!}+o(x^n)=1+\frac{\ln(a)x}{1!}+\frac{\ln^2(a)x^2}{2!}+\frac{\ln^3(a)x^3}{3!}+\cdots+\frac{\ln^n(a)x^n}{n!}+o(x^n)}$$

MQ I :Mathématiques I

4) à l'ordre $2n+1$, à $f(x)=\cos(x)$. (f est de classe C^∞ sur **R**)

$$f^{(0)}(x)=f(x)=\cos(x), \quad f'(x)=-\sin(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right), \quad f''(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(k)}(x)=\cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right) \quad \forall k\in\mathbf{N} \quad \text{ainsi} \quad f^{(k)}(0)=\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^p & k=2p\\ 0 & k=2p+1\end{cases} \qquad \forall k\in\mathbf{N}$$

$$\boxed{\cos(x)=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}+o(x^{2n+1})=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)}$$

5) à l'ordre $2n+2$, à $f(x)=\sin(x)$ (f est de classe C^∞ sur **R**)

$$f^{(0)}(x)=f(x)=\sin(x), \quad f'(x)=\cos(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right), \quad f''(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x-2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(k)}(x)=\sin\left(x-k\frac{\pi}{2}\right) \quad \forall k\in\mathbf{N} \quad \text{ainsi} \quad f^{(k)}(0)=\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^p & k=2p+1\\ 0 & k=2p\end{cases} \qquad \forall k\in\mathbf{N}$$

$$\boxed{\sin(x)=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+o(x^{2n+2})=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})}$$

Remarques :

- La partie régulière de $\cos(x)$ est paire
- La partie régulière de $\sin(x)$ est impaire

MQ I :Mathématiques I

6) à l'ordre n à $f(x)=(1+x)^\alpha$, $\alpha\in\mathbf{R}$ On a f est de classe C^∞ sur $\left]-1,+\infty\right[$

$$\forall k\in\mathbf{N}^* \qquad \begin{array}{l} f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}\\ f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)\end{array}$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha=\sum_{p=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1)}{p!}x^p+o(x^n)=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)}$$

On pose $\alpha=\frac{1}{2}$ $\boxed{\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2.4}x^2+\cdots+(-1)^n\frac{1.3.5\cdots(2n-3)}{2.4.6\cdots(2n)}x^n+o(x^n)}$

On pose $\alpha=-1$ $\boxed{\frac{1}{1+x}=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p x^p+o(x^n)=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)}$

On pose $\alpha=-1$ et on change x en $-x$

$$\boxed{\frac{1}{1-x}=\sum_{p=0}^{n}x^p+o(x^n)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n)}$$

Exercice :

Calculer les développements suivant les puissances entières de x en s'arrêtant au terme x^6 des fonctions suivantes :

$$\sqrt{1-x}, \quad \sqrt{1+x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{1}{1-x^2} \quad et \quad \frac{1}{1+x^2}$$

MQ I :Mathématiques I

Développement limité polynomial au V(0) :

f est définie au *V*(0) sauf peut être en 0. Soit $n > 0$

Définition : *f* admet un Développement Limité d'ordre *n* au *V*(0) (de façon abrégée $DL_n(0)$) si :

$\exists P \in \mathbf{R}[X], \quad \deg(P) \le n$ et $\exists\, \varepsilon$ une application définie au *V*(0) sauf peut être en 0, $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x), \qquad P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad avec \quad a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$$

Cela peut s'écrire avec la notation de Landau : $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$

$x^n\varepsilon(x)$ est dite la partie régulière, principale ou polynomiale du développement limité à l'ordre *n*

$P(x)$ est la partie complémentaire ou le reste d'ordre *n* de ce développement limité

Exemples :

1) Soit $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_mx^m, \qquad (n < m)$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n\left(a_{n+1}x + \cdots + a_mx^{m-n}\right)$$

On pose, $\varepsilon(x) = a_{n+1}x + \cdots + a_mx^{m-n}$, *et* $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

Ainsi, *f* admet un DL_n au *V*(0) : $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x), \qquad \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

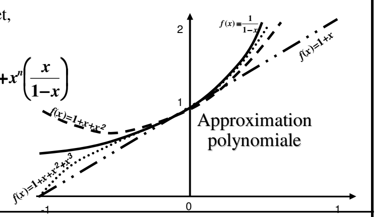
2) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ admet un DL_n au *V*(0). En effet,

$$1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n), \qquad x \ne 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

On pose : $\varepsilon(x) = \dfrac{x}{1-x}$ *et* $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

D'où,
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x)$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$



MQ I :Mathématiques I

Théorème : si *f* admet un DL_n au *V*(0) de partie régulière *P*, alors,

- La partie régulière du DL_n est unique
- *f* admet un DL_k au *V*(0) pour tout $0 \le k \le n$ dont la partie régulière est le Tronqué de *P* au degré *k* ($T_k[P]$)
- Si *f*(*x*) est paire alors la partie régulière du DL est paire
- Si *f*(*x*) est impaire alors la partie régulière du DL est impaire

Exemples :

1) Soit le DL_n au voisinage de 0, $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$

le DL_3 au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon_1(x), \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0\\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^3(x + x^2 + \cdots + x^{n-3} + x^{n-3}\varepsilon_1(x)), \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0\\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x), \qquad \varepsilon(x) = x + x^2 + \cdots + x^{n-3} + x^{n-3}\varepsilon_1(x), \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0\\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

2) La partie régulière du développement limité au *V*(0) de $x \mapsto \cos(x)$ ne contient que des puissances paires

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

3) La partie régulière du développement limité au *V*(0) de $x \mapsto \sin(x)$ ne contient que des puissances impaires

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

MQ I :Mathématiques I

Développement limité à droite et à gauche de 0 : *f* est définie au *V*(0) sauf peut être en 0.

Définitions :

f admet un DL_n à gauche de 0 si $\exists P \in \mathbf{R}[X], \quad \deg(P) \le n \quad \exists\, \eta > 0$ et $\exists\, \varepsilon$ une application définie sur $\left]-\eta, 0\right[$ $\qquad \forall x \in \left]-\eta, 0\right[\quad f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x) \quad \lim\limits_{x\to 0^-}\varepsilon(x) = 0$

f admet un DL_n à droite de 0 si $\exists P \in \mathbf{R}[X], \quad \deg(P) \le n \quad \exists\, \eta > 0$ et $\exists\, \varepsilon$ une application définie sur $\left]0, \eta\right[$ $\qquad \forall x \in \left]0, \eta\right[\quad f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x) \quad \lim\limits_{x\to 0^+}\varepsilon(x) = 0$

Exemple :

Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$ on a $f(x) = \begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & x \le 0\\[2mm] \dfrac{1}{1+x} & x \ge 0\end{cases}$

f admet un DL_n à gauche de 0 :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\left(\frac{x}{1-x}\right), \quad \varepsilon_1(x) = \frac{x}{1-x} \quad et \quad \lim_{x\to 0^-}\varepsilon_1(x) = 0$$

f admet un DL_n à droite de 0 :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + x^n\left(\frac{(-1)^{n+1}x}{1+x}\right), \quad \varepsilon_2(x) = \frac{(-1)^{n+1}x}{1+x} \quad et \quad \lim_{x\to 0^+}\varepsilon_2(x) = 0$$

Remarque :

Si *f* admet un DL(0) alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \in \mathbf{R}$

MQ I :Mathématiques I

Développement limité polynomial au $V(x_0)$:

Définition : *f* est définie au $V(x_0)$ (sauf peut être en x_0). *f* admet un DL_n au $V(x_0)$ si :

$$\exists P \in \mathbf{R}[X], \ \deg(P) \le n \ \text{ et } \ f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n\varepsilon(x) \ \text{ avec } \lim_{x\to x_0}\varepsilon(x) = 0$$

On écrira aussi :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right)$$

Remarque :

On peut se ramener du $V(x_0)$ au *V*(0) en posant $x = x_0 + h$. Ainsi, $h \to 0$ quand $x \to x_0$

$$\exists P \in \mathbf{R}[X], \ \deg(P) \le n \ \text{ et } \ f(x_0 + h) = P(h) + h^n\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$$

Exemple : Cherchons le DL_n de $f(x) = e^{x-1}$ au *V*(*1*)

On pose, $x = 1 + h$, quand $x \to 1$, $h \to 0$. Ainsi, $f(1 + h) = e^h$

Or
$$e^h = 1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots + \frac{h^n}{n!} + h^n\varepsilon(h) = 1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots + \frac{h^n}{n!} + o(h^n)$$

Puis on remplace *h* par *x* - 1,

$$e^{x-1} = 1 + \frac{x-1}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{n!} + o\left((x-1)^n\right)$$

N.B. :

On exprime toujours la partie régulière du $DL_n(x_0)$ suivant les puissances croissantes de (x-x_0) et non pas suivant celle de *x*

***Développement limité asymptotique au* $V(\infty)$:**

Définition : f est définie au $V(\infty)$, f admet un DL_n au $V(\infty)$ si :

$$\exists P \in \mathbb{R}[X] \quad \text{tels que} \quad \deg(P) \leq n \quad \text{et} \quad f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \lim_{|x| \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$$

Ou encore :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Remarque : On peut se ramener du $V(\infty)$ au $V(0)$ en posant $x = \frac{1}{h}$ Ainsi, $h \to 0$ quand $|x| \to +\infty$

$$\exists P \in \mathbb{R}[X] \quad \text{tels que} \quad \deg(P) \leq n \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{h}\right) = P(h) + h^n \varepsilon(h) \quad \text{avec} \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Exemple : Donner le DL_n de $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ au $V(\infty)$

On pose $x = \frac{1}{h}$, quand $|x| \to +\infty$, $h \to 0$. Ainsi, $f\left(\frac{1}{h}\right) = e^h$

Or $e^h = 1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots + \frac{h^n}{n!} + o(h^n)$ Puis on remplace h par $\frac{1}{x}$

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!\,x^2} + \frac{1}{3!\,x^3} + \cdots + \frac{1}{n!\,x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Comme on peut toujours se ramener du $V(x_0)$ ou du $V(\infty)$ au $V(0)$, toutes les propriétés du DL_n au $V(0)$ se généralisent au DL_n au $V(x_0)$ et au $V(\infty)$

Calcul du DL_n au $V(0)$: Les précieuses formules de Taylor et de Mac-Laurin avec reste de Young sont les outils privilégiés pour calculer le DL d'une fonction en un point. On se ramène au $V(0)$

$$f(x) = f(0) + \sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) + x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

NB. En général, un développement limité n'est pas toujours donné par la formule de Taylor-Young

Opérations sur les développements limités au V(0) :

f et g admettent des DL_n au V(0) :

$$\exists F \in \mathbb{R}[X] \quad \text{tels que} \quad \deg(F) \leq n \quad \text{et} \quad f(x) = F(x) + x^n \varepsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$\exists G \in \mathbb{R}[X] \quad \text{tels que} \quad \deg(G) \leq n \quad \text{et} \quad g(x) = G(x) + x^n \varepsilon_2(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

Somme des DL :

$f+g$ admet un DL_n au V(0) :

$$\exists P = F + G \in \mathbb{R}[X], \quad \deg(P) \leq n \quad \text{et} \quad (f+g)(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

En effet :

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= F(x) + x^n \varepsilon_1(x) + G(x) + x^n \varepsilon_2(x) \\ &= (F(x) + G(x)) + x^n (\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))\end{aligned}$$

Il suffit de poser : $P = F + G \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P) \leq n$, $\varepsilon(x) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(x)$ *et* $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

Exemple : Calculer les développements limités de $(e^x + e^{-x})$ *et* $(e^x - e^{-x})$ au V(0) :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad \text{et} \quad e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$e^x + e^{-x} = 2 + 2\frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^4}{4!} + \cdots + 2\frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$e^x - e^{-x} = 2\frac{x}{1!} + 2\frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^5}{5!} + \cdots + 2\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) \qquad \text{avec} \quad 2p+1 \leq n$$

Généralisation de la somme :

Si au V(0), f admet un DL_n et g admet un DL_m alors,

$f+g$ admet un DL_p au V(0) avec $p \leq \inf\{n, m\}$

Exemple : Soient,

$$f(x) = x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{5}x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$$

Calculons DL_2 au V(0) de $f+g$. On a, $2 \leq \inf\{3,4\}$

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= \left(x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{5}x^3 + o(x^3)\right) + \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)\right) \\ &= x + \frac{1}{3}x^2 + 1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2) \\ &= 1 + x + o(x^2)\end{aligned}$$

Multiplication par un scalaire :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, (λf) définie au V(0) et admet un DL_n au V(0),

$$\exists P = \lambda F \in \mathbb{R}[X], \quad \deg(P) \leq n \quad \text{et} \quad (\lambda f)(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

en effet :

$$\begin{aligned}(\lambda f)(x) &= \lambda(f(x)) \\ &= \lambda(F(x) + x^n \varepsilon_1(x)) \\ &= (\lambda F(x)) + x^n (\lambda \varepsilon_1(x))\end{aligned}$$

Il suffit de poser :

$$P = \lambda F \in \mathbb{R}[X], \quad \deg(P) \leq n \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) = \lambda \varepsilon_1(x)$$

Exemple : Calculer les développements limités de $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ *et* $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(2 + 2\frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^4}{4!} + \cdots + 2\frac{x^{2p}}{(2p)!}\right) + o(x^{2p+1}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(2\frac{x}{1!} + 2\frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^5}{5!} + \cdots + 2\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\right) + o(x^{2p+2}) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$$

Remarque :

Soient f_i des fonctions admettant des DL de parties régulières respectives P_i. Toute combinaison linéaire de f_i admet un DL de partie régulière une combinaison linéaire des P_i

Produit :

$f \times g$ admet un DL_n au V(0),

$\exists P = T_n[(FG)(x)] \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P) \le n$ et $(f \times g)(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

en effet :

$$\begin{aligned}(f \times g)(x) &= f(x)g(x)\\ &= \big(F(x) + x^n\varepsilon_1(x)\big)\times\big(G(x) + x^n\varepsilon_2(x)\big)\\ &= (FG)(x) + x^n\big(F(x)\varepsilon_2(x) + G(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\big)\end{aligned}$$

Or $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G) \le 2n$. Posons $\deg(FG) = m$

$$\begin{aligned}(FG)(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots + a_mx^m \qquad \textit{avec } m \le 2n\\ &= (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + x^n(a_{n+1}x + a_{n+2}x^2 + \cdots + a_mx^{m-n})\\ &= P(x) + x^nR(x) \qquad \deg(P) \le n, val(R) \ge 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \times g)(x) &= (FG)(x) + x^n\big(F(x)\varepsilon_2(x) + G(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\big)\\ &= P(x) + x^n\big(R(x) + F(x)\varepsilon_2(x) + G(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\big)\end{aligned}$$

Il suffit de poser :

$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = T_n[(FG)(x)]$, $P(x)$ est le Tronqué au degré n de $(FG)(x)$,

$\deg(P) \le n$, $\varepsilon(x) = R(x) + F(x)\varepsilon_2(x) + G(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

Exemples :

1) Développement limité de $e^x\sin(x)$ à l'ordre 4,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \qquad et \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\begin{aligned}e^x\sin(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\\ &= x - \frac{x^3}{6} + x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\\ &= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\end{aligned}$$

2) Développement limité de $\sin^3(x)$ à l'ordre 6,

$$\sin^3(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 = T_6\left[\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3\right] + o(x^6)$$

Il est très utile de mettre des puissances de x en facteur tout en sachant que, $o(x^{n+m}) = x^m o(x^n)$

$$\sin^3(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 = x^3\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^3 = x^3\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^3 + o(x^6) = x^3\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^6) = x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^6)$$

Généralisation du produit :

Si f admet un DL_n au V(0), et si g admet un DL_m au V(0)

$$f(x) = a_px^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_nx^n + o(x^n) \qquad p \ge 0$$

$$g(x) = b_qx^q + b_{q+1}x^{q+1} + \cdots + b_mx^m + o(x^m) \qquad q \ge 0$$

Au V(0), pour calculer DL_k $(k \le \inf\{n, m\})$ de $f \times g$ il suffit de calculer DL_{k-q} de f et DL_{k-p} de g

Exemples :

1) $f(x) = x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ *et* $g(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$

Calculons DL_2 $(2 \le \inf\{3, 4\})$ au V(0) de $f \times g$

$$f(x)\times g(x) = \left(x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right)\times\big(1 - x + o(x)\big) = x - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)$$

2) Calculer le DL_8 au V(0) de $f(x) = (\sin(x) - x)\ln(1 + x)$

DL_{8-1} (0) $\quad (\sin(x) - x) = -\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(x^7)$

DL_{8-3} (0) $\quad \ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)$

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(-\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(x^7)\right)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)\right)\\ &= -\frac{1}{3!}x^4 + \left(\frac{1}{3!2}\right)x^5 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{3!3}\right)x^6 + \left(\frac{1}{3!4} - \frac{1}{5!2}\right)x^7 + \left(\frac{1}{5!3} - \frac{1}{3!5} - \frac{1}{7!}\right)x^8 + o(x^8)\end{aligned}$$

Quotient : Supposons que $val(G) = 0$ $(i.e., G(0) \ne 0)$. $\frac{f}{g}$ admet un DL_n au V(0)

$\exists P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg(P) \le n$ et $\frac{f}{g}(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

où $P(x)$ est le quotient de la division suivant les puissances croissantes de $F(x)$ par $G(x)$ à l'ordre n, en effet :

$$\exists! Q, R \in \mathbb{R}[X] \qquad F(x) = G(x)P(x) + x^{n+1}R(x) \quad avec \quad \deg(P) \le n$$

$$F(x) = f(x) - x^n\varepsilon_1(x) \qquad et \qquad G(x) = g(x) - x^n\varepsilon_2(x)$$

Or

$$\begin{aligned}F(x) = G(x)P(x) + x^{n+1}R(x) &\Rightarrow f(x) - x^n\varepsilon_1(x) = \big(g(x) - x^n\varepsilon_2(x)\big)P(x) + x^{n+1}R(x)\\ &\Rightarrow f(x) = g(x)P(x) + x^n\big(xR(x) + \varepsilon_1(x) - P(x)\varepsilon_2(x)\big)\\ &\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = P(x) + x^n\left(\frac{xR(x) + \varepsilon_1(x) - P(x)\varepsilon_2(x)}{g(x)}\right)\end{aligned}$$

Il suffit de poser : $\varepsilon(x) = \dfrac{xR(x) + \varepsilon_1(x) - P(x)\varepsilon_2(x)}{g(x)}$ *avec* $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

D'où, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = P(x) + x^n\varepsilon(x)$ *avec* $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

Exemple :

Calculer le DL_3 au V(0) de $\tan(x)$. On sait que $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\quad et \quad \cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\quad avec \quad \cos(0)=1\neq 0$$

Division suivant les puissances croissantes de $\sin(x)$ par $\cos(x)$ à l'ordre 3 :

$$\begin{array}{rr|l} x & -\frac{x^3}{6} & 1-\frac{x^2}{2} \\ \cline{3-3} -x & +\frac{x^3}{2} & x+\frac{x^3}{3} \\ \cline{1-2} & \frac{x^3}{3} & \\ & -\frac{x^3}{3}\quad +\frac{x^5}{6} & \\ \cline{2-2} & \frac{x^5}{6} & \end{array}$$

Donc, $x-\dfrac{x^3}{6}=\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)+x^3\left(\dfrac{x^2}{6}\right)$

Ainsi, $\tan(x)=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$

Exercice :

Calculer DL_4 au voisinage de 0 de la fonction :

$$f(x)=\ln\left(\frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\right)$$

Composition (substitution) : Supposons que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0\ (i.e., G(0)=0)$ alors $f\circ g$ admet un DL_n au V(0) :

$\exists P\in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg(P)\leq n$ et $(f\circ g)(x)=P(x)+x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$

$P(x)=T_n[F(G(x))]\in \mathbb{R}[X]$, $P(x)$ est le Tronqué au degré n de $F(G(x))$

Exemple : Calculer le DL_3 au V(0) de $e^{\cos(x)}$ On pose, $f(x)=e^x$ et $g(x)=\cos(x)$

DL_3 au V(0) de $g(x)=\cos(x)$ $\quad u=\cos(x)=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$

DL_3 au V(0) de $f(u)=e^u$: $\quad e^u=1+\dfrac{u}{1!}+\dfrac{u^2}{2!}+\dfrac{u^3}{3!}+o(u^3)$

L'écriture suivante : $e^{\cos(x)}=1+\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)^2+\dfrac{1}{6}\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)^3+o(x^3)$

est <u>fausse</u> car $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1\neq 0$

Cependant, on peut écrire, $e^{\cos(x)}=e^{\cos(x)-1+1}=e\times e^{\cos(x)-1}$ et on pose,

$f(x)=e^x$ et $g(x)=\cos(x)-1$ avec $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$

DL_3 au V(0) de $g(x)=\cos(x)-1$ $\quad u=\cos(x)-1=-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$

Ainsi,

$$e^{\cos(x)}=e\times e^{\cos(x)-1}=e\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)=e-\frac{e}{2}x^2+o(x^3)$$

Généralisation de la composition :

Si f admet un DL au V(0), et si *g* admet un DL au V(0) avec,

$$f(x)=a_0+a_px^p+a_{p+1}x^{p+1}+\cdots$$

$$g(x)=b_qx^q+b_{q+1}x^{q+1}+\cdots \qquad q\geq 1$$

$$(f\circ g)(x)=a_0+a_pg^p(x)+a_{p+1}g^{p+1}(x)+\cdots$$

au V(0), pour calculer DL_k de $f\circ g$ il suffit de calculer DL_n de *f* avec $n=E\left[\dfrac{k}{q}\right]$ $(i.e., qn\leq k<q(n+1))$ et DL_k de *g*

Exemple :

Calculons DL_6 au V(0) de $h(x)=\ln(1+x-\sin(x))$

On pose $u=x-\sin(x)=\dfrac{1}{3!}x^3-\dfrac{1}{5!}x^5+o(x^6)$ et $\ln(1+u)=u-\dfrac{1}{2!}u^2+o(u^2)$

$$u^2=\left(\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{120}x^5\right)^2+o(x^6)=\frac{1}{36}x^6\left(1-\frac{1}{20}x^2\right)^2+o(x^6)=\frac{1}{36}x^6+o(x^6)$$

D'où,

$$\ln(1+x-\sin(x))=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{2}\frac{1}{36}x^6+o(x^6)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{72}x^6+o(x^6)$$

Exercice :

Calculer DL_2 au V(0) de $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln(\cos(\sqrt{x}))$

Dérivation : On suppose que *f* <u>est de classe</u> C^{n+1} au V(0)

f admet un DL_{n+1} au V(0) :

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+x^{n+1}\varepsilon_1(x)\quad avec \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0$$

f' admet un DL_n au V(0)

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+(n+1)a_{n+1}x^n+x^n\varepsilon_2(x)\quad avec \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x)=0$$

Exemple :

Calculer le DL_6 au V(0) de $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

On sait que : $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+o(x^7)$

Par dérivation,

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+o(x^6)$$

Remarque :

En général, même si *f* est dérivable, on ne peut pas dériver un DL.

$f(x)=x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ admet un $DL_1(0)$ cependant $f'(x)=2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet pas de DL à aucun ordre puisque $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ n'existe pas.

Primitive :

$\tilde{f}$ admet un DL_n au V(0) : $\tilde{f}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$

Si f est une primitive de $\tilde{f}$ sur un V(0) $(f' = \tilde{f})$, alors f admet un DL_{n+1} au V(0),

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + x^{n+1} \varepsilon_2(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

Exemples :

1) Calculer le DL_7 au V(0) de $f(x) = \ln(1+x)$. On sait que : $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$

Or, le DL_6 au V(0) de $\frac{1}{1+x}$ est : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + o(x^6)$

Par intégration, $f(x) = \ln(1+x) = f(0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + o(x^7)$

Or $f(0) = \ln(1+0) = 0$ donc, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + o(x^7)$

2) Calculer le DL_6 au V(0) de $f(x) = \arcsin(x)$. On sait que : $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Or, le DL_5 au V(0) de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est : $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} x^4 + o(x^5)$

Par intégration, $f(x) = \arcsin(x) = f(0) + x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + o(x^6)$

Or $\arcsin(0) = 0$ donc, $\arcsin(x) = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + o(x^6)$

3) Calculer le DL_8 au V(0) de $f(x) = \arctan(x)$. On sait que $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

Or, le DL_7 au V(0) de $\frac{1}{1+x^2}$ est : $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^7)$

Par intégration, $f(x) = \arctan(x) = f(0) + x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + o(x^8)$

Or $\arctan(0) = 0$ donc, $\arctan(x) = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + o(x^8)$

Remarque importante :

Supposons que f admet un DL_n au V(0), i.e.,

$\exists P \in \mathbf{R}[X]$ tels que $\deg(P) \leq n$ et $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

$P(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^n$ *avec* $a_p, a_{p+1}, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} P(x) + x^n \varepsilon(x) = \lim_{x \to 0} \left(a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)\right) = \begin{cases} a_0 & p = 0 \\ 0 & p \neq 0 \end{cases}$$

Donc, si f admet un DL_n au V(0), alors $\lim_{x \to 0} f(x) \in \mathbf{R}$

Par contraposé, si $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$ alors f n'admet pas de DL_n au V(0).

Exemple :

Soit $f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x}\right)$. $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ donc, f n'admet pas de DL au V(0) mais en fait, f admet un développement limité généralisé au V(0).

Développement limité généralisé au V(0) :

Définition : f est définie au $V(0)$ (sauf peut être en 0) et f n'admet pas de développement limité au $V(0)$. (f non bornée) Cependant si $\exists p \in \mathbf{N}^*$ tel que $x^p f(x)$ admet un DL_n au $V(0)$ avec $p < n$ alors, on dit que f admet un (DLG_{n-p}) Développement Limité Généralisé à l'ordre $(n - p)$ au $V(0)$. En effet, $x^p f(x)$ admet un DL_n au $V(0)$:

$$x^p f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \quad \textit{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{x^p}\left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^n\right) + x^{n-p} \varepsilon(x)$$

$$f(x) = \left(a_0 x^{-p} + a_1 x^{1-p} + \cdots + a_p + a_{p+1} x + \cdots + a_n x^{n-p}\right) + x^{n-p} \varepsilon(x)$$

Exemple :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x^3}$$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2 + x^3} = \infty$ donc, f n'admet pas de DL au $V(0)$. Cependant, on remarque que :

$x^2 f(x) = \frac{1}{1+x}$ admet un DL_n au $V(0)$: $x^2 f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^{n-2} + x^{n-2} \varepsilon(x)$$

Donc, f admet un DLG_{n-2} au $V(0)$.

Exercice : Calculer DLG_2 au $V(\infty)$ de $f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}$

Calculer DLG_2 au $V(\infty)$ de $f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}$

On pose $x = \frac{1}{h}$, *quand* $x \to \infty, h \to 0$. $f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\frac{1}{h^2}}{\frac{1}{h}+1} e^h = \frac{1}{h^2}\left(\frac{h}{1+h}\right) e^h = \frac{1}{h}\left[\left(\frac{1}{1+h}\right) e^h\right]$

$p = 1$, $n = 1 + 2 = 3$. Calculons DL_3 au $V(0)$ de $\frac{1}{h+1} e^h$:

Calculons DL_3 au $V(0)$ de $\frac{1}{h+1} = 1 - h + h^2 - h^3 + o(h^3)$

Calculons DL_3 au $V(0)$ de $e^h = 1 + h + \frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{6} h^3 + o(h^3)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h+1} e^h &= \left(1 - h + h^2 - h^3 + o(h^3)\right)\left(1 + h + \frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{6} h^3 + o(h^3)\right) \\ &= 1 + h + \frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{6} h^3 - h - h^2 - \frac{1}{2} h^3 + h^2 + h^3 - h^3 + o(h^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{3} h^3 + o(h^3) \end{aligned}$$

Ainsi, $f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{1}{h}\left(1 + \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{3} h^3 + o(h^3)\right) = \frac{1}{h} + \frac{1}{2} h - \frac{1}{3} h^2 + o(h^2)$

On remplace $\frac{1}{h}$ par x :

$$f(x) = x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Développements limités usuels au voisinage de 0

$$o(x^k) = x^k\varepsilon(x) \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

$$e^x = \sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!} + o(x^n) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$e^{-x} = \sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p x^p}{p!} + o(x^n) = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$a^x = \sum_{p=0}^{n}\frac{\ln^p(a)\,x^p}{p!} + o(x^n) = 1 + \frac{\ln(a)\,x}{1!} + \frac{\ln^2(a)\,x^2}{2!} + \frac{\ln^3(a)\,x^3}{3!} + \cdots + \frac{\ln^n(a)\,x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cosh(x) = \sum_{p=0}^{n}\frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2n+1}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sinh(x) = \sum_{p=0}^{n}\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2n+2}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{5!} + o(x^6)$$

$$\cos(x) = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\sin(x) = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + o(x^{10})$$

Développements limités usuels au voisinage de 0

$$o(x^k) = x^k\varepsilon(x) \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2.3}x^3 - \frac{1.3}{2.4.5}x^5 - \cdots - \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)(2n+1)}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\arcsin(x) = x + \sum_{p=1}^{n}\frac{1.3.5\cdots(2p-1)}{2.4.6\cdots(2p)(2p+1)}x^{2p+1} + o\left(x^{2n+2}\right) = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \cdots + \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)(2n+1)}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\arctan(x) = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{p=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1)}{p!}x^p + o(x^n) = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{p=0}^{n}(-1)^n x^p + o(x^n) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{p=0}^{n}x^p + o(x^n) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1}\frac{x^p}{p} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = \sum_{p=1}^{n}\frac{-x^p}{p} + o(x^n) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{p=2}^{n}(-1)^{p-1}\frac{1.3.5\cdots(2p-3)}{2.4.6\cdots(2p)}x^p + o(x^n) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1.3.5\cdots(2n-3)}{2.4.6\cdots(2n)}x^n + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \cdots + (-1)^n\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)}x^n + o\left(x^n\right)$$

Applications des développements limités :

Étude locale d'une fonction

- Recherche des équivalents
- Dérivabilité d'une fonction
- Calcul des dérivées successives d'une fonction en un point
- Extremums d'une fonction
- Position d'une courbe par rapport à sa tangente en un point
- Prolongement par continuité d'une fonction
- Calcul de limites
- Étude des branches infinies

Recherche des équivalents : Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, alors $g(x)$ est équivalent au premier terme de son développement limité en x_0. Supposons que f admet un DL_n au $V(x_0)$:

$$\exists a_i \in \mathbf{R}, i = 1,\cdots,n \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^n\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to x_0}\varepsilon(x) = 0$$

Si $\forall k = 0,1,\cdots,n \quad a_k = 0$ alors $f(x) \underset{x_0}{\approx} o\left((x-x_0)^n\right)$

Sinon, on pose $p = \min\left\{k \in \mathbf{N}^* / a_k \neq 0\right\} \quad 0 < p \leq n$ ainsi,

$$f(x) = a_0 + a_p(x-x_0)^p + a_{p+1}(x-x_0)^{p+1} + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to x_0}\varepsilon_1(x) = 0$$

$$g(x) = f(x) - a_0 = a_p(x-x_0)^p\left(1 + \frac{a_{p+1}}{a_p}(x-x_0) + \frac{a_{p+2}}{a_p}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{a_n}{a_p}(x-x_0)^{n-p}\right) + (x-x_0)^{n-p}\varepsilon_1(x)$$

Ce qui implique,

$$\frac{f(x)-a_0}{a_p(x-x_0)^p} = 1 + \frac{a_{p+1}}{a_p}(x-x_0) + \frac{a_{p+2}}{a_p}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{a_n}{a_p}(x-x_0)^{n-p} + (x-x_0)^{n-p}\varepsilon_1(x)$$

Et par suite, $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-a_0}{a_p(x-x_0)^p} = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) - a_0 \underset{x_0}{\approx} a_p(x-x_0)^p$

Exemples :

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad \Rightarrow \quad e^x - 1 \underset{0}{\approx} x$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \Rightarrow \quad \cos(x) - 1 \underset{0}{\approx} \frac{-x^2}{2}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \Rightarrow \quad \ln(1+x) \underset{0}{\approx} x$$

Prolongement par continuité d'une fonction :

Théorème : une fonction f se prolonge par continuité en x_0 ssi f admet un DL à l'ordre 0 en x_0

En effet :

$\Rightarrow$) f se prolonge par continuité en x_0, soit $\tilde{f}$ son prolongement $\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \tilde{f}(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \tilde{f}(x_0)$

$$\Rightarrow f(x) - \tilde{f}(x_0) = \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0) = \varepsilon(x) \quad avec \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

d'où $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x_0) + o(1) \Rightarrow \tilde{f}$ admet donc un $DL_0(0)$ qui coïncide avec celui de f

$\Leftarrow$) $f(x) = a_0 + o(1) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a_0$ Si $x_0 \in D_f$ alors on pose $f(x_0) = a_0$. Sinon, on prolonge f par continuité en x_0 en posant $\tilde{f}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Exemple : la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0. En effet,

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x + o(x)}{x} = 1 + o(1)$$

Or $0 \notin D_f$ donc, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

Et l'on pose

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Dérivabilité d'une fonction :

Théorème : une fonction f se prolonge par continuité en x_0 et dérivable en x_0 ssi elle admet un DL à l'ordre 1 en x_0

En effet : on suppose que $x_0 \in D_f$

$\Rightarrow$) f continue et dérivable en x_0 $\Rightarrow \exists l \in \mathbf{R}$ $\quad \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = l(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad avec \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

D'où $\quad f(x) = f(x_0) + l(x - x_0) + o(x - x_0)$

$\Leftarrow$) $\quad f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a_0$

on pose $f(x_0) = a_0$ et on remarque que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1 + o(1) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1$$

Donc, f est dérivable et $f'(x_0) = a_1$

Exemple :

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x + o(x^2)}{x} = 1 + 0x + o(x)$$

la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0. On pose $\lim\limits_{|x| \to +\infty} x^2 = +\infty$

et f est dérivable en 0 et on a

$$f'(0) = a_1 = 0$$

Calcul des dérivées successives d'une fonction en un point :

Supposons qu'une fonction f soit <u>n-fois dérivable</u> en x_0 et admet un $DL_n(x_0)$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

Alors, $\quad f^{(k)}(x_0) = k!a_k \qquad \forall k \in \mathbf{N}$

Remarque : Une fonction peut admettre un Développement Limité en un point à l'ordre $n \geq 2$ sans forcement être 2 fois dérivable en ce point.

Exemple : $f(x) = 1 + x^3 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

f admet un DL_2 au voisinage de 0 : $f(x) = 1 + x^2\left(x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = 1 + o(x^2)$ En effet, $\left|x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$

et par suite $\lim\limits_{x \to 0} x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

f est prolongeable par continuité en 0 : $f(0) = a_0 = 1$

f est dérivable en 0 : $f'(0) = a_1 = 0$

Cependant,

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{3x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

$$= 3x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

D'où, f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Extremum d'une fonction :

Supposons que f admet un DL_n en x_0 (n > 0).

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$$

On pose $f(x_0) = a_0$

Soit $p = \min\{k \in \mathbf{N}^* / \quad a_k \neq 0\}$

D'après la formule du DL :

$$f(x) - f(x_0) \underset{x_0}{\approx} a_p(x - x_0)^p$$

Ainsi, le signe de $f(x) - f(x_0)$ au voisinage de x_0 est celui de $a_p(x - x_0)^p$

f admet un extremum relatif en x_0 ssi p est pair.

- Si $a_p > 0$ alors $M_0(x_0, f(x_0))$ est un minimum relatif et f est convexe au voisinage de x_0
- Si $a_p < 0$ alors $M_0(x_0, f(x_0))$ est un maximum relatif et f est concave au voisinage de x_0

Position locale d'une courbe par rapport à sa tangente en un point :

Supposons que f admet un DL_n en x_0 (n > 1) :

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+o\big((x-x_0)^n\big)$$

On pose $a_0=f(x_0)$ *et* $a_1=f'(x_0)$ Soit $p=\min\{k\in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}/\quad a_k\neq 0\}$

L'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse x_0 est donnée par : $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

D'après ce qui a précède, elle est identique à : $y=a_0+a_1(x-x_0)$

D'après la formule du DL : $f(x)-\big(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\big)\underset{x_0}{\approx} a_p(x-x_0)^p$

On pose $M_0=(x_0,f(x_0))$

le signe de $f(x)-\big(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\big)$ au voisinage de x_0 est celui de $a_p(x-x_0)^p$ Ainsi,
la position locale de C_f par rapport à sa tangente en M_0 dépend du signe de a_p et de la parité de p

- ***si p est pair :***
  - ✓ Si $a_p>0$ alors, C_f est au dessus de sa tangente en M_0
  - ✓ Si $a_p<0$ alors, C_f est au dessous de sa tangente en M_0
  - ✓ Si $a_1=0$ alors, M_0 est un extremum
    - Si $a_p>0$ alors M_0 est un minimum et f est convexe au voisinage de x_0
    - Si $a_p<0$ alors M_0 est un maximum et f est concave au voisinage de x_0
- ***si p est impair :***

  M_0 est un point d'inflexion i.e., Cf traverse sa tangente en M_0

  - ✓ Si $a_p>0$ alors f est convexe à droite et concave à gauche de M_0
  - ✓ Si $a_p<0$ alors f est concave à droite et convexe à gauche de M_0

Calcul de limites :

On peut enlever l'indétermination en utilisant les développements limités.

Exemple :

calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{x}{1+x}}-1-x}{x^2}=\dfrac{0}{0}(FI)$. Il suffit de connaître les DL_2 au V(0) des fonctions suivantes :

$$u=\frac{x}{1+x}=x\left(\frac{1}{1+x}\right)=x(1-x+o(x))=x-x^2+o(x^2)\qquad quand\quad x\to 0,\ \frac{x}{1+x}\to 0$$

$$e^{\frac{x}{1+x}}=e^u=1+u+\frac{1}{2}u^2+o(u^2)=1+(x-x^2)+\frac{1}{2}(x-x^2)^2+o(x^2)$$

$$e^{\frac{x}{1+x}}=1+x-x^2+\frac{x^2}{2}(1-x)^2+o(x^2)=1+x-x^2+\frac{x^2}{2}+o(x^2)=1+x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x}{1+x}}-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=\frac{-1}{2}$$

Exercice :

Montrer que la fonction $f(x)=\dfrac{x\ln(x)}{x-1}$ se prolonge en 1 par une fonction dérivable,

puis préciser localement la position de la courbe représentative de f par rapport à la tangente en

ce point.

Étude des branches infinies :

Soit f une fonction numérique définie au $V(\infty)$. Pour trouver une asymptote (si elle existe) à C_f, on cherche un DL_1 au $V(\infty)$ de $\frac{1}{x}f(x)$

Si $\frac{1}{x}f(x)=a+\frac{b}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ alors $f(x)=ax+b+o(1)$ au $V(\infty)$

La droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote oblique à C_f

Si en plus, $\frac{1}{x}f(x)$ admet un DL_p ($p=\min\{k\in N\setminus\{0,1\}/\quad a_k\neq 0\}$) au $V(\infty)$:

$$\frac{1}{x}f(x)=a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^p}+o\left(\frac{1}{x^p}\right)$$

Soit donc,

$$f(x)=ax+bx+\frac{c}{x^{p-1}}+o\left(\frac{1}{x^{p-1}}\right)\Rightarrow f(x)-(ax+b)=\frac{c}{x^{p-1}}+o\left(\frac{1}{x^{p-1}}\right)$$

- ✓ Si $c>0$ alors, le graphe de f est au dessus de l'asymptote quand $x\to+\infty$
- ✓ Si $c<0$ alors, le graphe de f est au dessous de l'asymptote quand $x\to+\infty$
- ✓ Si $c(-1)^{p-1}>0$ alors, le graphe de f est au dessus de l'asymptote quand $x\to-\infty$
- ✓ Si $c(-1)^{p-1}<0$ alors, le graphe de f est au dessous de l'asymptote quand $x\to-\infty$

En pratique on se ramène au $V(0)$, on pose $x=\frac{1}{h}$, quand $|x|\to+\infty, h\to 0$

Soit $g(h)=hf\left(\frac{1}{h}\right)$ *avec* $h\in V(0)$

On détermine si c'est possible un DL_p ($p=\min\{k\in N\setminus\{0,1\}/\quad a_k\neq 0\}$) au $V(0)$, de $g(h)$:

$$g(h)=a+bh+ch^p+o(h^p)$$

Exemple :

Déterminer au $V(\infty)$, l'asymptote et la position du graphe de f par rapport à l'asymptote.

Soit $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$. On pose $x=\frac{1}{h}$, quand $|x|\to+\infty, h\to 0$

$$g(h)=hf\left(\frac{1}{h}\right)=h\left(\frac{1}{h}+2\right)e^h=(1+2h)e^h$$

DL_2 au V(0) de e^h : $e^h=1+h+\frac{1}{2}h^2+0(h^2)$

$$g(h)=(1+2h)e^h=(1+2h)\left(1+h+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)\right)=1+3h+\frac{5}{2}h^2+o(h^2)$$

Et par suite,

$$f\left(\frac{1}{h}\right)=\frac{1}{h}+3+\frac{5}{2}h+o(h)\ \Rightarrow\ f(x)=x+3+\frac{5}{2}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

- ✓ Le graphe de f admet une asymptote oblique quand $|x|\to+\infty$ d'équation $y=x+3$
- ✓ Puisque $c=5/2>0$ alors,
  - ➢ Le graphe de f est au dessus de l'asymptote quand $x\to+\infty$, en effet $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x+3)\big)=0^+$
  - ➢ Le graphe de f est au dessous de l'asymptote quand $x\to-\infty$, en effet $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-(x+3)\big)=0^-$