Université Mohammed V-Agdal
Faculté des Sciences Juridiques, Économiques et Sociales, Rabat
www.fsjesr.ac.ma
Filière de Sciences Économiques et de Gestion

Printemps–Été 2006/2007
Section : A & B
Semestre : S2

Module 6 : Méthodes Quantitatives I
Matière : Mathématiques I

Professeure Amale LAHLOU

Corrigé du Contrôle Final

Énoncé

Exercice 1

On considère la fonction réelle f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+x} - \sqrt{\frac{1}{x}-x}}{x+|x|}.$$

1. Déterminer D_f, le domaine de définition de f ;
2. la fonction f est-elle prolongeable par continuité à l'origine ? Si oui, donner son prolongement sur $D_f \cup \{0\}$.

Exercice 2 :

On considère la fonction réelle g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{-x}.$$

1. Montrer que l'équation $g(x) = 2-x$ admet une solution unique sur $[-2\ln(2), -\ln(2)]$ (on a $\ln(2) \simeq 0.7$) ;
2. Soit un réel $x < 0$.
   (a) Appliquer le Théorème des Accroissements Finis à g sur $[x, 0]$;
   (b) Déterminer le(s) point(s) le vérifiant ;
   (c) Comparer les trois termes :
   $$x, \qquad 1-e^{-x} \qquad \text{et} \qquad xe^{-x}$$
3. La fonction réelle h définie par
   $$h(x) = (1+x)e^{-x}$$
   est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   (a) Par un raisonnement par récurrence, montrer qu'il existe deux suites réelles de termes généraux :
   $$a_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad b_n = (-1)^n(1-n)$$
   telles que la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la fonction h s'écrit :
   $$h^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{-x} \, ;$$
   (b) Quelle est la valeur de $g^{(2007)}(0)$?
4. En utilisant la règle de l'Hospital, calculer la limite suivante :
   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)}{x}$$

Exercice 3 :

Déterminer le Développement Limité au voisinage de l'origine et à l'ordre 4 de la fonction réelle définie par :

$$f(x) = (e^{-x} + x)^{\frac{1}{3}}.$$

Indication : Au voisinage de l'origine,

$$\begin{aligned} e^u &= 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{3!}u^3 + \frac{1}{4!}u^4 + o(u^4) \\ (1+u)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + o(u^2) \end{aligned}$$

Exercice 4 :

Soit une fonction réelle f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Étant donné son Développement Limité à l'ordre 3 au voisinage du point d'abscisse 2 :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{6}(x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^3 + o\left((x-2)^3\right)$$

étudier localement la fonction f en ce point :

- ✓ f est-elle continue ou prolongeable par continuité au point 2 (on notera aussi par f son prolongement) ?
- ✓ Déterminer un équivalent de f au voisinage du point d'abscisse 2,
- ✓ Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2,
- ✓ Déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente au point d'abscisse 2,
- ✓ Déterminer les 3 premières dérivées de f au point 2,
- ✓ $\mathcal{C}_f$ présente t-elle un extremum local au point d'abscisse 2 ?
- ✓ $\mathcal{C}_f$ présente t-elle un point d'inflexion au point d'abscisse 2 ?
- ✓ Étudier la convexité de f au voisinage du point d'abscisse 2.

Réponse

Exercice 1

Considérons la fonction réelle f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+x} - \sqrt{\frac{1}{x}-x}}{x+|x|}.$$

1. Déterminons le domaine de définition de f.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque que si $x < 0$, alors $x + |x| = 0$ et par conséquent $D_f \subseteq \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, pour $x > 0$ on a :

$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+x} - \sqrt{\frac{1}{x}-x}}{2x}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} x \in D_f &\iff x > 0, \quad \frac{1}{x} + x \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} - x \geqslant 0 \\ &\iff x > 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} - x \geqslant 0 \\ &\iff x > 0 \quad \text{et} \quad 1 - x^2 \geqslant 0 \\ &\iff x > 0 \quad \text{et} \quad (1-x)(1+x) \geqslant 0 \\ &\iff x > 0 \quad \text{et} \quad 1 - x \geqslant 0 \\ &\iff x \in]0,1] \end{aligned}$$

Ainsi, $D_f =]0,1]$.

2. Étudions la continuité à droite de l'origine.

La fonction f est continue sur l'intervalle $D_f =]0,1]$ puisque c'est la composée de fonctions continues sur cet intervalle.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + x} - \sqrt{\frac{1}{x} - x}}{2x} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x} + x - \frac{1}{x} + x}{2x\left(\sqrt{\frac{1}{x} + x} + \sqrt{\frac{1}{x} - x}\right)} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} + x} + \sqrt{\frac{1}{x} - x}} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} + x} + \sqrt{\frac{1}{x} - x}} \\ &= 0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donc, la fonction f est prolongeable par continuité à droite au point d'abscisse 0 et son prolongement sur $[0,1]$ est donné par :

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\frac{1}{x} + x} - \sqrt{\frac{1}{x} - x}}{2x} & 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

<u>Exercice 2</u>

Considérons la fonction réelle g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{-x}.$$

1. Montrons que l'équation $g(x) = 2 - x$ admet une solution unique sur le segment $[-2\ln(2), -\ln(2)]$.

Posons la fonction :

$$f(x) = g(x) - 2 + x = e^{-x} - 2 + x.$$

Cette fonction est continue sur le segment $[-2\ln(2), -\ln(2)]$ et vérifie en plus,

$$\begin{cases} f(-2\ln(2)) &= 2(1 - \ln 2) > 0 \\ f(-\ln(2)) &= -\ln(2) < 0 \end{cases}$$

Alors, d'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires, il existe au moins $c \in]-2\ln(2), -\ln(2)[$ tel que

$$f(c) = 0 \qquad \text{i.e.,} \qquad e^{-c} = 2 - c.$$

Ceci veut dire que l'équation

$$e^{-x} = 2 - x$$

admet au moins une solution dans l'intervalle $]-2\ln(2), -\ln(2)[$. Or,

$$f'(x) = 1 - e^{-x} < 0, \qquad \forall x < 0$$

et par suite f est strictement décroissante sur $[-2\ln(2), -\ln(2)]$. Ainsi, la solution trouvée de l'équation $e^{-x} = 2 - x$ est unique sur $]-2\ln(2), -\ln(2)[$.

2. Soit un réel $x < 0$.

(a). Appliquons le Théorème des Accroissements Finis (T.A.F.) à g sur $[x, 0]$.

La fonction g est continue sur $[x, 0]$ pour tout $x < 0$ et dérivable sur $]x, 0[$ avec, $g'(x) = -e^{-x}$.

D'après T.A.F., il existe au moins $c \in]x, 0[$ tel que :

$$g(0) - g(x) = (0 - x)g'(c)$$

i.e.,

$$1 - e^{-x} = xe^{-c}.$$

(b). Déterminons le(s) point(s) vérifiant le T.A.F. On a D'après la question (a) : $c \in]-2\ln(2), -\ln(2)[$ et

$$\begin{aligned} 1 - e^{-x} = xe^{-c} &\iff e^{-c} = \frac{1 - e^{-x}}{x} \\ &\iff c = -\ln\left(\frac{1 - e^{-x}}{x}\right) \end{aligned}$$

(c). Comparons les trois termes x, $1 - e^{-x}$ et xe^{-x}. D'après la question (a), le point c vérifiant le T.A.F. est tel que :

$$\begin{aligned} x < c < 0 &\implies 1 < e^{-c} < e^{-x} \\ &\implies xe^{-x} < xe^{-c} < x \quad (\text{car } x < 0) \\ &\implies xe^{-x} < 1 - e^{-x} < x \end{aligned}$$

On remarque qu'on a l'égalité des trois termes au point 0. D'où,

$$\forall x \leqslant 0, \qquad xe^{-x} \leqslant 1 - e^{-x} \leqslant x$$

3. Soit la fonction réelle h définie par :

$$h(x) = (1 + x)e^{-x}.$$

(a). Par un raisonnement par récurrence, montrons qu'il existe deux suites réelles de termes généraux

$$a_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad b_n = (-1)^n(1 - n)$$

telles que la dérivée d'ordre n de la fonction h s'écrit :

$$h^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{-x}$$

<u>*Vérifiation :*</u> Pour $n = 0$

$$h^{(0)}(x) = (a_0 x + b_0)e^{-x} = (x + 1)e^{-x} = h(x) \quad (\text{vraie})$$

<u>*Hypothèse de récurrence :*</u> On suppose que la propriété est vraie à l'ordre n :

$$h^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{-x} = ((-1)^n x + (-1)^n(1 - n))\, e^{-x}$$

Démonstration : On montre que la propriété est vraie à l'ordre $(n+1)$:

$$\begin{aligned} h^{(n+1)}(x) &= (a_{n+1}x + b_{n+1})e^{-x} \\ &= \left[(-1)^{n+1}x + (-1)^{n+1}(1-(n+1))\right]e^{-x} \\ &= \left[(-1)^{n+1}x + (-1)^n n\right]e^{-x} \end{aligned}$$

avec,

$$\begin{cases} a_{n+1} = (-1)^{n+1} \\ b_n = (-1)^{n+1}(1-(n+1)) = (-1)^n n \end{cases}$$

En effet,

$$\begin{aligned} h^{(n+1)}(x) &= \left[h^{(n)}(x)\right]' \\ &= a_n e^{-x} - (a_n x + b_n)e^{-x} \\ &= (-a_n x + a_n - b_n)e^{-x} \\ &= (a_{n+1}x + b_{n+1})e^{-x} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} a_{n+1} = -a_n = -(-1)^n = (-1)^{n+1} \\ b_{n+1} = a_n - b_n = (-1)^n - (-1)^n(1-n) = (-1)^n n \end{cases}$$

Conclusion :

$$h^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{-x} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

avec

$$\begin{cases} a_n = (-1)^n \\ b_n = (-1)^n(1-n) \end{cases}$$

(b). Calculons la valeur de $h^{(2007)}(0)$.

$$h^{(2007)}(0) = (-1)^{2007}(1-2007) = 2006$$

4. En utilisant la règle de l'Hospital, calculons la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)}{x}$$

Cette limite est une Forme Indéterminée $\frac{+\infty}{+\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)\right]'}{[x]'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$$

Posons le changement de variable $X = e^x$, ainsi si $x \to +\infty$ alors $X \to +\infty$ et

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)\right]'}{[x]'} &= \lim_{X\to+\infty} \frac{2X^2 - X}{X^2 - X + 1} \\ &= \lim_{X\to+\infty} \frac{2X^2}{X^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)}{x} = 2$$

Exercice 3

Déterminer le Développement Limité au voisinage de l'origine et à l'ordre 4 de la fonction réelle $x \mapsto (e^{-x} + x)^{\frac{1}{3}}$.

On sait que :

$$\begin{aligned} e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\ e^{-x} + x &= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \end{aligned}$$

Posons $X = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$, quand $x \to 0$ alors $X \to 0$ et

$$\begin{aligned} (e^{-x} + x)^{\frac{1}{3}} &= (1+X)^{\frac{1}{3}} \\ &= 1 + \frac{1}{3}X - \frac{1}{9}X^2 + o(X^2) \\ &= 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) \\ &\quad -\frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{72} \\ &\quad -\frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2\left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{12}\right)^2 + o(x^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e^{-x} + x)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{72} - \frac{x^4}{36} + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{18} - \frac{x^4}{72} + o(x^4) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(e^{-x} + x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{18} - \frac{x^4}{72} + o(x^4).$$

Exercice 4

Étudions localement la fonction définie par son Développement Limité au voisinage du point d'abscisse 2 :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{6}(x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^3 + o\left((x-2)^3\right)$$

⇝ Si $2 \in D_f$ alors la fonction f est continue au point 2 et $f(2) = 1$.

⇝ Si $0 \notin D_f$ alors la fonction f est prolongeable par continuité au point 2 et son prolongement est donné par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D_f \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$

(Dans ce cas, on notera dans toute la suite le prolongement de f par tout simplement f au lieu de $\tilde{f}$).

⇝ On peut déterminer un équivalent de f au voisinage de 2 :

$$f(x) - 1 \sim_2 \frac{1}{6}(x-2)^2.$$

⇝ L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est donnée par $y = 1$.

⇝ Comme

$$\lim_{x\to2}(f(x) - y) = \lim_{x\to2} \frac{1}{6}(x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^3 + o\left((x-2)^3\right) = 0^+$$

alors la courbe représentative de f est au dessus de la tangente $y = 1$ au point $(0, 1)$.

$\rightsquigarrow$ f est trois fois dérivable au point 2 et on a :

$$f'(2) = 0$$

$$\frac{f''(2)}{2!} = \frac{1}{6} \quad \Longleftrightarrow \quad f''(2) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{f''(3)}{3!} = -\frac{1}{6} \quad \Longleftrightarrow \quad f''(3) = -1$$

$\rightsquigarrow$ Comme $f'(2) = 0$ alors le point $(2, 1)$ est un point critique de f,

$\rightsquigarrow$ Comme $f'(2) = 0$ et le premier exposant de l'équivalence susmentionnée est paire $((x-2)^2)$, alors f présente un extremum en ce point et comme en plus le coefficient de cet exposant est $\frac{1}{6} > 0$, alors la courbe représentative de f présente un minimum relatif au point $(2, 1)$,

$\rightsquigarrow$ Comme la courbe représentative de f présente un minimum relatif au point $(2, 1)$ alors f est convexe au voisinage de ce point.