Université Mohammed V-Agdal
Faculté des Sciences Juridiques,
Économiques et Sociales, Rabat
www.fsjesr.ac.ma
Filière de Sciences Économiques et de Gestion

Printemps–Été 2006/2007
Section : A & B
Semestre : S_2

Module 6 : Méthodes Quantitatives I
Matière : Mathématiques I

Professeure Amale LAHLOU

Corrigé du Contrôle de Rattrapage

Énoncé

Exercice 1

Soit la fonction réelle définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

1. Déterminer D_f, le domaine de définition de f ;
2. Montrer que la fonction f est bijective en précisant son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée ;
3. Déterminer sa fonction réciproque.

Exercice 2

Soit la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)$$

1. Déterminer les éventuels points extremums et points d'inflexion de la fonction f ;
2. En déduire le domaine de convexité de f.

Exercice 3

Déterminer le Développement Limité, à l'ordre 2 et au voisinage de 1, de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$$

en effectuant dans une étape intermédiaire la division selon les puissances croissantes à un ordre bien déterminé.

Exercice 4

Soit la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :

$$f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x-1}}.$$

1. Déterminer le Développement Généralisé de f au voisinage de l'infini et à l'ordre 1,
2. Déterminer les équations des asymptotes à $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f, au voisinage de l'infini,
3. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses asymptotes.

Réponse

Exercice 1

Soit la fonction réelle définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

1. Déterminons le domaine de définition de f.

La fonction f est la composée de deux fonctions : $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ qui n'est définie que si $1+x \neq 0$ (i.e., $x \neq -1$) et la fonction $X \mapsto \ln(X)$ qui est bien définie pour tout $X > 0$. Alors,

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}, / \quad x \neq -1 \text{ et } \frac{1+x}{1-x} > 0\right\}.$$

Étudions le signe de $\frac{1-x}{1+x}$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	$\mid$	$+$	$\emptyset$	$-$	
$1+x$		$-$	$\emptyset$	$+$	$\mid$	$+$	
$\frac{1-x}{1+x}$		$-$	$\Vert$	$+$	$\emptyset$	$-$	

on constate donc que :

$$\frac{1+x}{1-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-1, +1[.$$

Par suite,

$$D_f =]-1, +1[.$$

2. Montrons que la fonction f est bijective en précisant son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée.

D'une part, la fonction f est continue sur son domaine de définition puisque c'est la composée de fonctions continues sur $]-1, 1[$ et d'autre part, f est strictement décroissante sur cet intervalle ; en effet, par un calcul simple on montre que :

$$f'(x) = \frac{-2}{(1-x)^2} < 0.$$

D'où, la fonction f est bijective de $]-1, 1[$ vers $f(]-1, 1[)$. Or,

$$\begin{aligned} f(]-1,1[) &= \left]\lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to -1^+} f(x)\right[\\ &=]-\infty, +\infty[\end{aligned}$$

3. Déterminons la fonction réciproque de f.

Comme f est bijective de $]-1, 1[$ vers $\mathbb{R}$, alors sa fonction réciproque f^{-1} existe et est définie de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$. Soit $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \\ &\iff e^y = \frac{1-x}{1+x} \\ &\iff x = \frac{1-e^y}{1+e^y} \\ &\iff x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Soit donc,

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \dfrac{1-e^y}{1+e^y} \end{array}$$

Exercice 2

Soit la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)$$

1 Déterminons les éventuels points extremums et points d'inflexion de la fonction f.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Déterminons tout d'abord les points critiques de f, i.e., les racines de l'équation

$$f'(x) = 0$$

on parle de la condtion nécessaire du premier ordre.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff \frac{e^x(2e^x - 1)}{e^{2x} - e^x + 1} = 0 \\ &\iff 2e^x - 1 = 0 \\ &\iff e^x = \frac{1}{2} \\ &\iff x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\iff x = -\ln(2) \end{aligned}$$

Calculons $f(-\ln(2))$:

$$\begin{aligned} f(-\ln(2)) &= \ln\left(e^{-2\ln(2)} - e^{-\ln(2)} + 1\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) \\ &= \ln\left(\frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

Donc le point $\left(-\ln(2), \frac{3}{4}\right)$ est un point critique de f et c'est le seul.

Appliquons maintenant les conditions suffisantes du second ordre : tout calcul fait on obtient,

$$f''(x) = \frac{e^x\left(-e^{2x} + 4e^x - 1\right)}{\left(e^{2x} - e^x + 1\right)^2}$$

Étudions le signe de $f''(x)$: posons $X = e^x$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff -e^{2x} + 4e^x - 1 = 0 \\ &\iff -X^2 + 4X - 1 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant est $\Delta' = 3$, donc l'équation $-X^2 + 4X - 1 = 0$ admet deux racines à savoir $2-\sqrt{3} > 0$ et $2+\sqrt{3} > 0$. D'où, les racines de l'équation $f''(x) = 0$ sont $\ln(2-\sqrt{3})$ et $\ln(2+\sqrt{3})$

Calculons $f(\ln(2-\sqrt{3}))$ et $f(\ln(2+\sqrt{3}))$:

$$\begin{aligned} f(\ln(2-\sqrt{3})) &= \ln\left(e^{2\ln(2-\sqrt{3})} - e^{\ln(2-\sqrt{3})} + 1\right) \\ &= \ln\left((2-\sqrt{3})^2 - (2-\sqrt{3}) + 1\right) \\ &= \ln\left(3(2-\sqrt{3})\right) \\ &= \ln(3) + \ln(2-\sqrt{3}) \\ f(\ln(2+\sqrt{3})) &= \ln\left(e^{2\ln(2+\sqrt{3})} - e^{\ln(2+\sqrt{3})} + 1\right) \\ &= \ln\left((2+\sqrt{3})^2 - (2+\sqrt{3}) + 1\right) \\ &= \ln\left(3(2+\sqrt{3})\right) \\ &= \ln(3) + \ln(2+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Dressons le tableau de variation de f'' :

x	$-\ln(2)$	$\ln(2-\sqrt{3})$		$\ln(2+\sqrt(3)$	
$f''(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$-$
$f(x)$	**concave**		**convexe**		**concave**

⇝ Comme $f''(-\ln(2)) < 0$ alors, la fonction f présente un maximum relatif au point $\left(-\ln(2), \frac{3}{4}\right)$.

⇝ Comme l'équation $f''(x) = 0$ admet deux racines à savoir :

$$\ln(2-\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad \ln(2+\sqrt{3})$$

et en plus f'' change de signe de part et d'autre de ces points alors les points $\left(\ln(2-\sqrt{3}), \ln(3)+\ln(2-\sqrt{3})\right)$ et $\left(\ln(2+\sqrt{3}), \ln(3)+\ln(2+\sqrt{3})\right)$ sont deux points d'inflexion de f.

2. Déterminons le domaine de convexité de f.

⇝ Si $x \in]-\infty, \ln(2-\sqrt{3})] \cup [\ln(2+\sqrt{3}), +\infty[$ alors f est concave,

⇝ Si $x \in [\ln(2-\sqrt{3}), \ln(2+\sqrt{3})]$ alors f est convexe.

Exercice 3

Déterminons le Développement Limité, à l'ordre 2 et au voisinage de 1, de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$$

Posons le changement de variable $x = 1+h$, quand $x \to 1$ alors $h \to 0$ et on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(x)}{1+x^2} \\ &= \frac{\ln(1+h)}{1+(1+h)^2} \\ &= \frac{\ln(1+h)}{2+2h+h^2} \end{aligned}$$

Or le Développement Limité, à l'ordre 2 et au voisinage de 0, de $\ln(1+h)$ est donné par :

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$$

Comme la valuation du dénominateur est nulle, on peut effectuer la division selon les puissances croissantes de $h-\dfrac{h^2}{2}$ par $2+2h+h^2$ à l'ordre 2 :

$$\begin{array}{ccc|l} h & -\frac{h^2}{2} & & 2+2h+h^2 \\ \hline -h & -h^2 & -\frac{h^3}{2} & \frac{h}{2}-\frac{3h^2}{4} \\ \hline & -\frac{3h^2}{2} & -\frac{h^3}{2} & \\ & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Il vient donc,

$$\frac{\ln(1+h)}{2+2h+h^2} = \frac{h}{2} - \frac{3h^2}{4} + o(h^2)$$

En remplaçant h par $(x-1)$ on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{3}{4}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$$

<u>Exercice 4</u>

Soit la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :

$$f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x-1}}$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminons le Développement Généralisé de f au voisinage de l'infini et à l'ordre 1.

Posons $x = \frac{1}{h}$, si $x \to \infty$ alors $h \to 0$ et

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{h}-2\right)\exp\left(\frac{h}{1-h}\right) \end{aligned}$$

on sait qu'au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-h} &= 1+h+o(h) \\ \frac{h}{1-h} &= h+h^2+o(h^2) \end{aligned}$$

Posons $X = h+h^2+o(h^2)$, quand $h \to 0$ alors $X \to 0$ et

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{h}{1-h}\right) &= e^X \\ &= 1+X+\frac{1}{2}X^2+o(X^2) \\ &= 1+h+h^2+\frac{1}{2}(h+h^2)^2+o(h^2) \\ &= 1+h+h^2+\frac{1}{2}h^2+o(h^2) \\ &= 1+h+\frac{3}{2}h^2+o(h^2) \end{aligned}$$

et par suite,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{h}-2\right)\exp\left(\frac{h}{1-h}\right) &= \left(\frac{1}{h}-2\right)\left(1+h+\frac{3}{2}h^2+o(h^2)\right) \\ &= \frac{1}{h}-1-\frac{h}{2}+o(h) \end{aligned}$$

En remplaçant h par $\frac{1}{x}$ il vient,

$$f(x) = x-1-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. Déterminons les équations des asymptotes à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de l'infini.

La droite d'équation $y = x-1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de l'infini puisque,

$$\lim_{|x|\to+\infty}(f(x)-y) = 0.$$

3. Précisons la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote $y = x-1$.

$\rightsquigarrow$ au voisinage de $-\infty$ on a :

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0^+.$$

Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de l'asymptote au voisinage de $-\infty$.

$\rightsquigarrow$ au voisinage de $+\infty$ on a :

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0^-.$$

Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.