



D.S de Mathématiques I

Exercice 1(5pts).

1/ Peut-on appliquer le Théorème de Rolle à la fonction f , où $f(x) = |x^2 - x|$, sur l'intervalle $[-1,1]$?

2/ Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction suivante : $g(x) = x^2 e^x$.

Indication : utiliser la formule de Leibnitz $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Exercice 2(5pts).

Soit la fonction f définie par $f(x) = -\text{Log}x$

1/ Démontrer que f est convexe sur un domaine que l'on déterminera.

2/ Dédurre l'inégalité suivante :

$$\frac{ax+by}{a+b} \geq x^{\frac{a}{a+b}} y^{\frac{b}{a+b}},$$

où $a, b, x, y > 0$.

3/ Donner le DL de f à l'ordre 3 au voisinage de $x_0 = 1$.

Exercice 3 (10pts).

On considère la fonction réelle définie par : $f(x) = \frac{(1+x)e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

1/ Déterminer le domaine de définition D de f .

2/ Montrer que : $f(x) = \frac{1+x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

3/ Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D$.

4/ i/ Montrer à l'aide du Théorème des Accroissements finis que pour tout réel x , on a : $e^x > x$

ii/ Donner le tableau de variation de f .

5/ Calculer le DL de $\frac{f(x)}{x}$ à l'ordre 2 au voisinage de l'infini.

6/ Déterminer l'équation de l'asymptote (Δ) à la courbe de f .
Préciser la position de la courbe par rapport à (Δ) .