Chapitre II

Généralités sur la théorie des ensembles

Table des matières

Chapitre II

Généralités sur la théorie des ensembles

Introduction

Nous présentons dans ce chapitre les notions essentielles relatives à la théorie des ensembles qui constitue la base de toutes les mathématiques d'aujourd'hui.

II.1 Principe de la théorie des ensembles

II.1.1 Ensemble

a/ Définition d'un ensemble

Définition II.1.1 *En mathématiques, comme dans la vie courante, on est souvent amené à rassembler des êtres a, b, c, ... possédant quelques caractères communs ou destinés à un même usage : on parle de l'ensemble E de ces êtres, on dit de ceux-ci qu'ils sont les éléments de E. On écrit :*

$$E = \{a, b, c, \ldots\}$$

On notera que l'ordre des éléments compris dans un ensemble n'a pas d'importance et n'intervient pas pour distinguer les ensembles. Ainsi, les ensembles $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ sont identiques.

Exemples :
- L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$;
- l'ensemble des entiers relatifs $Z = \{\cdots, -n, \cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$;
- Q ensemble des nombres rationnels ;
- $\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels ;
- l'ensemble de tous les chiffres est $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
- l'ensemble des nombres pairs est $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$;
- l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 10 est $\{2, 3, 5, 7\}$.

Notation :

A, B, C, ... (lettres en majuscule) : réservées aux noms des ensembles ;

a, b, c, ... (lettres en minuscule) : réservées aux éléments de l'ensemble.

b/ Appartenance à un ensemble

Si l'être a est un élément de E, on dit que a appartient à E, et on note $a \in E$. On écrit $m \notin E$ pour exprimer que l'être m n'est pas un élément de E.

L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé ensemble vide et sera noté $\emptyset$ (ou $\{\}$).

Exemples : $\sqrt{2} \in \mathbb{R}, \quad -3 \notin \mathbb{N}, \quad \dfrac{2}{5} \in Q, \quad \{x \in \mathbb{R}/x > 10 \text{ et } x < 10\} = \emptyset.$

c/ Détermination d'un ensemble

Un ensemnble peut être caractérisé par l'une des deux manières suivantes :

- **en extension :** par énumération complète de ses éléments.

Exemples :
  - $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$;
  - $F = \{$ bleu, vert, jaune, 7$\}$.
- **en compréhension :** par la donnée de la propriété d'appartenance.

Exemples :
  - $E = \{n \in \mathbb{N} \quad / n \text{ est un diviseur de } 12\}$;
  - $F = \{x \in \mathbb{R} \quad / 4 \leq x \leq 20\}$.

d/ Types d'ensembles

Etant donné un ensemble E non vide. On appelle E un ensemble fini si le nombre de ses éléments est fini. Dans le cas contraire, on dit que E est un ensemble infini et dans ce cas on peut se référer à une propriété.

Exemples :
- $E = \{a, e, i, o, u\}$ est un ensemble fini formé par des voyelles ;
- $\mathbb{N}$ est un ensemble infini.

e/ Cardinal d'un ensemble fini

Le nombre d'éléments appartenant à un ensemble fini E s'appelle le cardinal de E, noté $card(E)$. Par convention, $card(\emptyset) = 0$.

Exemple : Si $E = \{1, 5, 9, 14\}$, alors $card(E) = 4$.

f/ Égalité de deux ensembles

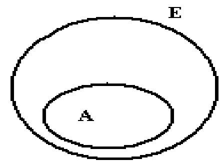
Deux ensembles E et F sont identiques ou égaux, si chaque élément de l'un appartient à l'autre. On écrit :

$$E = F \iff [\forall x, \qquad x \in E \Leftrightarrow x \in F]$$

g/ Inclusion

On dit qu'un ensemble A est un sous-ensemble ou partie d'un ensemble E (ou encore : A est contenu dans E, A est inclus dans E, ou E contient A) si tout élément de A appartient à E, et l'on note : $A \subseteq E$.
On écrit :

$$A \subseteq E \iff [\forall x, \qquad x \in A \Rightarrow x \in E].$$



On écrit $A \subset E$ pour exprimer que l'ensemble A est contenu dans E sans coïncider avec lui. L'égalité $A = B$ signifie ($A \subseteq E$ et ($E \subseteq A$).
L'une des plus importantes propriétés de l'inclusion est la transitivité : pour tous ensembles A, B et C on a,

$$[(A \subseteq B) \text{ et } (B \subseteq C)] \quad \Longrightarrow \quad (A \subseteq C).$$

Exemples :

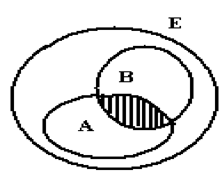
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$;
- $\{2,5\} \subseteq \{2,5,8\}$;
- $\{1,2,6\} = \{2,6,1\}$.

II.1.2 Intersection et réunion

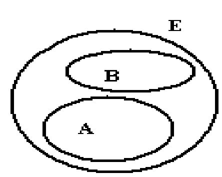
a/ Intersection de deux ensembles

Définition II.1.2 *Soient A et B deux parties d'un même ensemble E. On appelle intersection de A et B, l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à la fois à A et à B.*

On note : $A \cap B$
On lit : " A inter B "
On écrit : $x \in A \cap B \iff x \in A$ et $x \in B$
On peut figurer l'ensemble $A \cap B$ par la partie hachurée :



Si l'on a $A \cap B = \emptyset$, alors A et B n'ont aucun élément en commun. On dit que A et B sont disjoints.



Exemple :
Si $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{2,4\}$, alors $A \cap B = \{2\}$.

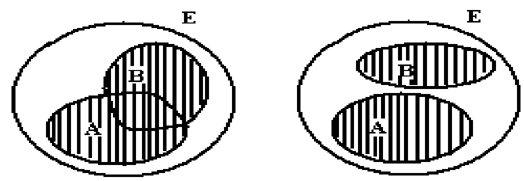
On montre facilement que pour toute partie A de E, on a :

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \qquad A \cap A = A \qquad \text{et} \qquad A \cap E = A.$$

b/ Réunion de deux ensembles

Définition II.1.3 *Soient A et B deux parties d'un même ensemble E. On appelle réunion de A et B, l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à l'un au moins des ensembles A et B.*

On note : $A \cup B$
On lit : " A union B "
On écrit : $x \in A \cup B \iff x \in A$ ou $x \in B$
On peut figurer l'ensemble $A \cup B$ par la partie hachurée :



Exemple :
Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 4\}$, alors $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$.

On montre facilement que pour toute partie A de E, on a :

$$A \cup \emptyset = A, \qquad A \cup A = A \qquad \text{et} \qquad A \cup E = E.$$

c/ Généralisation de l'intersection et de la réunion

Considérons de façon générale une famille non vide de sous-ensembles $(A_i)_{i \in I}$ de E où I une partie non vide de $\mathbb{N}$. On prend à titre d'exemple $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
On note :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n\,;$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cup \ldots A_n.$$

On écrit :

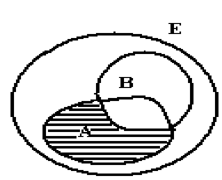
$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \iff \forall i = 1, 2, \cdots, n \qquad x \in A_i\,;$$

$$x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \iff \exists i \in \{1, 2, \cdots, n\} \qquad x \in A_i.$$

II.1.3 Différence et différence symétrique de deux ensembles

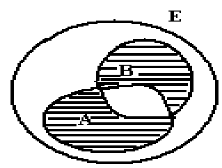
Définition II.1.4 *On appelle différence de deux ensembles A et B, l'ensemble des éléments appartenant à A et non à B.*

On note : $A - B$
On écrit : $x \in A - B \iff x \in A$ et $x \notin B$
On peut figurer l'ensemble $A - B$ par la partie hachurée :



Définition II.1.5 *On appelle différence symétrique de deux ensembles A et B, l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B sans appartenir à l'intersection $A \cap B$.*

On note : $A \triangle B$
On écrit : $x \in A \triangle B \iff x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$
On peut figurer l'ensemble $A \triangle B$ par la partie hachurée :



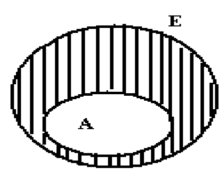
On montre que :

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A).$$

II.1.4 Ensemble complémentaire

Définition II.1.6 *A étant une partie de E. L'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A est un sous-ensemble de E appelé complément (ou sous-ensemble complémentaire) de A dans E.*

On note : A^c, $\mathcal{C}_E A$, $E - A$.
On écrit : $x \in \mathcal{C}_E A \iff x \in E$ et $x \notin A$
On peut figurer l'ensemble $\mathcal{C}_E A$ par la partie hachurée :



On montre que :

$$A \cap \mathcal{C}_E A = \emptyset \qquad \text{et} \qquad A \cup \mathcal{C}_E A = E.$$

II.1.5 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition II.1.7 *Etant donné un ensemble non vide E. On note par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E (la partie vide et l'ensemble E sont inclus).*

On écrit : $A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subseteq E$

Exemples :

- Si $E = \emptyset$ alors, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$
- Si $E = \{a\}$ alors, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E\}$
- Si $E = \{a, b\}$ alors, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, E\}$
- Si $E = \{a, b, c\}$ alors, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$

Remarque : $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

Théorème II.1.8 *Soit A une partie d'un ensemble fini E. Si $card(E) = n$ alors, $\mathcal{P}(E)$ est aussi un ensemble fini et $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.*

II.1.6 Partition d'un ensemble

On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ où $I \subseteq \mathbb{N}$ forme une partition d'un ensemble E si et seulement si les trois assertions suivantes sont bien vérifiées :

i) aucune des parties A_i n'est vide :

$$A_i \neq \emptyset \quad \text{pour tout } i \in I;$$

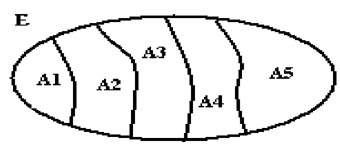
ii) tous les ensembles de la famille sont disjoints deux à deux :

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{pour tous } i, j \in I \text{ avec } i \neq j;$$

iii) E est exactement la réunion de tous les ensembles de la famille :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = E.$$

La représentation sous forme d'un diagramme d'une partition peut alors être la suivante :



Exemple : Si on note P, l'ensemble des entiers naturels pairs et I, l'ensemble des entiers naturels impairs. Alors, P et I forment une partition de $\mathbb{N}$.

Théorème II.1.9 *Si E est un ensemble fini, alors pour toute partition $(A_i)_{i\in I}$ où $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ de E,*

$$card(E) = \sum_{i=1}^{n} card(A_i) = card(A_1) + card(A_2) + card(A_3) + \ldots + card(A_n).$$

II.1.7 Ensemble produit (ou produit cartésien)

Définition II.1.10 *Soient A et B deux ensembles pouvant être distints ou non. On note par $A \times B$ l'ensemble produit de A par B formé par des couples ordonnés (a, b)[1] tels que $a \in A$ et $b \in B$.*

On note : $A \times B$
On lit : "A croix B"
On écrit : $A \times B = \{(x, y) / \quad x \in A \text{ et } y \in B\}$

Exemple : Soient $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2\}$. Alors,

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

On dfinit de même le produit $A \times B \times C$ comme étant l'ensemble des triples (a, b, c) tels que $a \in A$, $b \in B$ et $c \in C$. Pour simlifier les notations, le produit $A \times A$ sera simplement noté A^2. De même $A \times A \times A = A^3$.

Théorème II.1.11 *Soient A et B deux ensembles finis et non vides. Alors,*

$$card(A \times B) = card(A) \times card(B).$$

Exemple : Dans l'exemple précédent,

$$card(A) = 3, \qquad card(B) = 2 \qquad \text{et on a bien} \qquad card(A \times B) = 6 = 3 \times 2.$$

[1] $(a, b) \neq (b, a)$

Représentation graphique :

Une représentation géométrique des éléments du produit cartésien $A \times B$ est possible. On utilise trois type de représentations :

- tableau cartésien ;
- diagramme cartésien ;
- diagramme sagittal.

II.2 Relations entre les classes des fonctions propositionnelles

On montre facilement les relations suivantes :

- $Cl(\bar{P}) = \mathcal{C}_E\ (Cl(P))$ où $\bar{P}$ est la négation de la fonction propositionnelle $P(x)$;
- $Cl(P \wedge Q) = Cl(P) \cap Cl(Q)$;
- $Cl(P \vee Q) = Cl(P) \cup Cl(Q)$;
- $Cl(P \Rightarrow Q) = Cl(\bar{P}) \cup Cl(Q)$;
- Si $\forall x \in E, \quad P(x) \equiv Q(x)$ alors, $Cl(P) = Cl(Q)$.