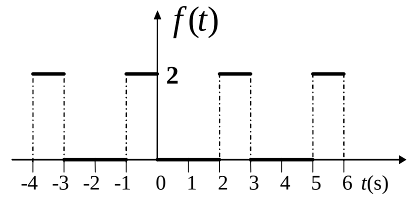
Exercice 1 Série de Fourier. 4 Points

Soit la fonction périodique $f(t)$ ci-contre.



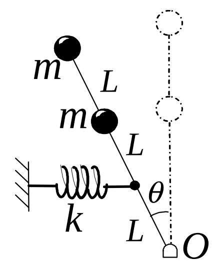
1. Quelle est la période T de cette fonction.

2. Trouver le développement en série de Fourier de la fonction.

Rappel: La série de Fourier d'une fonction périodique $f(t)$ est:

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right).$$

Exercice 2 Système non amorti. 5 Points



Une tige de longueur $3L$ et de masse négligeable, porte deux masses ponctuelles m: une à l'extrémité supérieure et une autre à une distance L de celle-ci. À une distance L de l'extrémité inférieure est attaché un ressort de raideur k. Le système peut tourner librement autour du point fixe O. À l'équilibre (*représenté en pointillés*) le ressort n'était *pas* déformé.

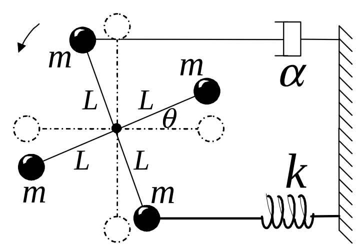
1. Trouver l'énergie cinétique T et potentielle U en termes de $\theta \ll 1$.

2. Trouver la condition d'oscillation.

3. Déduire le Lagrangien puis l'équation du mouvement et la pulsation propre ω_0.

Rappels: Pour $\theta \ll 1$: $\sin\theta \approx \theta$. $\cos\theta \approx 1-\frac{\theta^2}{2}$.

Exercice 3 Système amorti. 9 Points



Deux tiges, de longueurs $2L$ (de masses négligeables), sont soudées ensemble à angle droit. Elles portent à leurs extrémités des masses ponctuelles et peuvent tourner librement autour de l'axe horizontal fixe passant par le point de soudure. Les frottements sont symbolisés par l'amortisseur de coefficient α.

À l'équilibre (*représenté en pointillés*) le ressort n'était *pas* déformé.

1. Trouver l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle U, ainsi que la fonction de dissipation $\mathcal{D}$. ($\theta \ll 1$.)

2. Trouver le Lagrangien et déduire l'équation du mouvement.

3. Sachant que α=**16**N.s/m, m=**1**kg, k=**16**N/m : trouver la nature du mouvement.

4. Quelle est la valeur de α qui ne faut pas dépasser pour avoir des oscillations.

5. Pour quelle valeur de α l'amplitude diminue à **1/7** de sa valeur après **2** oscillations complètes.

Rappels: Pour $\theta \ll 1$: $\sin\theta \approx \theta$.
L'équation de Lagrange du système amorti est $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}=-\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot\theta}$.

Questions de cours. 2 Points

Si l'équation du mouvement d'un système forcé est de la forme $\ddot{q}+2\lambda\dot{q}+\omega_0^2q=\frac{F_0}{a}\cos\Omega t$, la solution permanente est $q(t)=A\cos(\Omega t+\phi)$. Compléter la représentation complexe ci-dessous, puis déduire A et $\tan\phi$:

$$q(t)=A\cos(\Omega t+\phi)\ \rightarrow\ \underline{q}(t)=......$$
$$F(t)=F_0\cos\Omega t\ \rightarrow\ \underline{F}(t)=......$$
$$\ddot{q}+2\lambda\dot{q}+\omega_0^2q=\frac{F_0}{a}\cos\Omega t\ \rightarrow\ ......$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=...... \\ \tan\phi=....... \end{cases}$$

CORRIGÉ DU RATTRAPAGE

Exercice 1

1. La période de la fonction est $\boxed{T = \mathbf{3s.}}$ 1

2. $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$ 0,5 $= \frac{1}{3}\left[\int_0^2 0.dt + \int_2^3 2.dt\right] = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\,dt = \frac{1}{3}\left[\int_{-1}^0 2.dt + \int_0^2 0.dt\right] = \frac{2}{3}$ 0,5

$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\,dt$ 0,5 $= \frac{2}{3}\left[\int_{-1}^0 2.\cos\frac{2\pi nt}{3}.dt + \int_0^2 0.dt\right] = \frac{2}{\pi \mathbf{n}}\sin\frac{2\pi\mathbf{n}}{3}$ 0,5 $= \frac{-2}{\pi\mathbf{n}}\sin\frac{4\pi\mathbf{n}}{3}$

$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\,dt$ 0,5 $= \frac{2}{3}\left[\int_{-1}^0 2.\sin\frac{2\pi nt}{3}.dt + \int_0^2 0.dt\right] = \frac{2}{\pi\mathbf{n}}(-1+\cos\frac{2\pi\mathbf{n}}{3})$ 0,5 $= \frac{2}{\pi\mathbf{n}}(-1+\cos\frac{4\pi\mathbf{n}}{3})$

Donc, $f(t) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\mathbf{n}}\sin\frac{2\pi\mathbf{n}}{3}\cos\frac{2\pi\mathbf{nt}}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\mathbf{n}}(-1+\cos\frac{2\pi\mathbf{n}}{3})\sin\frac{2\pi\mathbf{nt}}{3}.$

Exercice 2

1. $T = T_m + T_m = \boxed{\frac{1}{2}m(2L)^2\dot{\theta}^2}$ 0,5 $+ \boxed{\frac{1}{2}m(3L)^2\dot{\theta}^2}$ 0,5 $= \boxed{\frac{13}{2}mL^2\dot{\theta}^2}$ 0,5

$U = U_k + U_m + U_m \approx \boxed{\frac{1}{2}k(L\sin\theta)^2}$ 0,5 $+ \boxed{-mg(2L-2L\cos\theta)}$ 0,5 $+ \boxed{-mg(3L-3L\cos\theta)}$ 0,5

$\approx \frac{1}{2}kL^2\theta^2 - mgL\theta^2 - \frac{3}{2}mgL\theta^2 = \boxed{\frac{1}{2}(kL^2-5mgL)\theta^2.}$ 0,5

2. La condition d'oscillation est $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial^2\theta}\right|_{\theta=0} > 0 \Rightarrow \boxed{kL^2-5mgL>0}$ 0,5 $\Leftrightarrow k > \frac{5mg}{L}.$

3. Le Lagrangien est: $\mathcal{L} = T - U = \frac{13}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(kL^2-5mgL)\theta^2.$

$\frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \Longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{kL-5mg}{13mL}\theta = 0.}$ 0,5 $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{kL-5mg}{13mL}}.}$ 0,5

Exercice 3

1. $T = T_m + T_m + T_m + T_m = 4\times\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 = \boxed{2mL^2\dot{\theta}^2.}$ 0,5 $\boxed{\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha L^2\dot{\theta}^2.}$ 0,5

$U = U_k + U_m + U_m + U_m + U_m$

$= \boxed{\frac{1}{2}k(L\sin\theta)^2}$ 0,5 $+ \boxed{mg(L-L\cos\theta)+mgL\sin\theta-mg(L-L\cos\theta)-mgL\sin\theta}$ 0,5 $\approx \frac{1}{2}kL^2\theta^2.$

2. Le Lagrangien est: $\mathcal{L} = T - U = 2mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kL^2\theta^2.$

$\frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{\theta}} \Longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{4m}\dot{\theta} + \frac{k}{4m}\theta = 0.}$ 0,5

3. L'équation est de la forme: $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$: avec $\boxed{\lambda = \frac{\alpha}{8m}.}$ 0,5 $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{4m}.}$ 0,5

A.N: $\boxed{\lambda^2 - \omega_0^2}$ 0,5 $= \boxed{\mathbf{0}.}$ 0,5 Le mouvement est donc en régime **critique.** 0,5

4. Pour avoir des oscillations il faut que $\boxed{\lambda^2 - \omega_0^2 < 0}$ 0,5 $\Rightarrow \frac{\alpha}{8m} < \sqrt{\frac{k}{4m}} \Rightarrow \alpha < \sqrt{16mk} = \boxed{\mathbf{16}\,\text{N.s/m.}}$ 0,5

5. $\boxed{Ae^{-\lambda(t+2T)} = \frac{1}{7}Ae^{-\lambda t}.}$ 0,5 $\Longrightarrow \boxed{2\lambda T = \ln 7}$ 0,5 $\Longrightarrow \boxed{\frac{4\pi\lambda}{\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}} = \ln 7}$ 0,5

$\Longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{\omega_0\ln 7}{\sqrt{(4\pi)^2+(\ln 7)^2}}}$ 0,5 **A.N**: $\boxed{\lambda \approx \mathbf{0{,}3}\,\text{s}^{-1}.}$ 0,5 $\Longrightarrow \alpha = 8m\lambda \approx \boxed{\mathbf{2{,}4}\,\text{N.s/m.}}$ 0,5

Questions de cours $q(t) = A\cos(\Omega t+\phi) \rightarrow \underline{q}(t) = Ae^{j(\Omega t+\phi)} = \underline{A}e^{j\Omega t}.$ 0,25

$F(t) = F_0\cos\Omega t \rightarrow \underline{F}(t) = F_0 e^{j\Omega t}.$ 0,25

$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{F_0}{a}\cos\Omega t \rightarrow \ddot{\underline{q}} + 2\lambda\dot{\underline{q}} + \omega_0^2\underline{q} = \frac{F_0}{a}e^{j\Omega t}.$ 0,5

$(-\Omega^2 + 2\lambda j\Omega + \omega_0^2)\underline{A} = \frac{F_0}{a} \Rightarrow \underline{A} = \frac{F_0/a}{\omega_0^2-\Omega^2+2j\lambda\Omega} \Rightarrow A = \frac{F_0/a}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2}}$ 0,5 $\tan\phi = -\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}.$ 0,5