UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES

DEPARTEMENT DE GENIE DES PROCEDES

Support de cours de transfert de chaleur par conduction

3éme Année Génie des Procédés

Dr:CHENNOUF Nasreddine

OUARGLA 2014

Sommaire

	page
Introduction générale	1
1-1-Relation entre le transfert de chaleur et la thermodynamique	03
1-2-Définitions:	04
1-2-1Champ de température	04
1-2-2 Flux de chaleur	04
1-2-4 Bilan d’énergie	04
1-2-5 Stockage d’énergie	05
1-2-6 Génération d’énergie	05
1-3 Les différents modes de transfert de chaleur	06
1-3-1 La conduction	06
1-3-2 La convection	07
1-3-3 Le Rayonnement	08
2 -Transferts de chaleur par conduction	10
2.1 Equation générale de la conduction	10
2.1.1 Les hypothèses simplificatrices	11
2.1.2 Formes de l'équation de conduction	11
2.1.3 Expressions analytiques de l'équation de la conduction	12
2.2 Conduction en régime permanent et unidirectionnel et λ constante	13
2.2.3 Mur simple en contacte avec deux fluides	17
2.2.4 Mur composite en contacte avec deux fluides	19
2.2.5 Cylindre creuse long (tube) à surface latérale isotherme	22
2.2.6 Cylindre creuse long en contacte avec deux fluides	24
2.2.7 Sphère creuse à surface isotherme	27

2.2.8 sphère creuse en contacte avec deux fluides 28

2.2.9 Isolation thermique 30

2.3 Conduction avec source de chaleur en régime permanent et unidirectionnel et λ constante 36

2.3.1 Mur d'épaisseur L (plaque) 36

a) Mur avec condition de Dirichlet (T imposé) 36

b) Mur avec condition de Fourier (Flux imposé) 38

2.3.2 Cylindre creuse 38

2.3.3 sphère creuse 39

2.3.4 Source dépendent des coordonnées 41

2.3.5 Cas particulier la conductivité dépendent de la température 41

2.4 Conduction en régime variable (transitoire ou instationnaire) 43

2.4.1 Corps thermiquement mince $B_i \leq 0{,}1 \quad T = T(t)$ 44

2.4.2 Corps thermiquement épais $B_i > 0{,}1$ 46

Introduction générale

De tous temps, les problèmes de transmission d'énergie, et en particulier de la chaleur, ont eu une importance déterminante pour l'étude et le fonctionnement d'appareils tels que les générateurs de vapeur, les fours, les échangeurs, les évaporateurs, les condenseurs, etc., mais aussi pour des opérations de transformations chimiques.

En effet, dans certains systèmes réactionnels, c'est la vitesse des échanges de chaleur et non la vitesse des réactions chimiques qui détermine le coût de l'opération (cas de réactions fortement endo- ou exothermique). En outre, de nos jours, par suite de l'accroissement relatif du prix de revient de l'énergie, on recherche dans tous les cas à obtenir le rendement maximal d'une installation pour une dépense d'énergie minimale.

Les problèmes de transfert de chaleur sont nombreux, et on peut essayer de les différencier par les buts poursuivis dont les principaux sont : l'augmentation de l'énergie transmise ou absorbée par une surface, l'obtention du meilleur rendement d'une source de chaleur, la réduction ou l'augmentation du passage d'un débit de chaleur d'un milieu à un autre.

Le potentiel qui provoque le transport et le transfert de l'énergie thermique est la température. Si deux points matériels placés dans un milieu thermiquement isolé sont à la même température, on peut affirmer qu'il n'existe aucun échange thermique global entre ces deux points dits en équilibre thermique (il s'agit bien d'un équilibre thermique car chacun des points matériels émet une énergie thermique nette de même module, mais de signe opposé).

Le transfert de chaleur au sein d'une phase ou, plus généralement, entre deux phases, se fait de trois façons :

a) Par conduction.

b) Par convection.

c) Par rayonnement.

Dans de nombreux problèmes de transformation d'énergie thermique, les trois modes de transfert de chaleur coexisteront mais, généralement, au moins une des trois formes pourra être négligée, ce qui simplifiera le traitement mathématique de l'appareil de transfert. Nous pouvons dire dès à présent, qu'aux températures ordinaires, le transport par rayonnement est négligeable, mais il peut devenir notable et prépondérant lorsque le niveau de température augmente.

En outre, signalons que certains transferts thermiques sont accompagnés d'un transfert de matière entre deux phases. Le flux de chaleur transféré en présence d'un changement de phase dépend de la nature et des propriétés physico-chimiques des phases en présence. C'est le cas de l'ébullition, de la condensation, mais aussi des problèmes d'humidification, de séchage, de cristallisation, etc.

Dans ce qui suit nous allons présenter, pour les trois types de transport de la chaleur, les lois générales qui les gouvernent. Puis nous traiterons, de manière simple, quelques applications où le mode de transport de chaleur étudié est prédominant

1-1-Relation entre le transfert de chaleur et la thermodynamique

La thermodynamique permet de prévoir la quantité totale d'énergie qu'un système doit échanger avec l'extérieur pour passer d'un état d'équilibre à un autre.

La thermique ou la thermocinétique se propose de décrire quantitativement dans l'espace et dans le temps, l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final.

La thermodynamique étudier les états d'équilibres

Le 1^{ére} principe de la thermodynamique: équivalence entre la chaleur et énergie

1 cal = 4,18 joule, la conservation d'énergie $C_{cédée} = Q_{absorbée}$

Le 2^{éme} principe de la thermodynamique: admet que la chaleur ou énergie thermique ne peut passer que d'un corps chaud vers un corps froid.

Le transfert thermique : étudier le mécanisme processus et la vitesse du transfert

- Calculer la distribution de la température au sein des corps
- Calculer le flux thermique J/s (W) chaleur échangée par unité de temps

Transfert = échange = transmission = propagation

Thermique = chaleur

Transfert thermique = transfert de chaleur

1-2-Définitions:

1-2-1Champ de température:

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température : $T = (x, y, z, t)$ La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. Nous distinguerons deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.

- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou instationnaire.

1-2-2 Flux de chaleur :

On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface S par unité de temps

$$\boxed{\emptyset = \frac{dQ}{dt} \quad \text{unité} \quad \left(\frac{J}{s}\right) = (W)} \tag{1.1}$$

1-2-3 Densité de flux:

C'est la quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur :

$$\boxed{q = \frac{\emptyset}{s} = \frac{1}{s}\frac{dQ}{dt} \quad \left(\frac{W}{m^2}\right)} \tag{1.2}$$

Où S est l'aire de la surface (m^2)

1-2-4 Bilan d'énergie

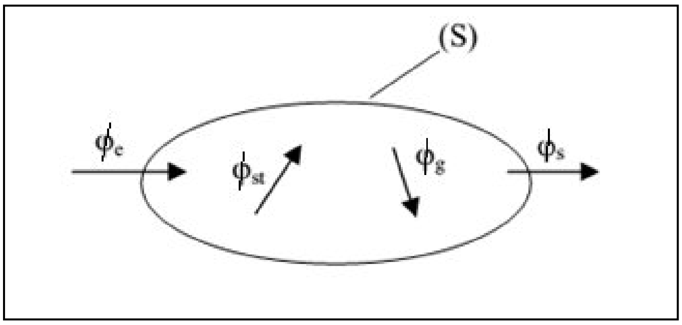
Il faut tout d'abord définir un système (S) par ses limites dans l'espace et il faut ensuite établir l'inventaire des différents flux de chaleur qui influent sur l'état du système et qui peuvent être :

ϕ_{st} flux de chaleur stocké

ϕ_g flux de chaleur généré

ϕ_e flux de chaleur entrant

ϕ_s flux de chaleur sortant



On applique alors le 1er principe de la thermodynamique pour établir le bilan d'énergie du système (S) :

$$\phi_e + \phi_g = \phi_{st} + \phi_s$$

1-2-5 Stockage d'énergie

Le stockage d'énergie dans un corps correspond à une augmentation de son énergie interne au cours du temps d'où (à pression constante)

$$\boxed{\emptyset_{st} = \rho V C_p \frac{\partial T}{\partial t}} \qquad \text{(W)} \qquad (1.3)$$

Avec: $\emptyset_{st}$ Flux de chaleur stocké (W)

ρ Masse volumique (kg m^{-3})

V Volume (m^3)

C_p Chaleur massique (J kg^{-1}°C^{-1})

T Température (°C)

t Temps (s)

1-2-6 Génération d'énergie

Elle intervient lorsqu'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, mécanique, nucléaire) est convertie en énergie thermique. Nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$\boxed{\emptyset_g = \dot{q} V} \quad \text{(W)} \qquad (1.4)$$

Avec: $\emptyset_g$ Flux d'énergie thermique générée (W)

$\dot{q}$ Densité volumique d'énergie générée (W m^{-3})

V Volume (m^3)

1-3 Les différents modes de transfert de chaleur

Il existe trois modes de transfert de chaleur: La Conduction, La Convection, Le Rayonnement.

1-3-1 La conduction:

a)C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaques, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température.

La propagation de la chaleur de la conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts: Une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres.

b) Echange de chaleur entre deux points d'un solide, ou encore d'un fluide immobile et opaque.

Loi de Fourier:

La relation fondamentale de la transmission de chaleur par conduction a été proposée par le savant Français J.B.J.Fourrier en 1882. La densité de flux de chaleur est proportionnelle au gradient de température. $\boxed{\vec{q} = -\lambda \, \overrightarrow{grad} \, (T)}$

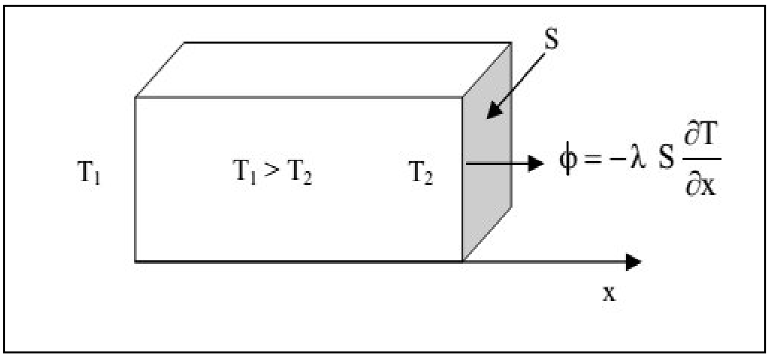
Ou sous forme algébrique $\boxed{\emptyset = -\lambda S \frac{dT}{dx}}$ (W) (1.5)

$\emptyset$: Flux de chaleur par conduction (W)

λ: Conductivité thermique du milieu (W/m °C)

x : variable d'espace dans la direction du flux (m)

S : Aire de la section de passage du flux de chaleur (m^2)



λ Varie avec la température le cas des solides

λ Varie avec la pression le cas des gaz et liquides

On trouvera dans le tableau ci-après les valeurs de la conductivité thermique λde certains matériaux parmi les plus courants.

matériaux	**Conductivité thermique (W/m °C)**	**remarques**
gaz	0,0006 à 0,18	Mauvais conducteurs
air	0,026	
Liquides non métalliques	0,1 à 1	Conducteurs moyens
eau	0,6	
Solides métalliques	10 à 400	Excellents conducteurs
cuivre	390	
acier	16	
Matériaux non métalliques	0,004 à 4	Conducteurs moyens
verre	1,2	
béton	09,2	
bois	0,23	
Laine de verre	0,04	Mauvais conducteurs (isolants thermiques)
Polystyrène expansé	0,004	

1-3-2 La convection:

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide.

Selon la nature du mécanisme qui provoque le mouvement du fluide on distingue:

- La convection libre ou naturelle: le fluide est mise en mouvement sous le seul effet des différences de la masse volumique résultant des différences de températures sur les frontières et d'un champ de force extérieur (le pesanteur).
- La convection forcée: le mouvement du fluide est induit par une cause indépendante des différences de température (pompe, ventilateur).

Loi de Newton:

La loi fondamentale de la convection a été proposée par le savant Anglais Isaak Newton en 1701. Le flux de chaleur transmis par convection entre une surface et un fluide peut être évalué par la relation:

$$\boxed{\emptyset = hS(T_p - T_\infty)} \tag{1.6}$$

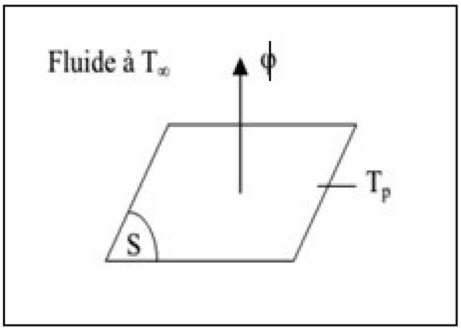
$\emptyset$: Flux de chaleur transmis par convection (W)

h : coefficient de transmis de chaleur par convection (W/m^2°C)

T_∞: Température de fluide loin de la surface solide (°C)

T_p : Température la surface solide (°C)

S: Aire de la surface de contacte solide fluide (m^2)



Remarque:

La valeur numérique de h dans un système, dépend de la forme géométrique de la surface, de la vitesse, et également des propriétés physiques du fluide, et souvent même de la différence de température. En fait, ces quantités ne sont pas nécessairement constantes à la surface, aussi le coefficient d'échange de chaleur par convection peut varier d'un point à un autre.

1-3-3 Le Rayonnement:

Tout corps opaque ou partiellement opaque porté a une température T > 0 K rayonne de l'énergie de touts les directions cette énergie étant transparente sous formes d'ondes électromagnétiques sa propagation n'exige pas de support matériel ce rayonnement n'est pas chaude pour lui-même mais l'énergie qu'il transporte peut se transformer totalement ou partiellement en chaleur dés qu'il attient un obstacle opaque ou partiellement opaque.

C’est un transfert d’énergie électromagnétique entre deux surfaces (même dans le vide). Dans les problèmes de conduction, on prend en compte le rayonnement entre un solide et le milieu environnant et dans ce cas nous avons la relation :

$$\boxed{\emptyset = \sigma\epsilon_p S\left(T_p{}^4 - T_\infty{}^4\right)} \text{ (W)} \tag{1.7}$$

Avec : ϕ Flux de chaleur transmis par rayonnement (W)

σ :Constante de Stephan- Boltzmann ($5{,}67.10^{-8}$W $m^{-2}K^{-4}$)

εp : Facteur d'émission de la surface

Tp : Température de la surface (K)

T∞ : Température du milieu environnant la surface (K)

S : Aire de la surface (m^2)

Loi de Stefan- Boltzmann:

D'après les deux savants Australiens J.Stefan qui en 1879 a établi expérimentalement l'équation:

$$\boxed{\emptyset = \sigma \epsilon_p S {T_p}^4} \tag{1.8}$$

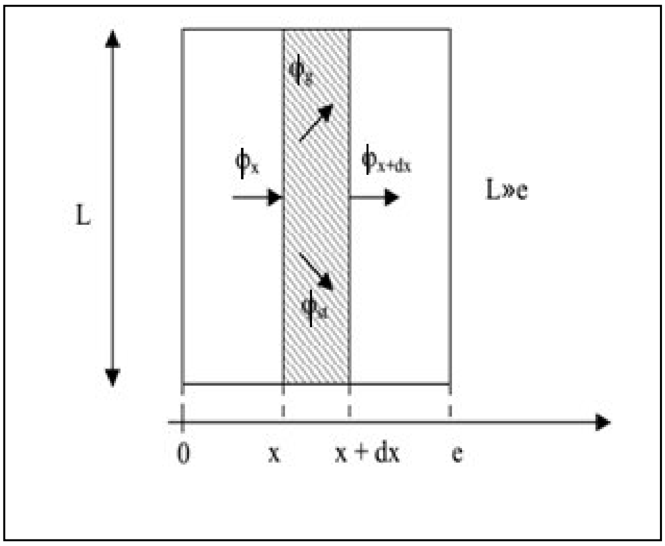
Puis démontrée théoriquement par L.Boltzmann en 1884 l'examen de cette équation montre que:

La quantité de chaleur transmise par rayonnement à partir d'un corps noir dont la surface est portée à une température supérieure au zéro absolue est proportionnelle à la quatrième puissance de la température absolue

2 -Transferts de chaleur par conduction

2.1 Equation générale de la conduction

Dans sa forme monodimensionnelle, elle décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan. Considérons un système d'épaisseur dx dans la direction x et de section d'aire S normalement à la direction Ox. Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :



$$\Phi_x + \phi_g = \phi_{x+dx} + \phi_{st}$$

Avec

$$\emptyset_x = -\lambda S \frac{dT}{dx}$$

$$\emptyset_g = \dot{q} S dx$$

$$\emptyset_{x+dx} = -\lambda S \frac{dT}{dx}_{x+dx}$$

$$\emptyset_{st} = \rho S dx C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par dx nous obtenons

$$\frac{\lambda S \frac{dT}{dx}_{x+dx} - \lambda S \frac{dT}{dx}_{x}}{dx} + \dot{q} S = \rho S C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

on a

$$\boxed{f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{q}S = \rho S C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

et dans le cas tridimensionnel, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas le plus général :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}} \qquad (2.1)$$

2.1.1 Les hypothèses simplificatrices

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

a) Si le milieu est isotrope : $\lambda x = \lambda y = \lambda z$

b) Si λ est constante

L'équation 2.1 devient (coordonnée cartésienne)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{\rho C_p}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\Delta T + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{\rho C_p}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\boxed{\Delta T + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}} \qquad (2.2)$$

Le rapport $a = \frac{\lambda}{\rho C_p}$ est appelé la diffusivité thermique (m^2/s)

2.1.2 Formes de l'équation de conduction : pour les cas particuliers l'équation 2.2 devient

- Milieu avec source interne, en régime permanant $\boxed{\Delta T + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0}$ **Equation de Poisson**
- Milieu sans source interne, en régime permanant $\boxed{\Delta T = 0}$ **Equation de Laplace**
- Milieu sans source interne, en régime variable $\boxed{\Delta T = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}}$ **Equation de Fourier**

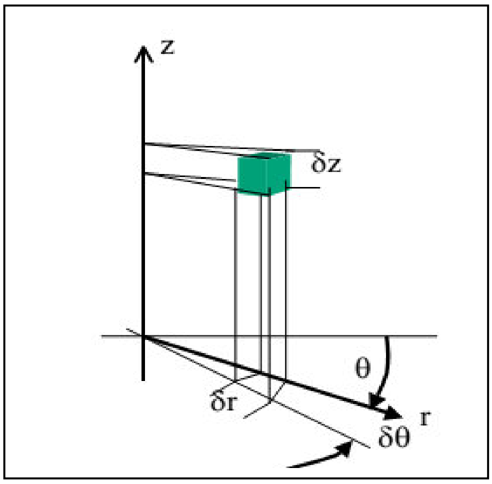
2.1.3 Expressions analytiques de l'équation de la conduction :

Pour les mêmes hypothèses simplificatrices

a) Coordonnées cartésienne (x,y,z) :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\frac{\dot{q}}{\lambda}=\frac{\rho C_p}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t}}$$

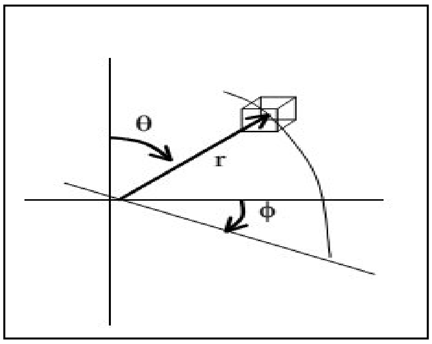
b) Coordonnées cylindrique (r,θ,z) :



Dans le cas ou T ne dépend que de (r et t) ↔ $\frac{\partial T}{\partial \theta}=\frac{\partial T}{\partial z}=0$

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\dot{q}}{\lambda}=\frac{\rho C_p}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t}} \qquad (2.3)$$

c) Coordonnées sphérique (r,θ,$\emptyset$) :



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\emptyset \\ y = r\sin\theta\sin\emptyset \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \emptyset^2}\right)+\frac{\dot{q}}{\lambda}=\frac{\rho C_p}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t}$$

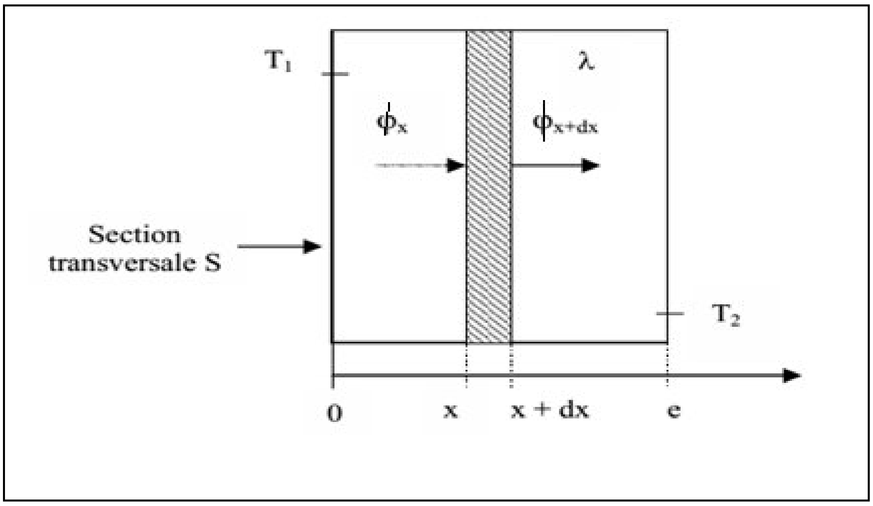
Dans le cas ou T ne dépend que de (r et t) ↔ $\frac{\partial T}{\partial \theta}=\frac{\partial T}{\partial \theta}=0$

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\dot{q}}{\lambda}=\frac{\rho C_p}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t}} \qquad (2.4)$$

2.2 Conduction en régime permanent et unidirectionnel et λ constante:

2.2.1 Mur simple:

On considère un mur d'épaisseur e, de conductivité thermique λ, et de grandes dimensions transversales dont les faces extrêmes sont à des températures T_1et T_2($T_1 > T_2$), et qu'il n'y a pas de génération ni de stockage d'énergie.



En effectuant un bilan thermique sur le système (S) constitué par la tranche de mur comprise entre les abscisses x et x + dx il vient :

L'équation générale de la conduction $\boldsymbol{\Delta T + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}}$

Le régime est permanent : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

Pas de source de chaleur $\dot{q} = 0$

C'est l'équation de Laplace

$$\Delta T = \mathbf{0} \leftrightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \rightarrow \frac{dT}{dx} = A \text{ et } T(x) = Ax + B$$

Avec les conditions aux limites: T (x = 0) = T_1 et T (x = e) = T_2

$$T_1 = B \text{ et } T(x = e) = T_2 = Ae + T_1$$

d'où : $$\boxed{\mathbf{T(x) = T_1 - (x/e)(T_1 - T_2)}} \qquad (2.5)$$

L'équation (2.5) c'est la distribution de la température (Le profil de température)

La densité de flux de chaleur traversant le mur s'en déduit par la relation :

$$\emptyset = -\lambda S \frac{dT}{dx}$$

De (2.5) :

$$q = \frac{\emptyset}{S} = -\lambda\frac{dT}{dx} = \frac{\lambda}{e}\,(T_1 - T_2)$$

Le flux de chaleur $\boxed{\emptyset = \frac{\lambda S}{e}\,(T_1 - T_2)}$ (W) (2.6)

La densité de flux $\boxed{q = \frac{\lambda}{e}\,(T_1 - T_2)}$ (W/m^2) (2.7)

La résistance thermique $\emptyset = \frac{\lambda S}{e}\,(T_1 - T_2) = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{\lambda S}} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{th}}$

$$\Rightarrow \boxed{R_{th} = \frac{e}{\lambda S}} \qquad (2.8)$$

<u>Exemple 2.1:</u>

Calculer le flux de chaleur par conduction à travers un mur de pierre d'épaisseur 0.35 m, de hauteur 3.5 m et de longueur 5.7 m. les températures des faces sont respectivement 22°C et 7°C. λ =0.805 kcal/h.m.°C.(Le régime est permanent, pas de source de chaleur, unidirectionnelle)

<u>Solution:</u>

Le régime est permanent, pas de source de chaleur, unidirectionnelle : $\Delta \boldsymbol{T} = \mathbf{0}$

Pour calculer le flux de chaleur par conduction nous utilisons l'équation (2.6):

$$\emptyset = \frac{\lambda S}{e}\,(T_1 - T_2) = \frac{0{,}805 \times 5{,}7 \times 3{,}5}{0{,}35}\,(22 - 7) = 688{,}275\,\frac{\text{kcal}}{\text{h}} = 0{,}79916\ kW$$

<u>Exemple 2.2:</u>

Calculer la densité du flux de chaleur qui traverse un panneau d'épaisseur 2cm et de conductivité thermique λ =45 W/ m.°C, les températures aux face de panneau sont T1=80°C et T2=20°C.

<u>Solution:</u>

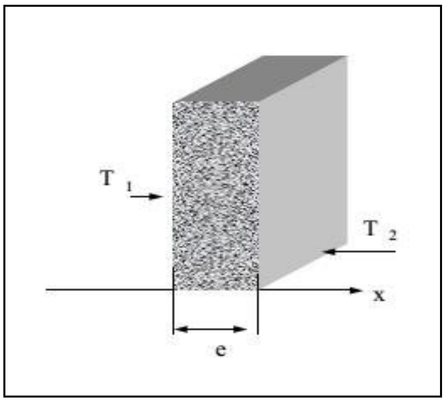
Le régime est permanent, pas de source de chaleur, unidirectionnelle : $\Delta \boldsymbol{T} = \mathbf{0}$

Pour calculer la densité de flux de chaleur par conduction nous utilisons l'équation (2.7):

$$q = \frac{\lambda}{e}\,(T_1 - T_2) = \frac{45}{0{,}02}\,(80 - 20) = 135\ kW/m^2$$

Exemple 2.3:

Un mur simple dans un état thermique stable et sans puissance calorifique (pas de production de chaleur). Le mur est mince d'un épaisseur 50 mm , le flux de chaleur est parallèle à la direction x. Les températures des deux côtés sont différentes T_1=100°C et T_2=90°C. Calculer le profil de la température et la densité du flux de chaleur, (λ =0.92 W/m.°C et la surface (30mx2m)).



Solution:

Le régime est permanent, pas de source de chaleur, unidirectionnelle : $\Delta \boldsymbol{T} = \mathbf{0}$

C'est l'équation de Laplace

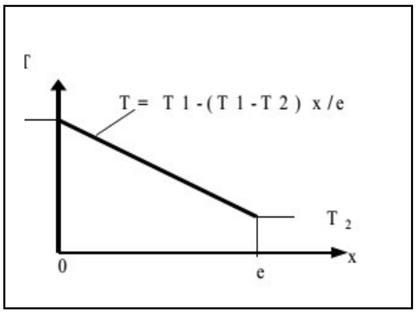
$$\Delta \boldsymbol{T} = \mathbf{0} \leftrightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \rightarrow \frac{dT}{dx} = A \; et \; T(x) = Ax + B$$

Avec les conditions aux limites: T (x = 0) = T_1= 100 et T (x = e) = T_2= 90

B= 100 et T (x = e) = 90 = Ae + 100

d'où : $\mathbf{T(x) = T_1 - (x/e)(T_1 - T_2)}$

$$\mathbf{T(x) = 100 - 200x}$$



Pour calculer la densité de flux de chaleur par conduction nous utilisons l'équation (2.7):

$$q = \frac{\lambda}{e}(T_1 - T_2) = \frac{0{,}92}{0{,}05}(100 - 90) = 184 \; W/m^2$$

2.2.2 Analogie entre le flux thermique et le flux électrique

Deux systèmes sont dits être analogiques lorsqu'ils obéissent aux mêmes équations et possèdent aussi des conditions aux limites identiques. Cela signifie que l'équation traduisant un des systèmes peut être transformée, pour exprimer le deuxième système, par simple changement des symboles des différents variables. Par exemple le flux de chaleur à travers une résistance thermique et analogique à l'intensité de courant dans un circuit électrique à courant continu, car ces deux types d'écoulement obéissent aux mêmes équations.

unité	**Transfer thermique**	↔	**Courant électrique**	**unité**
°C,K	Température T		Potentiel V ou U	V
J	Chaleur φ		Charge électrique q	Coulomb
W	Flux thermique $\emptyset = \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dt}}$		Intensité électrique $\mathrm{I} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{dt}}$	A
W/m°C	Conductivité thermique λ		Conductivité électrique γ	$\Omega^{-1}m^{-1}$
W/m^2	Densité de flux. $\vec{q}$		Densité de courant $\vec{j}$	A/m^2
	$\emptyset$ constant (régime permanent) $T_1 - T_2 = R_{th}\emptyset$		I constant (courant continu) $V_1 - V_2 = RI$	
°C/W	R_{th} résistance thermique $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ conduction $R_{th} = \frac{1}{hS}$ convection		R résistance électrique $R_{th} = \frac{l}{\gamma S}$	Ω

On retient la définition générale de la résistance thermique: $\boxed{\boldsymbol{R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\emptyset_{th}}}}$ (2.8)

Les analogies établies ci-dessus, montrent que les lois d'associations des résistances thermiques sont les mêmes que celles des résistances électriques.

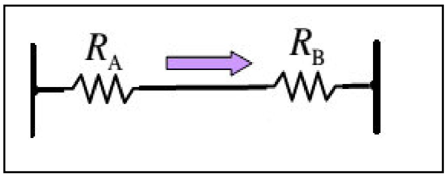
L'analogie électrique est très dans les études des phénomènes ou intervenant des combinaisons des résistances. On y applique souvent les lois des circuits en série et en parallèles.

La résistance équivalente en série

La résistance équivalente d'un ensemble de résisteurs branchés en série est égale à la somme des résistances des résisteurs en série :

$$R_{eq} = \sum_i R_i$$

Résistance équivalente en série: $\boxed{R_{éq} = R_A + R_B}$ (2.10)

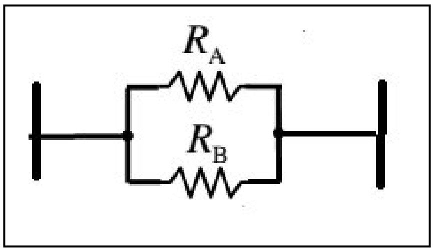


La résistance équivalente en parallèle

La résistance équivalente d'un ensemble de résisteurs branchés en parallèle est égale à l'inverse de l'addition des résistances des résisteurs en parallèle :

$$R_{eq} = \left[\sum_i \frac{1}{R_i}\right]^{-1}$$

Résistance équivalente en parallèle: $\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}}$ (2.11)



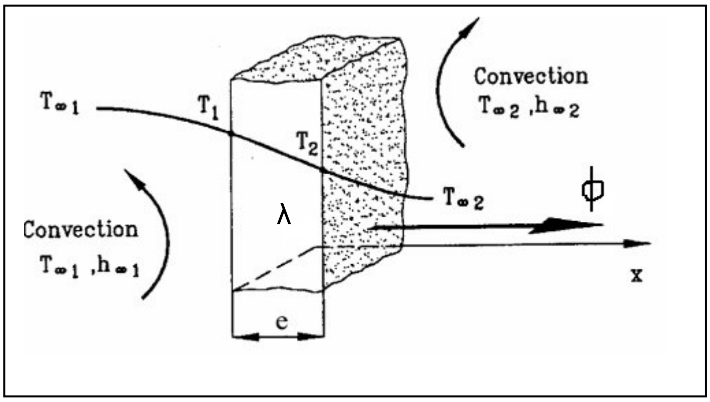
2.2.3 Mur simple en contacte avec deux fluides:

Hypothèses :

⇒Régime permanent

⇒Pas de flux de rayonnement

⇒Pas de génération de chaleur



D'après les hypothèses ⇒ $\emptyset$ est constante

$$\boxed{\emptyset_{convection\ \ 1} = \emptyset_{cnduction} = \emptyset_{convection\ \ 2}} \qquad (2.12)$$

$$\emptyset_{\text{convection} \quad 1} = h_1 S(T_{\infty 1} - T_1) = \frac{(T_{\infty 1} - T_1)}{\frac{1}{h_1 S}} = \frac{(T_{\infty 1} - T_1)}{R_{th\ conv\ 1}}$$

$$\emptyset_{\text{conduction}} = \frac{\lambda S}{e}(T_1 - T_2) = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{\lambda S}} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{th\ cond}}$$

$$\emptyset_{\text{convection} \quad 2} = h_2 S(T_2 - T_{\infty 2}) = \frac{(T_2 - T_{\infty 2})}{\frac{1}{h_2 S}} = \frac{(T_2 - T_{\infty 2})}{R_{th\ conv\ 2}}$$

(2.11) $\Rightarrow \frac{(T_{\infty 1} - T_1)}{\frac{1}{h_1 S}} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{\lambda S}} = \frac{(T_2 - T_{\infty 2})}{\frac{1}{h_2 S}} \Rightarrow \frac{(T_{\infty 1} - T_1)}{R_{th\ conv\ 1}} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{th\ cond}} = \frac{(T_2 - T_{\infty 2})}{R_{th\ conv\ 2}}$

On a $\boxed{X = \frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F} = \frac{G}{H} \Rightarrow X = \frac{A+C+E+G}{B+D+F+H}}$ (2.13)

On utilisé cette relation :

$$\emptyset = \emptyset_{\text{convection} \quad 1} = \emptyset_{\text{cnduction}} = \emptyset_{\text{convection} \quad 2}$$

(2.12) $\Rightarrow \emptyset = \frac{(T_{\infty 1} - T_1)}{R_{th\ conv1}} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{th\ cond}} = \frac{(T_2 - T_{\infty 2})}{R_{th\ conv2}}$

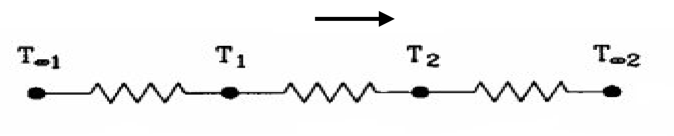
$$= \frac{(T_{\infty 1} - T_1) + (T_1 - T_2) + (T_2 - T_{\infty 2})}{R_{th\ conv\ 1} + R_{th\ cond} + R_{th\ conv\ 2}}$$

$$\boxed{\emptyset = \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{R_{th\ conv\ 1} + R_{th\ cond} + R_{th\ conv\ 2}} = \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{R_{equ}}} \quad (2.14)$$

$$\boxed{R_{th\,equ} = R_{th\ conv\ 1} + R_{th\ cond} + R_{th\ conv\ 2}}$$

$$\boxed{R_{th\,equ} = \frac{1}{h_1 S} + \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{h_2 S}} \quad (2.15)$$

Le schéma électrique équivalent est le suivant :



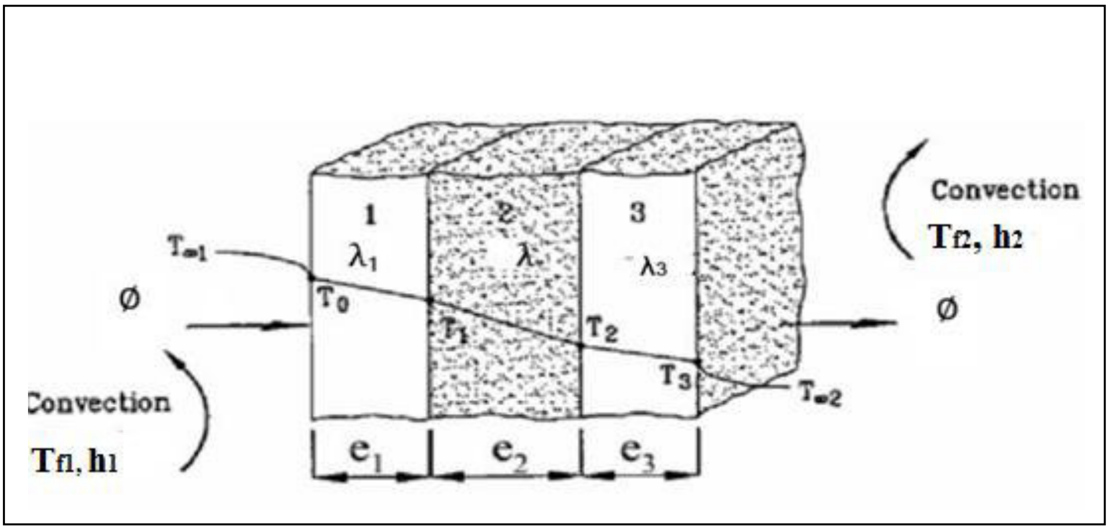
Pour le profil de la température pour le point x de l'épaisseur (e) on a :le flux de chaleur est constante pour chaque point

$$\emptyset = \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{R_{th_{equ}}} = \frac{(T_{\infty 1} - T(x))}{R_{th\ conv\ 1} + R_{th\ cond}\ (x)} = \frac{(T_{\infty 1} - T(x))}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{x}{\lambda S}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T(x) = T_{\infty 1} - \frac{R_{th\ conv\ 1} + R_{th\ cond}\ (x)}{R_{th_{equ}}} (T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}$$

Ou $R_{th\ cond}\ (x) = \frac{x}{\lambda S}$

2.2.4 Mur composite en contacte avec deux fluides:



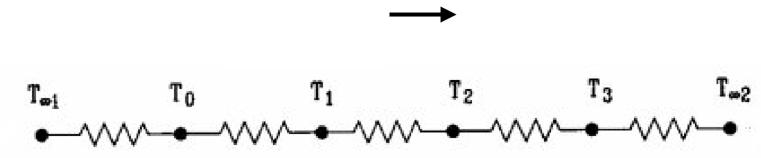
C’est le cas des murs réels constitués de plusieurs couches de matériaux différents et où le ne connaît que les températures T_{f1} et T_{f2} des fluides en contact avec les deux faces du mur de surface latérale S, Pour les mêmes hypothèses on a le flux est constante:

$$\emptyset_{conv\ 1} = \emptyset_{cnd\ 1} = \emptyset_{cnd\ 2} = \emptyset_{cnd\ 3} = \cdots \ldots\ldots = \emptyset_{cndN} = \emptyset_{conv\ 2}$$

$$\emptyset = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{th_{equ}}}$$

$$\boxed{R_{th_{equ}} = \frac{1}{h_1 S} + \frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \frac{e_3}{\lambda_3 S} + \cdots \frac{e_N}{\lambda_N S} + \frac{1}{h_2 S}}$$

Le schéma électrique équivalent est le suivant :



$R_{th\ conv\ 1}$ $R_{th\ cond\ 1}$ $R_{th\ cond\ 2}$ $R_{th\ cond\ 3}$ $R_{th\ conv\ 2}$

Pour un mur de N couches :

$$\boxed{R_{th\,equ} = \frac{1}{h_1 S} + \frac{1}{S}\sum_i^N \frac{e_i}{\lambda_i} + \frac{1}{h_2 S}} \quad (2.16)$$

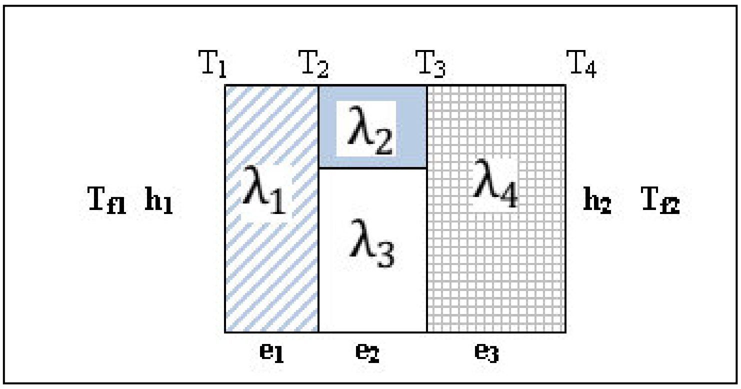
Exemple 2.4:

Soit la structure illustrée sur la figure ci-dessous:

a) calculez la résistance thermique de chaque couche.

b) quelle est la résistance équivalente.

Le régime est permanent, pas de source de chaleur, unidirectionnelle, la surface d'échange (S)



Solution:

a) D'après les hypothèses ⇒ ∅ est constante

$$\emptyset_{conv\ \ 1} = \emptyset_{cnd\,1} = \emptyset_{cnd\,2} = \emptyset_{cnd\,3} = \emptyset_{conv\ \ 2}$$

$$\emptyset_{convection\ \ 1} = h_1 S(T_{f1} - T_1) = \frac{(T_f - T_1)}{\frac{1}{h_1 S}} = \frac{(T_f - T_1)}{R_{th\ conv\ 1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{th\,conv1} = R_1 = \frac{1}{h_1 S}}$$

$$\emptyset_{\text{cond }1} = \frac{\lambda_1 S}{e_1}(T_1 - T_2) = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e_1}{\lambda_1 S}} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{th\ cond\ 1}} \Rightarrow \boxed{R_{th\ cond\ 1} = R_2 = \frac{e_1}{\lambda_1 S}}$$

$$\emptyset_{\text{cond }2} = \frac{\lambda_2 S}{e_2}(T_2 - T_3) + \frac{\lambda_3 S}{e_2}(T_2 - T_3) = \left(\frac{\lambda_2 S}{e_2} + \frac{\lambda_3 S}{e_2}\right)(T_2 - T_3)$$

$$= \frac{(T_2 - T_3)}{R_{th\ cond\ 2}} \Rightarrow \boxed{R_{th\ cond\ 2} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{e_2}{\lambda_2 S}} + \frac{1}{\frac{e_2}{\lambda_3 S}}}}$$

C'est le cas des résistances thermique en parallèle

$$\boxed{\frac{1}{R_{th\ cond\ 2}} = \frac{1}{\frac{e_2}{\lambda_2 S}} + \frac{1}{\frac{e_2}{\lambda_3 S}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

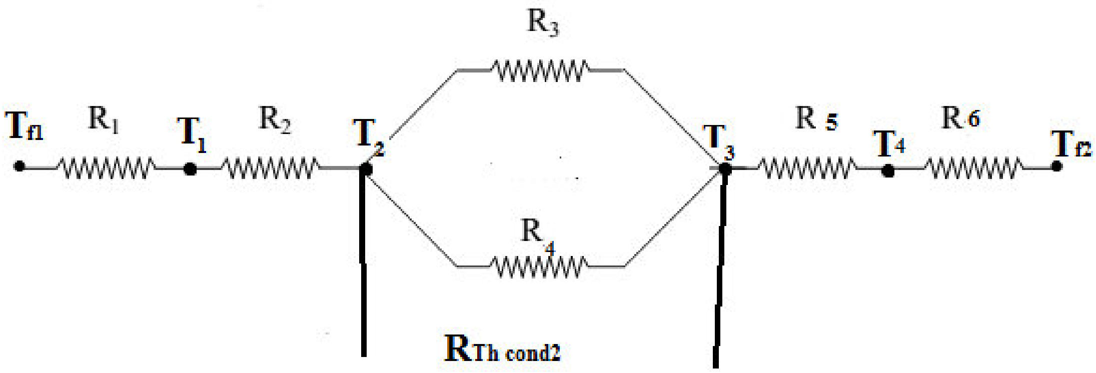
$$R_3 = \frac{e_2}{\lambda_2 S} \quad et\ R_4 = \frac{e_2}{\lambda_3 S}$$

$$\emptyset_{\text{cond }3} = \frac{\lambda_4 S}{e_3}(T_3 - T_4) = \frac{(T_3 - T_4)}{\frac{e_3}{\lambda_4 S}} = \frac{(T_3 - T_4)}{R_{th\ cond\ 1}} \Rightarrow \boxed{R_{th\ cond\ 1} = R_5 = \frac{e_3}{\lambda_4 S}}$$

$$\emptyset_{\text{convection }\ 2} = h_2 S(T_4 - T_{f2}) = \frac{(T_4 - T_{f2})}{\frac{1}{h_2 S}} = \frac{(T_4 - T_{f2})}{R_{th\ conv\ 2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{th\ conv2} = R_6 = \frac{1}{h_2 S}}$$

b) Le schéma électrique équivalent



$$\emptyset = \emptyset_{\text{conv } 1} = \emptyset_{\text{cnd } 1} = \emptyset_{\text{cnd } 2} = \emptyset_{\text{cnd } 3} = \emptyset_{\text{conv } 2} \Rightarrow \frac{(T_{f1} - T_1)}{R_1} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_2} = \frac{(T_2 - T_3)}{R_{th\ cond\ 2}} = \frac{(T_3 - T_4)}{R_5} = \frac{(T_4 - T_{f2})}{R_6}$$

$$\Rightarrow \emptyset = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_1 + R_2 + R_{th_{cond2}} + R_5 + R_6} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{equ}}$$

$$\Rightarrow R_{equ} = R_1 + R_2 + R_{th_{cond2}} + R_5 + R_6$$

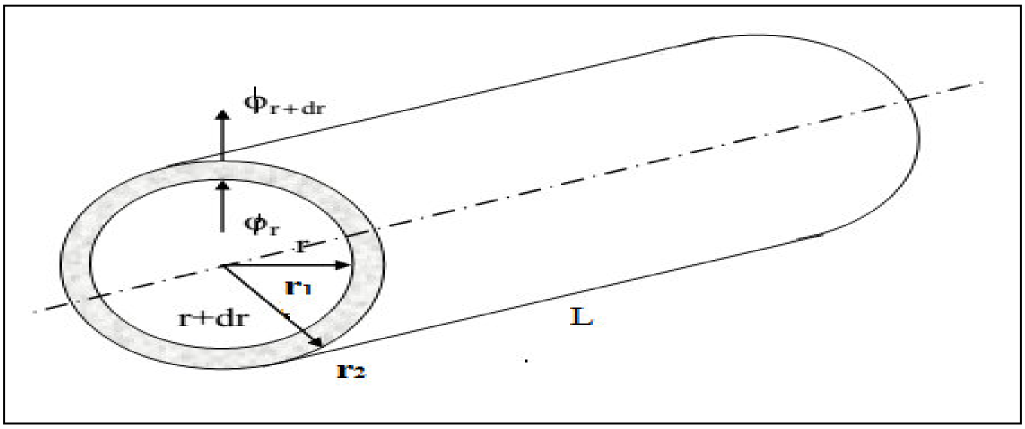
$$\boxed{R_{equ} = R_1 + R_{2} + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} + R_5 + R_6}$$

2.2.5 Cylindre creuse long (tube) à surface latérale isotherme

On considère un cylindre creux de conductivité thermique λ, de rayon intérieur r_1, de rayon extérieur r_2, de longueur L, les températures des faces internes et externes étant respectivement T_1, T_2 et que $T_1 > T_2$ On suppose que le gradient longitudinal de température est négligeable devant le gradient radial.

T = T(r) (car indépendant de θ et de z) $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$

Effectuons le bilan thermique du système constitué par la partie de cylindre comprise entre les rayons r et r + dr :



L'expression analytique de l'équation de la conduction pour les coordonnées cylindrique c'est l'équation (2.3):

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\dot{q}}{\lambda}=\frac{\rho C_p}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t}}$$

Cas stationnaire sans production de chaleur

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow r\frac{\partial T}{\partial r}=C \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r}=\frac{C}{r}$$

En intégrant $T(r) = Cln\, r + B$

Avec les conditions aux limites:

$r = r_1 \quad \Rightarrow \mathrm{T} = T_1 = Cln\, r_1 + B$

$r = r_2 \quad \Rightarrow \mathrm{T} = T_2 = Cln\, r_2 + B$

$$\Rightarrow \mathrm{C} = \frac{\mathrm{T_1}-\mathrm{T_2}}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \quad et\ B = T_1 - \frac{\mathrm{T_1}-\mathrm{T_2}}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}\ln r_1$$

$$\Rightarrow \boxed{T(r) = T_1 + \frac{\mathrm{T_1}-\mathrm{T_2}}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}\ln\frac{r}{r_1}} \tag{2.17}$$

Le profile de la température est logarithmique

La densité de flux de chaleur:

$$\mathrm{q} = \frac{\emptyset}{\mathrm{S}} = -\lambda\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dr}} = -\lambda\frac{(\mathrm{T_1}-\mathrm{T_2})}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}\frac{1}{r}$$

La surface d'échange de cylindre: $S(r) = 2\pi rL$

Le flux de chaleur : $\emptyset = \mathrm{qS} = -\lambda\frac{(\mathrm{T_1}-\mathrm{T_2})}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}\frac{1}{r}(2\pi rL) = 2\pi\lambda L\frac{(\mathrm{T_1}-\mathrm{T_2})}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$

$$\boxed{\emptyset = 2\pi\lambda L\frac{(\mathrm{T_1}-\mathrm{T_2})}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}} \tag{2.18}$$

$$\emptyset = 2\pi\lambda L\frac{(\mathrm{T_1}-\mathrm{T_2})}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{(\mathrm{T_1}-\mathrm{T_2})}{\mathrm{R_{th}}}$$

La résistance thermique pour le cas cylindrique:

$$\mathrm{R_{th}} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda L} \tag{2.19}$$

Exemple 2.5:

Calculer la perte de chaleur par conduction à travers la paroi d'un tube de cuivre de 10/12 (diamètre intérieur et extérieur en mm) et de longueur 15m. La température de la paroi interne est de 100°C, celle de la paroi externe 99,8°C. $\lambda\, cuivre = 330 \frac{Kcal}{h.m.°C}$

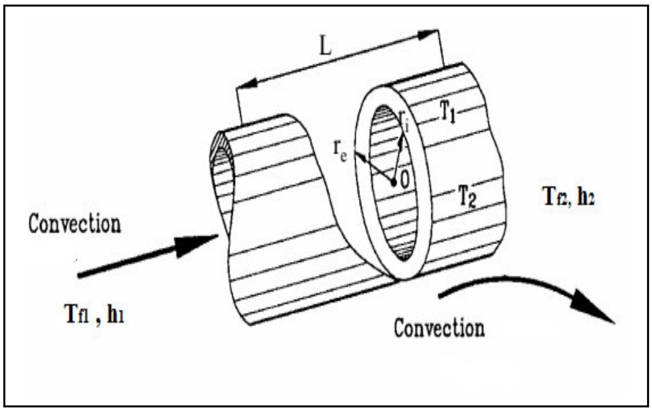
Solution:

On utilise l'équation (2.18)

$$\emptyset = 2\pi\lambda L \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = 2\pi.330.15 \frac{(100-99{,}8)}{\ln\left(\frac{12}{10}\right)} = \boxed{34120 \text{ Kcal/h} = 29{,}76 \text{ KW}}$$

2.2.6 Cylindre creuse long en contacte avec deux fluides:

C'est le cas pratique d'un tube recouvert d'une ou plusieurs couches de matériaux différents et où le ne connaît que les températures T_{f1}et T_{f2}des fluides en contact avec les faces interne et externe du cylindre ; $h_1$et h_2 sont les coefficients de transfert de chaleur par convection entre les fluides et les faces internes et externes :



Le régime est permanent, pas de source de chaleur

$$\emptyset = \emptyset_{\text{conv } 1} = \emptyset_{\text{cnd}} = \emptyset_{\text{conv } 2}$$

$$\emptyset_{\text{conv } 1} = h_1 S_1 \left(T_{f1} - T_1\right) = 2\pi r_1 L h_1 \left(T_{f1} - T_1\right) = \frac{\left(T_{f1} - T_1\right)}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_1}} = \frac{\left(T_{f1} - T_1\right)}{R_{thcv1}}$$

$$\Rightarrow R_{thcv1} = \frac{1}{2\pi r_1 L h_1}$$

$$\emptyset_{\text{cnd } 1} = 2\pi\lambda L \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{\text{thcod}}} \Rightarrow R_{\text{thcod}} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda L}$$

$$\emptyset_{\text{conv }2} = \text{h}_2\text{S}_2\,(T_2 - T_{f2}) = 2\pi r_2 L\text{h}_2(T_2 - T_{f2}) = \frac{(T_2 - T_{f2})}{\frac{1}{2\pi r_2 L\text{h}_2}} = \frac{(T_2 - T_{f2})}{R_{thcv2}}$$

$$\Rightarrow\ R_{thcv2} = \frac{1}{2\pi r_2 L\text{h}_2}$$

$$\emptyset = \emptyset_{\text{conv }1} = \emptyset_{\text{cnd}} = \emptyset_{\text{conv }2} \quad \Rightarrow \frac{(T_{f1} - T_1)}{\frac{1}{2\pi r_1 L\text{h}_1}} = \frac{(\text{T}_1 - \text{T}_2)}{\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda L}} = \frac{(T_2 - T_{f2})}{\frac{1}{2\pi r_2 L\text{h}_2}}$$

$$\boxed{\emptyset = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_1} + \frac{\ln\left(\frac{r2}{r1}\right)}{2\pi\lambda L} + \frac{1}{2\pi r_2 L h_2}} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{thcv1} + \text{R}_{\text{thcod}} + R_{thcv2}} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{thequ}}} \tag{2.20}$$

$$R_{thequ} = R_{thcv1} + \text{R}_{\text{thcod}} + R_{thcv2}$$

Le schéma électrique équivalent

Pour des cylindres concentriques :

$$\boxed{\emptyset = \frac{(T_{f1} - T_{f2})\,2\pi L}{\frac{1}{\text{h}_1 r_1} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\lambda_i} ln\frac{r_{i+1}}{r_i} + \frac{1}{\text{h}_2 r_2}}} \tag{2.21}$$

<u>Exemple 2.6:</u>

Soit une conduite de 50/60 mm de diamètre intérieure et extérieure, la longueur est de 50m. La température de la face interne est 200°C la conductivité du métal λ_1 = 52 kcal/h.m.°C. Elle est entourée d'une première couche de calorifuge de 3 cm d'épaisseur (λ_2 = 0.1 kcal/h.m.°C), puis d'une seconde couche d'une autre calorifuge de 6cm d'épaisseur (λ_3 = 0.05 kcal/h.m.°C).Cette conduite se trouve dans l'air à 20°C et le coefficient d'échange air paroi externe du calorifuge est h= 0.1 kcal/h.m^2.°C.

Calculer la quantité de chaleur perdue par heure et les températures aux différentes interfaces .

Solution:

r_1= 2,5 cm

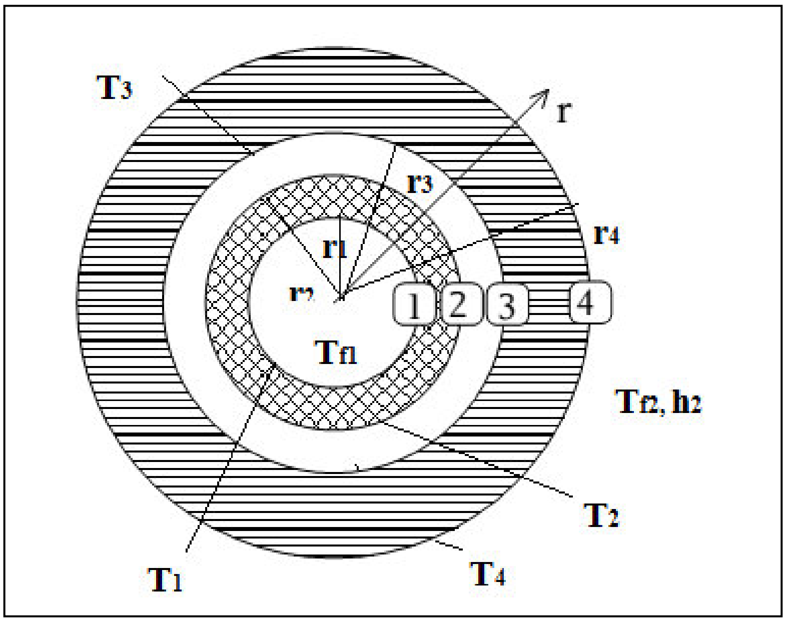
r_2= 3 cm

r_3= 6 cm

r_4= 12 cm

le régime est permanent

pas de source de chaleur



$\emptyset_{conv\,1}$ **= 0 parce que $T_{f1}=T_1$**

$$\emptyset = \emptyset_{cnd\,1} = \emptyset_{cnd\,2} = \emptyset_{cnd\,3} = \emptyset_{cnd\,4} = \emptyset_{conv\ 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \emptyset = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda_1 L}} = \frac{(T_3 - T_2)}{\frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi\lambda_2 L}} = \frac{(T_4 - T_3)}{\frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{2\pi\lambda_3 L}} = \frac{(T_4 - T_{f2})}{\frac{1}{2\pi r_4 L h_2}}$$

$$\emptyset = \frac{(T_1 - T_{f2})}{\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda_1 L} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi\lambda_2 L} + \frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{2\pi\lambda_3 L} + \frac{1}{2\pi r_4 L h_2}} = \frac{(T_1 - T_{f2})}{\sum R_{th}}$$

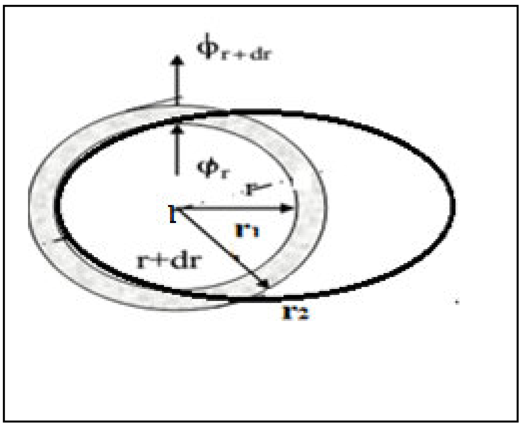
$$\boxed{\emptyset = \frac{(200-20)}{\frac{\ln\left(\frac{3}{2,5}\right)}{2\pi 52.50} + \frac{\ln\left(\frac{6}{3}\right)}{2\pi 0,1.50} + \frac{\ln\left(\frac{12}{6}\right)}{2\pi 0,05.50} + \frac{1}{2\pi 0,12.50.0,1}} = 2613,67\ Kcal/h}$$

On a $\emptyset = \frac{(T_1-T_2)}{\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda_1 L}} \Rightarrow T_2 = T_1 - \emptyset R_{thcond1} \Rightarrow \boxed{T_2 = 199,97°C}$

$$\emptyset = \frac{(T_3-T_2)}{\frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi\lambda_2 L}} \Rightarrow T_3 = T_2 - \emptyset R_{thcond2} \Rightarrow \boxed{T_3 = 142,27°C}$$

$$\emptyset = \frac{(T_4-T_3)}{\frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{2\pi\lambda_3 L}} \Rightarrow T_4 = T_3 - \emptyset R_{thcond3} \Rightarrow \boxed{T_4 = 26,87°C}$$

2.2.7 Sphère creuse à surface isotherme



On considère un sphère creux de conductivité thermique λ, de rayon intérieur r_1, de rayon extérieur r_2, , les températures des faces internes et externes étant respectivement T_1, T_2 et que $T_1 > T_2$ On suppose que

T = T(r) (car indépendant de θ et de $\emptyset$) $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \emptyset} = 0$

L'expression analytique de l'équation de la conduction pour les coordonnées cylindrique c'est l'équation (2.4)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \emptyset^2}\right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{\rho C_p}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Cas stationnaire sans production de chaleur

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow \left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) = A$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{A}{r^2} \Rightarrow T(r) = -\frac{A}{r} + B$$

Avec les conditions aux limites:

$$r = r_1 \quad \Rightarrow \mathrm{T} = T_1 = -\frac{A}{r_1} + B$$

$$r = r_2 \quad \Rightarrow \mathrm{T} = T_2 = -\frac{A}{r_2} + B$$

$$T_1 - T_2 = A\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{r_2 r_1}{r_1 - r_2}\right)(T_1 - T_2) \ et\ B = \frac{r_1 T_1 - r_2 T_2}{r_1 - r_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T(r) = T_1 + \frac{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}(T_1 - T_2)} \qquad (2.22)$$

La densité de flux de chaleur:

$$\mathrm{q} = \frac{\emptyset}{\mathrm{S}} = -\lambda\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dr}} = \lambda\frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}\frac{1}{r^2}$$

La surface d'échange de la sphère: $S(r) = 4\pi r^2$

Le flux de chaleur : $\emptyset = \mathrm{q}S\lambda \frac{(T_1-T_2)}{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}\frac{1}{r^2}(4\pi r^2) = 4\pi\lambda \frac{(T_1-T_2)}{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$

$$\boxed{\emptyset = 4\pi\lambda \frac{(T_1-T_2)}{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}} \tag{2.23}$$

$$\emptyset = 4\pi\lambda \frac{(T_1-T_2)}{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)} = \frac{(\mathrm{T}_1-\mathrm{T}_2)}{\mathrm{R_{th}}}$$

La résistance thermique pour le cas sphérique:

$$\boxed{\mathrm{R_{th}} = \frac{\mathrm{r}_2-\mathrm{r}_1}{4\pi\lambda \mathrm{r}_2\mathrm{r}_1}} \tag{2.24}$$

Exemple 2.7:

Une sphère creuse en aluminium de diamètre 50/60 mm, sa paroi interne maintenue à la température 70°C. La surface externe étant de 25°C, calculer le flux de chaleur par conduction à travers la paroi. $\lambda_{\mathrm{aluminium}}$ = 232,22 W/m.°C.

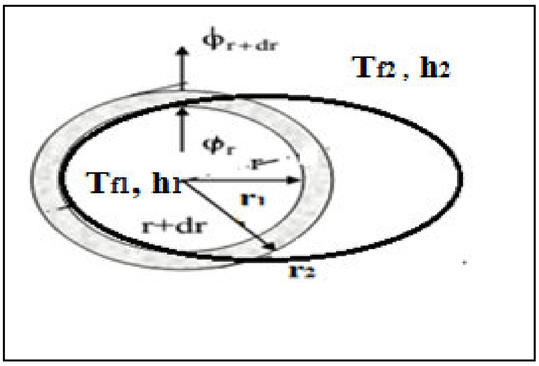
Solution:

On utilise l'équation (2.23)

$$\emptyset = 4\pi\lambda \frac{(T_1-T_2)}{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)} = 4\pi.\, 232{,}22 \frac{(70-25)}{\left(\frac{1}{0{,}025}-\frac{1}{0{,}03}\right)}\ 19{,}697\ K\,W$$

2.2.8 sphère creuse en contacte avec deux fluides:

Pour les mêmes hypothèses simplificatrices



$$\emptyset = \emptyset_{\mathrm{conv}\ 1} = \emptyset_{\mathrm{cnd}} = \emptyset_{\mathrm{conv}\ 2}$$

$$\emptyset_{\mathrm{conv}\ 1} = \mathrm{h}_1\mathrm{S}_1\left(T_{f1} - T_1\right) = 4\pi {r_1}^2\mathrm{h}_1\left(T_{f1} - T_1\right)$$

$$= \frac{\left(T_{f1} - T_1\right)}{\frac{1}{4\pi {r_1}^2\mathrm{h}_1}} = \frac{\left(T_{f1} - T_1\right)}{R_{thcv1}} \Rightarrow \boxed{R_{thcv1} = \frac{1}{4\pi {r_1}^2\mathrm{h}_1}}$$

$$\emptyset_{cnd\,1} = 4\pi\lambda \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2)}{\mathrm{R}_{thcod}} \boxed{\Rightarrow \ \mathrm{R}_{thcod} = \frac{\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1}{4\pi\lambda \mathrm{r}_2 \mathrm{r}_1}}$$

$$\emptyset_{conv\ 2} = \mathrm{h}_2 \mathrm{S}_2 \left(T_2 - T_{f2}\right) = 4\pi r_2{}^2 \mathrm{h}_2 \left(T_2 - T_{f2}\right) = \frac{\left(T_2 - T_{f2}\right)}{\frac{1}{4\pi r_2{}^2 \mathrm{h}_2}} = \frac{\left(T_2 - T_{f2}\right)}{R_{thcv2}}$$

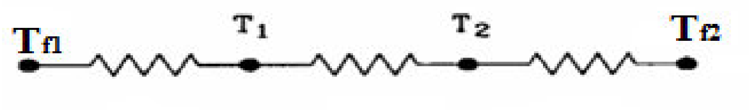
$$\Rightarrow \boxed{R_{thcv2} = \frac{1}{4\pi r_2{}^2 \mathrm{h}_2}}$$

$$\emptyset = \emptyset_{conv\ 1} = \emptyset_{cnd} = \emptyset_{conv\ 2} \ \Rightarrow \frac{\left(T_{f1} - T_1\right)}{\frac{1}{4\pi r_1{}^2 \mathrm{h}_1}} = \frac{(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2)}{\frac{\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1}{4\pi\lambda \mathrm{r}_2 \mathrm{r}_1}} = \frac{\left(T_2 - T_{f2}\right)}{\frac{1}{4\pi r_2{}^2 \mathrm{h}_2}}$$

$$\boxed{\emptyset = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{4\pi r_1{}^2 \mathrm{h}_1} + \frac{\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1}{4\pi\lambda \mathrm{r}_2 \mathrm{r}_1} + \frac{1}{4\pi r_2{}^2 \mathrm{h}_2}} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{thcv1} + \mathrm{R}_{thcod} + R_{thcv2}} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{thequ}}} \qquad (2.25)$$

$$R_{thequ} = R_{thcv1} + \mathrm{R}_{thcod} + R_{thcv2}$$

Le schéma électrique équivalent



$\mathrm{R}_{thconv1}$ R_{thcond} $\mathrm{R}_{thconv2}$

Pour des sphères concentriques :

$$\boxed{\emptyset = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{4\pi r_1{}^2 \mathrm{h}_1} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{r}_{i+1} - \mathrm{r}_i}{4\pi\lambda_i \mathrm{r}_{i+1} \mathrm{r}_i} + \frac{1}{4\pi r_2{}^2 \mathrm{h}_2}}} \qquad (2.26)$$

Exemple 2.8:

Un ballon en verre de conductivité thermique (λ= 0,8 W/m.°C) utilisé en laboratoire contenant une huile chaude est assimilé à une sphère dont les diamètres intérieur et extérieur sont respectivement 20 cm et 21 cm. L'huile et l'air environnant possèdent des coefficients de convection respectivement de h_h= 15W/m.°C, et h_a= 10W/m.°C.

Calculer le flux de chaleur perdu du ballon afin de garder la température de l'huile constante à 80°C. On prendra la température ambiante égale à 20°C et en négligera les pertes par le haut du ballon.

Solution:

C'est le cas d'une sphère creuse en contacte avec deux fluides

$$\boxed{\emptyset = \frac{(T_h - T_a)}{\frac{1}{4\pi r_1{}^2 h_h} + \frac{r_2 - r_1}{4\pi\lambda r_2 r_1} + \frac{1}{4\pi r_2{}^2 h_a}} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{thcv1} + R_{thcod} + R_{thcv2}} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{thequ}}}$$

Avec:

$$\boxed{R_{thcv1} = \frac{1}{4\pi r_1{}^2 h_1} = \frac{1}{4\pi (0,1)^2.15} = 0,53\ °C/W}$$

$$\boxed{R_{thcod} = \frac{r_2 - r_1}{4\pi\lambda r_2 r_1} = \frac{0,1 - 0,105}{4\pi 0,8.0,1.0,105} = 0,520°C/W}$$

$$\boxed{R_{thcv2} = \frac{1}{4\pi r_2{}^2 h_2} = \frac{1}{4\pi (0,105)^2.10} = 0,722\ °C/W}$$

$$\boxed{\emptyset = = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{thcv1} + R_{thcod} + R_{thcv2}} = \frac{(80 - 20)}{0,53 + 0,52 + 0,722} = 46\ W}$$

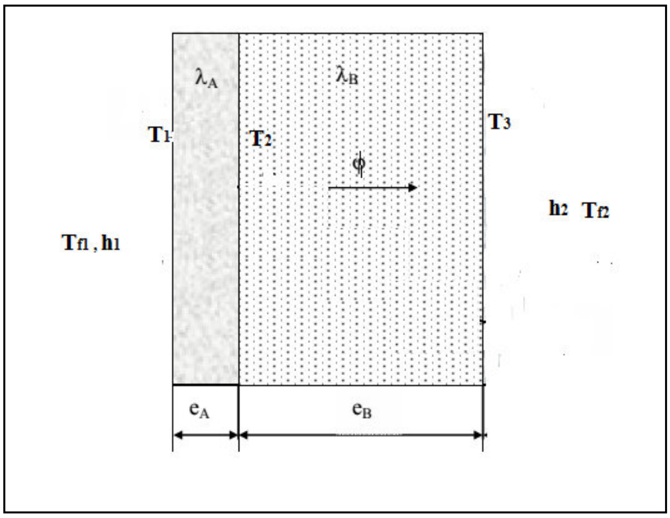
2.2.9 Isolation thermique

L'isolation thermique désigne l'ensemble des techniques mises en œuvre pour limiter les transferts de chaleur entre un milieu chaud et un milieu froid. L'isolation thermique est utilisé dans nombreux domaines incluant notamment : le bâtiment (maintien d'une température de confort à l'intérieur des habitations), l'industrie, l'automobile, et le textile.

Épaisseur critique:

Mur simple entre deux fluides,

l'épaisseur e_A constante et l'épaisseur e_B variable, le régime permanent pas de source de chaleur



$$\emptyset_{\text{conv }1} = \emptyset_{\text{cnd }1} = \emptyset_{\text{cnd }2} = \emptyset_{\text{conv }2}$$

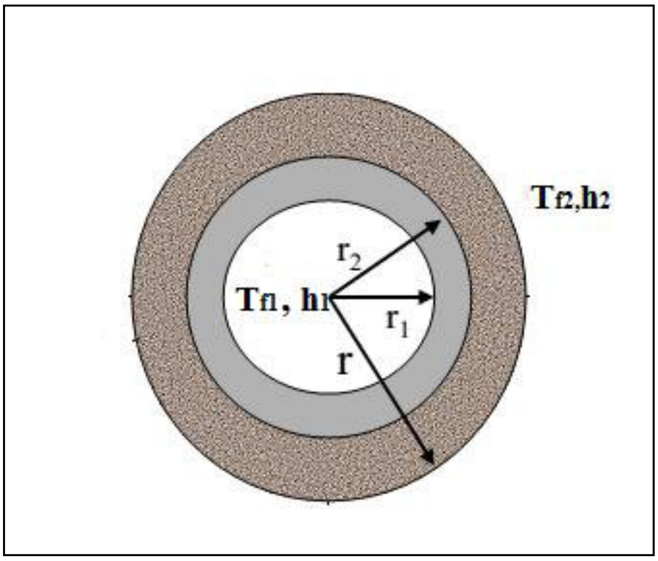
$$\emptyset = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{th_{equ}}}$$

$$R_{th_{equ}} = \frac{1}{h_1 S} + \frac{e_A}{\lambda_A S} + \frac{\mathbf{e_B}}{\lambda_B S} + \frac{1}{h_2 S}$$

Si on augmente $\mathbf{e_B}$ ⇒la résistance $\frac{\mathbf{e_B}}{\lambda_B S}$ augmente aussi, ainsi que la résistance équivalente $R_{th_{equ}}$ Se qui fais diminué le flux de chaleur

Le rayon critique d'un revêtement isolant

A. Cylindre



Un tube cylindrique composite de longueur L et de rayon $r_1$et r_2. Supposons qu'autour de ce tube soit placé un isolant de rayon extérieur r et de conductivité λ_3. h_1 et h_2 sont les coefficients de convection avec l'air ambiant et le fluide intérieur, le régime permanent pas de source de chaleur

$$\emptyset = \emptyset_{\text{conv }1} = \emptyset_{\text{cnd }1} = \emptyset_{\text{cnd }2} = \emptyset_{\text{conv }2}$$

$$\Rightarrow \frac{(T_{f1} - T_1)}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_1}} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda_1 L}} = \frac{(T_2 - T_3)}{\frac{\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)}{2\pi\lambda_2 L}} = \frac{(T_3 - T_{f2})}{\frac{1}{2\pi r L h_2}}$$

$$\emptyset = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_1} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda L} + \frac{\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)}{2\pi\lambda_2 L} + \frac{1}{2\pi r L h_2}}$$

$$= \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{thcv1} + R_{\text{thcod }1} + R_{\text{thcod }2} + R_{thcv2}} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{thequ}}$$

$\mathrm{R_{thcod\ 2}} = \frac{\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)}{2\pi\lambda_2 L}$ et $R_{thcv2} = \frac{1}{2\pi r L\,\mathrm{h}_2}$

Si on augmente l'épaisseur de la couche isolante r :

r augmente ⇒ $\mathbf{R_{thcod2}}$ augmente *et R_{thcv2} diminue*

Pour que flux de chaleur augmente il faut que ($\sum R_{th}$ ou R_{thequ}) diminue

⇒ Trouvons une valeur de r qui donne ($\sum R_{th}$ ou R_{thequ}) **Min**

$$\emptyset = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{2\pi r_1 L\mathrm{h}_1} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda_1 L} + \frac{\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)}{2\pi\lambda_2 L} + \frac{1}{2\pi r L\mathrm{h}_2}}$$

$$= \frac{2\pi L(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{r_1\mathrm{h}_1} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\lambda_1} + \frac{\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)}{\lambda_2} + \frac{1}{r\mathrm{h}_2}}$$

$$\Rightarrow R_{thequ} = \frac{1}{r_1\mathrm{h}_1} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\lambda_1} + \frac{\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)}{\lambda_2} + \frac{1}{r\mathrm{h}_2}$$

Posons $\frac{r}{r_2} = x$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{r_1\mathrm{h}_1} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\lambda_1} + \frac{\ln(\mathrm{x})}{\lambda_2} + \frac{1}{x r_2\mathrm{h}_2}$$

$$\Rightarrow \grave{f}(x) = \frac{1}{\lambda_2\mathrm{x}} - \frac{1}{x^2 r_2\mathrm{h}_2} = \frac{x r_2\mathrm{h}_2 - \lambda_2}{x^2 r_2\mathrm{h}_2\lambda_2}$$

$$\Rightarrow \grave{f}(x) = 0 \ \Rightarrow \mathrm{x} = \frac{\lambda_2}{r_2\mathrm{h}_2} \ \Rightarrow \frac{r}{r_2} = \frac{\lambda_2}{r_2\mathrm{h}_2}$$

$$\boxed{\Rightarrow r(critique) = \frac{\lambda_2}{\mathrm{h}_2}} \tag{2.27}$$

C'est le rayon critique qui donne la valeur max du flux de chaleur Max.

B. Sphère

Pour les mêmes conditions et les mêmes hypothèses simplificatrices on obtient l'équation suivante

$$\emptyset = \emptyset_{\text{conv } 1} = \emptyset_{\text{cnd } 1} = \emptyset_{\text{cnd } 2} = \emptyset_{\text{conv } 2}$$

$$\Rightarrow \emptyset = \frac{(T_{f1} - T_1)}{\frac{1}{4\pi r_1{}^2 \mathrm{h}_1}} = \frac{(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2)}{\frac{\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1}{4\pi\lambda_1 \mathrm{r}_2 \mathrm{r}_1}} = \frac{(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_3)}{\frac{\mathrm{r} - \mathrm{r}_2}{4\pi\lambda_2 \mathrm{r}_2 \mathrm{r}}} = \frac{(T_3 - T_{f2})}{\frac{1}{4\pi r^2 \mathrm{h}_2}}$$

$$= \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{thcv1} + \mathrm{R}_{\text{thcod } 1} + \mathrm{R}_{\text{thcod } 2} + R_{thcv2}} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{thequ}}$$

$$\mathrm{R}_{\text{thcod } 2} = \frac{\mathrm{r} - \mathrm{r}_2}{4\pi\lambda_2 \mathrm{r}_2 \mathrm{r}} = \frac{1 - \left(\frac{\mathrm{r}2}{\mathrm{r}}\right)}{4\pi\lambda_2 \mathrm{r}_2} \quad \text{et } R_{thcv2} = \frac{1}{4\pi r^2 \mathrm{h}_2}$$

Si on augmente l'épaisseur de la couche isolante r :

$$\mathbf{r} \textbf{ augmente} \Rightarrow \mathbf{R}_{\mathbf{thcod2}} \; \boldsymbol{diminue\ et\ R_{thcv2}\ diminue}$$

Pour que flux de chaleur augmente il faut que ($\sum R_{th}$ ou R_{thequ}) diminue

⇒ Trouvons une valeur de r qui donne ($\sum R_{th}$ ou R_{thequ}) **Min**

$$4\pi R_{thequ} = \frac{1}{r_1{}^2 \mathrm{h}_1} + \frac{\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1}{\lambda_1 \mathrm{r}_2 \mathrm{r}_1} + \frac{\mathrm{r} - \mathrm{r}_2}{\lambda_2 \mathrm{r}_2 \mathrm{r}} + \frac{1}{r^2 \mathrm{h}_2} = f(r)$$

$$\Rightarrow \grave{f}(r) = \frac{1}{\lambda_2 \mathrm{r}^2} - \frac{2}{r^3 \mathrm{h}_2}$$

$$\grave{f}(r) = 0 \Rightarrow \boxed{\mathrm{r} = \frac{2\lambda_2}{\mathrm{h}_2}} \qquad (2.28)$$

Le rayon pour le quel la résistance est Min c'est $\mathrm{r} = \frac{2\lambda_2}{\mathrm{h}_2}$

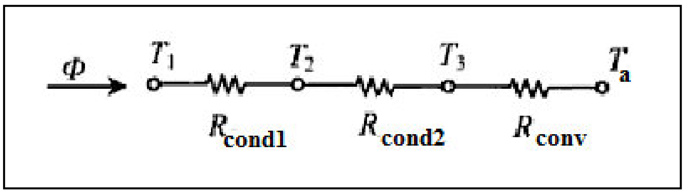
Exemple 2.9:

Une conduite d'eau chaude est constituée par un tube en cuivre de longueur L=1m, de conductivité thermique λ_1 =380 W/ m.°C, de rayon intérieure r_1=5mm et de rayon extérieur r_2=1cm. La température de la paroi interne du tube est T_1= 80°C, On réalise, à l'aide d'un matériau isolant (λ_2 =0,16 W/ m.°C), une gaine coaxiale de rayon intérieur r_2 et de rayon extérieur r_3= 1,5cm. La temperature de l'air ambiant à l'extérieur est Ta= 20°C et le coefficient d'échange convectif à la surface extérieur est h= 8 W /m^2.°C . On suppose que le régime est stationnaire monodimensionnelle selon la direction radiale du cylindre.

1) exprimez puis calculez le flux de chaleur Φ perdu par la conduite isolée.
2) Déterminer la valeur de l'épaisseur de l'isolant pour laquelle le flux thermique perdu est maximal. Calculer ce flux

<u>Solution:</u>

1)le transfert de chaleur à travers la conduite isolée, peut être représenté par le schéma électrique suivant:



$$\emptyset = \emptyset_{\mathrm{cnd}\,1} = \emptyset_{\mathrm{cnd}\,2} = \emptyset_{\mathrm{conv}}$$

$$\emptyset = \frac{(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2)}{\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda_1 L}} = \frac{(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_3)}{\frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi\lambda_2 L}} = \frac{(T_3 - T_a)}{\frac{1}{2\pi r_3 L \mathrm{h}_2}}$$

$$= \frac{(T_1 - T_a)}{R_{cond\,1} + R_{cond\,2} + R_{conv}} = \frac{(T_1 - T_a)}{R_{thequ}}$$

$$R_{cond\,1} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda_1 L} = 2{,}9.\,10^{-4}\,°C/W$$

$$\mathrm{R}_{\mathrm{cond}\,2} = \frac{\ln\left(\frac{\mathrm{r}_3}{\mathrm{r}_2}\right)}{2\pi\lambda_2 \mathrm{L}} = 0{,}322\,°C/W$$

$$R_{conv} = \frac{1}{2\pi r_3 L \mathrm{h}_2} = 1{,}326\,°C/W$$

$$R_{thequ} = 2{,}9.\,10^{-4} + 0{,}322 + 1{,}326 = 1{,}648\,°C/W$$

$$\Rightarrow \boxed{\emptyset = \frac{(T_1 - T_a)}{R_{thequ}} = \frac{(80 - 20)}{1{,}648} = 36{,}40\,W}$$

2)Le flux perdu est maximal pour un rayon d'isolation critique : équation (2.27)

$r_{3c}(critique) = \frac{\lambda_2}{h_2}$ = 2,5 cm, ce qui correspond à une épaisseur de l'isolant

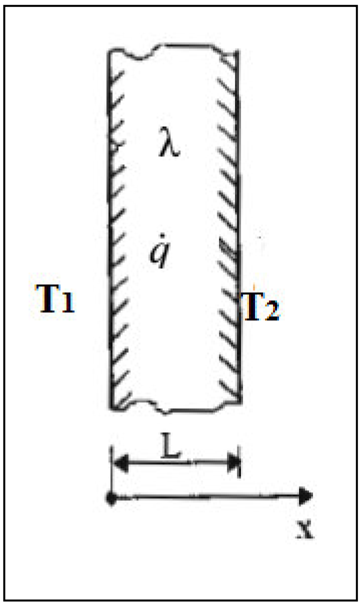
$$r_{3c} - r_2 = 2{,}5 - 1 = 1{,}5\ cm$$

Et un flux maximal

$$\boxed{\phi_{\text{Max}} = \frac{(T_1 - T_a)}{\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda_1 L} + \frac{\ln\left(\frac{r_{3c}}{r_2}\right)}{2\pi\lambda_2 L} + \frac{1}{2\pi r_{3c} L h_2}} = \frac{(T_1 - T_a)}{R_{thequ}} = 39{,}33\ W}$$

2.3 Conduction avec source de chaleur en régime permanent et unidirectionnel et λ constante:

2.3.1 Mur d'épaisseur L (plaque)



a) Mur avec condition de Dirichlet (T imposé)

L'équation générale de la conduction $\Delta T + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}$

Le régime est permanent : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

C'est l'équation de Poisson $\Delta T + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0$

Unidirectionnel $\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\dot{q}x}{\lambda} + A$

$\Rightarrow T(x) = -\frac{\dot{q}x^2}{2\lambda} + Ax + B$

Avec les conditions aux limites

x = 0, T = T_1 $\Rightarrow T(0) = B = T_1$

x= L, T = T_2 $\Rightarrow T(L) = -\frac{\dot{q}L^2}{2\lambda} + AL + B = T_2$

$\Rightarrow A = \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\dot{q}L}{2\lambda}$

$$\boxed{\Rightarrow T(x) = -\frac{\dot{q}x^2}{2\lambda} + \left(\frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\dot{q}L}{2\lambda}\right)x + T_1} \quad (2.29)$$

La densité de flux

$$q = -\lambda\frac{dT}{dx} = = -\lambda\left(-\frac{\dot{q}x}{\lambda} + \left(\frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\dot{q}L}{2\lambda}\right)\right)$$

$$\boxed{q = \dot{q}x - \lambda\frac{(T_2 - T_1)}{L} - \frac{\dot{q}L}{2}} \quad (2.30)$$

Cas particulier : $T_1 = T_2$

$$\Rightarrow q_{x=0} = -\frac{\dot{q}L}{2} \quad \text{et} \quad q_{x=L} = \frac{\dot{q}L}{2} \Rightarrow q_{x=\frac{L}{2}} = 0$$

Exemple 2.10:

Un long et mince mur d'épaisseur e en béton est on cours de durcissement par une réaction chimique (hydratation de ciment). Cette réaction est exothermique ($\dot{q} > 0$), les températures des faces sont respectivement T_1, T_2. On donne l'épaisseur e = 6 mm, λ = 20W/m°C, T1=120°C, T2=127.2°C, q = 2.10^7W/m^3.

Calculer la température maximale à l'intérieur pour le cas stationnaire.

Calculer la densité du flux de chaleur pour (x=0, x=e)

Solution:

Pour le cas stationnaire l'équation de profile de la température c'est (2.29)

$$T(x) = -\frac{\dot{q}x^2}{2\lambda} + \left(\frac{T_2 - T_1}{e} + \frac{\dot{q}e}{2\lambda}\right)x + T_1$$

La valeur de x_0 pour la température maximal

Il faux calculer

$$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dx}} = 0 \Rightarrow -\frac{\dot{q}x}{\lambda} + \left(\frac{T_2 - T_1}{e} + \frac{\dot{q}e}{2\lambda}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\dot{q}x}{\lambda} = \left(\frac{T_2 - T_1}{e} + \frac{\dot{q}e}{2\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{(T_2 - T_1)\lambda}{\dot{q}e} + \frac{e}{2} = \frac{(127{,}2 - 120)\lambda}{2.10^7.6.10^{-3}} + \frac{6.10^{-3}}{2} = 4{,}2.10^{-3}m$$

$$\boxed{\Rightarrow T(Max) = T(x_0) = -\frac{\dot{q}{x_0}^2}{2\lambda} + \left(\frac{T_2 - T_1}{e} + \frac{\dot{q}e}{2\lambda}\right)x_0 + T_1 = 128{,}56\ °C}$$

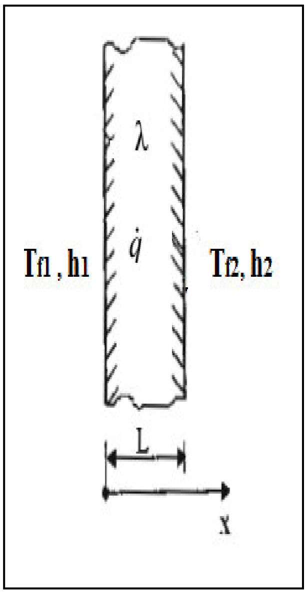
La valeur de la densité de flux pour les deux points (x=0 et x=e) on utilise l'équation (2.30)

$$\mathrm{q} = \dot{q}x - \lambda\frac{(T_2 - T_1)}{eL} - \frac{\dot{q}e}{2}$$

$$\boxed{\mathrm{q}_{x=0} = -\lambda\frac{(T_2 - T_1)}{e} - \frac{\dot{q}e}{2} = -84\ KW/m^2}$$

$$\boxed{\mathrm{q}_{x=e} = \dot{q}e - \lambda\frac{(T_2 - T_1)}{e} - \frac{\dot{q}e}{2} = 36\ KW/m^2}$$

b) Mur avec condition de Fourier (Flux imposé)



L'équation générale de la conduction $\Delta T + \frac{\dot q}{\lambda} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}$

Le régime est permanent : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

C'est l'équation de Poisson $\Delta T + \frac{\dot q}{\lambda} = 0$

Unidirectionnel $\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot q}{\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\dot q x}{\lambda} + A$

$\Rightarrow T(x) = -\frac{\dot q x^2}{2\lambda} + Ax + B$

Avec les conditions aux limites

$$x = 0 \qquad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}_{x=0} = h_1\left(T_{f1} - T(0)\right)$$

$$x = L \qquad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}_{x=L} = h_2\left(T(L) - T_{f2}\right)$$

On a

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\dot q x}{\lambda} + A$$

$$x = 0 \Rightarrow \boxed{T(0) = B} \qquad et \quad -\lambda A = h_1\left(T_{f1} - B\right)$$

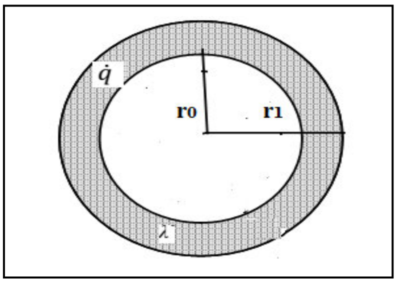
$$x = L \qquad \dot q L - \lambda A = h_2\left(T(L) - T_{f2}\right) = h_2\left(-\frac{\dot q L^2}{2\lambda} + AL + B - T_{f2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{-h_1\left(T_{f1} - B\right)}{\lambda}} \; ou \; \boxed{A = \frac{\dot q L - h_2\left(B - \frac{\dot q L^2}{2\lambda} - T_{f2}\right)}{h_2 L + \lambda}}$$

2.3.2 Cylindre creuse:

L'expression analytique de l'équation de la conduction pour les coordonnées cylindrique c'est l'équation (2.3):

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\dot q}{\lambda} = \frac{\rho C_p}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t}$$



Pour la conduction de chaleur dans un tube creux avec production de chaleur, et le régime permanent. La loi de la propagation de la chaleur devient

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \ \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0$$

Si $\dot{q}$est constant dans tout le volume, la répartition de température est

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -\frac{\dot{q}r}{\lambda} \Rightarrow \left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -\frac{\dot{q}r^2}{2\lambda} + A \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\dot{q}r}{2\lambda} + \frac{A}{r}$$

$$\boxed{\Rightarrow T(r) = -\frac{\dot{q}r^2}{4\lambda} + A\,ln(r) + B} \quad (2.30)$$

C'est le profile de la température pour une cylindre en régime permanent avec source de chaleur,Avec les conditions aux limites:

$r = r_0 \quad \Rightarrow T(r) = T(r_0)$

$r = r_1 \quad \Rightarrow T(r) = T(r_1)$

$$\boxed{A = \frac{T(r_0) - T(r_1) + \frac{\dot{q}({r_0}^2 - {r_1}^2)}{4\lambda}}{ln\frac{r_0}{r_1}}}$$

$$\boxed{B = T(r_0) + \frac{\dot{q}{r_0}^2}{4\lambda} - Aln\, r_1}$$

2.3.3 sphère creuse:

L'expression analytique de l'équation de la conduction pour les coordonnées Sphérique c'est l'équation (2.4):

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{\rho C_p}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Pour la conduction de chaleur dans une sphère creuse avec production de chaleur, et le régime permanent. La loi de la propagation de la chaleur devient

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\dot{q}}{\lambda}=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)=-\frac{\dot{q}r^2}{\lambda} \Rightarrow r^2\frac{\partial T}{\partial r}=-\frac{\dot{q}r^2}{3\lambda}+A$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r}=-\frac{\dot{q}r}{3\lambda}+\frac{A}{r^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow T(r)=-\frac{\dot{q}r^2}{6\lambda}-\frac{A}{r}+B} \qquad (2.31)$$

Avec les conditions aux limites:

$r=r_0 \quad \Rightarrow T(r)=T(r_0)$

$r=r_1 \quad \Rightarrow T(r)=T(r_1)$

$$\boxed{A=\frac{T(r_0)-T(r_1)+\frac{\dot{q}({r_0}^2-{r_1}^2)}{6\lambda}}{\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}\right)}}$$

$$\boxed{B=T(r_0)+\frac{\dot{q}{r_0}^2}{6\lambda}+\frac{A}{r_0}}$$

Exemple 2.11:

Un cylindre de rayon extérieur r_0 est le siège d'une source de chaleur $\dot{q}$ si sa surface externe est isolée et sa surface interne est refroidie. Montrer que la température est

$$T(r)-T_0=-\frac{\dot{q}}{4\lambda}(r^2-{r_0}^2)+\frac{\dot{q}{r_0}^2}{2\lambda}\,ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

Solution:

Pour le cas stationnaire l'équation du profile de température c'est (2.30)

$$T(r)=-\frac{\dot{q}r^2}{4\lambda}+A\,ln(r)+B \qquad (*)$$

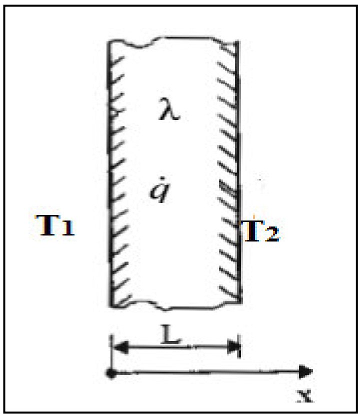
$$r=r_0 \Rightarrow T(r_0)=T_0 \Rightarrow \boxed{T_0=-\frac{\dot{q}{r_0}^2}{4\lambda}+A\,ln(r_0)+B} \qquad ('*)$$

La surface externe est isolée $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r}_{r=r_0}=0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r}_{r=r_0}=-\frac{\dot{q}r_0}{2\lambda}+\frac{A}{r_0} \Rightarrow \boxed{A=\frac{\dot{q}{r_0}^2}{2\lambda}}$

$\Rightarrow (*)-('*)=$

$$\boxed{T(r)-T_0=-\frac{\dot{q}}{4\lambda}(r^2-{r_0}^2)+\frac{\dot{q}{r_0}^2}{2\lambda}\,ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}$$

2.3.4 Source dépendent des coordonnées



$\dot{q}(x) = \dot{q}_0 e^{-\mu x}$

L'équation générale de la conduction $\Delta T + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}$

Le régime est permanent : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

C'est l'équation de Poisson $\Delta T + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0$

Unidirectionnel $\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\dot{q}_0 e^{-\mu x}}{\mu\lambda} + C$

$$\boxed{\Rightarrow T(x) = -\frac{\dot{q}_0 e^{-\mu x}}{\mu^2\lambda} + Cx + B}$$

Avec les conditions aux limites

x = 0, T = T_1 $\Rightarrow T_1 = B - \frac{\dot{q}_0}{\mu^2\lambda} \Rightarrow \boxed{B = T_1 + \frac{\dot{q}_0}{\mu^2\lambda}}$

x= L, T = T_2 $\Rightarrow T_2 = -\frac{\dot{q}_0 e^{-\mu L}}{\mu^2\lambda} + CL + \left(T_1 + \frac{\dot{q}_0}{\mu^2\lambda}\right)$

$$\Rightarrow C = \frac{(T_2 - T_1)}{L} + \frac{\frac{\dot{q}_0}{\mu^2\lambda}(e^{-\mu L} - 1)}{L}$$

$$\Rightarrow \boxed{T(x) = \frac{(T_2 - T_1)}{L} x + \frac{\dot{q}_0}{\mu^2\lambda}[(e^{-\mu L} - 1) - (e^{-\mu x} - 1)] + T_1}$$

2.3.5 Cas particulier la conductivité dépendent de la température:

$\lambda = \lambda_0 (1 + \alpha T)$ avec λ_0 et α constantes

Le régime est permanent, pas de source de chaleur $\Rightarrow \emptyset$ *est constante et* aussi la densité de flux:

$$q = \frac{\emptyset}{S} = -\lambda\frac{dT}{dx} = -\lambda_0 (1 + \alpha T) \frac{dT}{dx}$$

$$\Rightarrow q \int_0^e dx = \int_{T(0)}^{T(e)} -\lambda_0 (1 + \alpha T)\, dT$$

$$\Rightarrow q = -\frac{\lambda_0}{e}\left[T(e) - T(0) + \alpha\frac{T(e)^2 + T(0)^2}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{q = -\left(\frac{T(e) - T(0)}{e}\right)\left[\lambda_0\left(1 + \alpha\frac{T(e) + T(0)}{2}\right)\right]}$$

$$T_{moyenne} = \frac{T(e) + T(0)}{2} \quad et$$

$$\lambda_{(T_m)} = \lambda_{moyenne} = \lambda_m = \frac{\lambda(T(e)) + \lambda(T(0))}{2}$$

$$\frac{1}{2}\lambda(T(0)) = \frac{\lambda_0}{2}\left(1 + \alpha T(0)\right)$$

$$\frac{1}{2}\lambda(T(e)) = \frac{\lambda_0}{2}\left(1 + \alpha T(e)\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \lambda_m = \frac{1}{2}\left[\lambda(T(0)) + \lambda(T(e))\right] = \lambda_0\left(1 + \alpha\frac{T(e)+T(0)}{2}\right)} \qquad (2.32)$$

Donc en peut écrire la densité de flux sous la forme:

$$\boxed{q = -\lambda_m \frac{\Delta T}{e}}$$

$$\Delta T = T(e) - T(0)$$

2.4 Conduction en régime variable (transitoire ou instationnaire):

Pour faire cette étude on considère généralement deux cas selon le comportement thermique

- Corps thermiquement mince: un corps est dit thermiquement mince si sa résistance interne $R_i = \frac{L}{\lambda S}$ est négligeable. Dans ce cas sa température peut être considéré uniforme en chaque instant t
- Corps thermiquement épais: un corps est dit thermiquement épais si sa résistance interne $R_i = \frac{L}{\lambda S}$ n'est pas négligeable. Dans ce cas sa température variée d'un point à un autre en chaque instant t

$$T = T(x, y, z, t)$$

Le critère de classification est le nombre de " Biot"

Classification thermique des corps (critère de " Biot")

$$B_i = \frac{hl}{\lambda} = \frac{\frac{l}{\lambda S}}{\frac{1}{hS}} = \frac{R_i}{R_e} = \frac{résistance\ conduction}{résistance\ convection}$$

C'est un nombre sans dimension (adimensionnel)

l: longueur caractéristique $l = \frac{V}{S}$

V: volume du corps

S: surface extérieur d'échange

- Mur d'épaisseur 2 γ échange de la chaleur par ces deux faces

$$l = \frac{V}{S} = \frac{\gamma 2\gamma}{2\gamma} = \gamma$$

- Mur d'épaisseur 2 γ échange de la chaleur par seul faces

$$l = \frac{V}{S} = \frac{\gamma 2\gamma}{\gamma} = 2\gamma$$

- cylindre de rayon R

$$l = \frac{V}{S} = \frac{\pi R^2 H}{\pi R H} = \frac{R}{2}$$

- Sphère de rayon R

$$l = \frac{V}{S} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{R}{3}$$

- Cube

$$l = \frac{V}{S} = \frac{a^3}{6a^2} = \frac{a}{6}$$

$B_i \leq 0{,}1$ *corps mince*

$B_i > 0{,}1$ *corps épais*

2.4.1 Corps thermiquement mince $\boldsymbol{B_i \leq 0,1 \quad T = T(t)}$

Le tramp d'un solide chaud dans un liquide froid, on planage un solide probablement chauffé à la température initiale T_i dans un fluide à la température $T_f = T_\infty$

Bilan thermique

La Chaleur cédée par le corps = la chaleur absorbée par le fluide entre t et t+dt

La quantité de chaleur transmise au fluide par convection dans le temps dt = à la diminution de l'énergie interne dans le solide

$$\emptyset = \frac{dQ}{dt} = -\dot{m}C_p\frac{dT}{dt} = -\rho C_p V\frac{dT}{dt} \quad et\ \emptyset = hS(T - T_f)$$

C_p = constant c'est un solide

Avec les conditions aux limites

$t = 0, \quad T = T_i$

$$-\rho C_p V\frac{dT}{dt} = hS(T - T_f)$$

$on\ pose\ \grave{T} = T - T_f \quad \Rightarrow \mathrm{d}T = d\grave{T}$

$$-\rho C_p V\frac{d\grave{T}}{dt} = hS\grave{T} \Rightarrow -\rho C_p V\frac{d\grave{T}}{\grave{T}} = hSdt$$

$$ln\ \grave{T} = -\frac{hS}{\rho C_p V}t + C$$

$t = 0, \quad T = T_i \Rightarrow \grave{T} = T_i - T_f = \grave{T}_i$

$\Rightarrow C = \ln \grave{T}_i$

$$ln\, \grave{T} = -\frac{-hS}{\rho C_p V} t + \ln \grave{T}_i \Rightarrow ln\, \frac{\grave{T}}{\grave{T}_i} = -\frac{hS}{\rho C_p V} t$$

$$\Rightarrow \frac{\grave{T}}{\grave{T}_i} = e^{-\frac{hS}{\rho C_p V} t} \Rightarrow \boxed{\frac{T - T_f}{T_i - T_f} = e^{-\frac{hS}{\rho C_p V} t}} \tag{2.33}$$

Le flux: $\emptyset = hS(T - T_f)$

$$\Rightarrow \boxed{\emptyset = hS(T_i - T_f) = e^{-\frac{hS}{\rho C_p V} t}} \tag{2.34}$$

Nombre de Fourier:

$F_0 = \frac{\lambda t}{\rho C_p l^2}$

$a = \frac{\lambda}{\rho C_p} \Rightarrow F_0 = \frac{at}{l^2}$

a: diffusivité thermique du matériau

$$\frac{T - T_f}{T_i - T_f} = e^{-\frac{hS}{\rho C_p V} t} = e^{-\frac{ht}{\rho C_p l}} = e^{-\frac{htl}{\rho C_p l^2}} = e^{\left(-\frac{hl}{\lambda} \frac{\lambda}{\rho C_p l^2} t\right)}$$

$$\boxed{\frac{T - T_f}{T_i - T_f} = e^{(-B_i F_i)}} \tag{2.35}$$

__**Exemple 2.12:**__

Une sphère de diamètre 5 cm est initialement à une temperature uniforme de$T_i = 45O°C$, on la plonge soudainement dans un milieu à 100°C. Si le coefficient d'échange convectif est h= 10W/m^2. °C.

Les propriétés de l'acier $\lambda = \frac{2{,}5\mathrm{W}}{\mathrm{m}}.°\mathrm{C}$, $C_p = 460 \frac{J}{kg} °C, et$ $\rho = 7800\ Kg/m^3$.

Calculer le temps nécessaire à un refroidissement jusqu'à 150°C.

Solution:

Le critère de classification est le nombre de " Biot"

$$B_i = \frac{hl}{\lambda}$$

- Sphère de rayon R

$$l = \frac{V}{S} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{R}{3} = \frac{2R}{6} = \frac{5.10^{-2}}{6} = 0{,}83\,.\,10^{-3}m$$

$$\Rightarrow B_i = \frac{hl}{\lambda} = \frac{10.0{,}83\,.\,10^{-3}}{2{,}5} = 3{,}33.\,10^{-2}\,m \;\leq\, 0{,}1\; le\; corps\; est\; mince$$

On utilise l'équation (2.33à

$$\boxed{\frac{T - T_f}{T_i - T_f} = e^{-\frac{hS}{\rho C_p V}t} \Rightarrow t = \frac{ln\left(\frac{T - T_f}{T_i - T_f}\right)}{-\frac{hS}{\rho C_p V}} = 5818\; s = 16{,}16\; h}$$

2.4.2 Corps thermiquement épais $\boldsymbol{B_i} > 0{,}1$

Supposant que le problème de transfert de chaleur permet de négliger le flux de chaleur dans les directions y et z et de plus que λ est constante

L'équation de la chaleur devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Cherchons un produit solution de type

$$T(x, t) = X(x)G(t) \tag{2.36}$$

L'équation précédente devient :

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{a}\frac{1}{G}\frac{dG}{dt} = -\omega^2$$

Ainsi

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \omega^2 X = 0\; et \quad \frac{dG}{dt} + a\omega^2 G = 0$$

Avec ω comme constante de séparation des variables.

La solution pour X est

$$X = C_1 cos(\omega x) + \ C_2 sin(\omega t)$$

et pour G

$$G = exp(-\omega^2 at)$$

Donc la solution générale est :

$$\boxed{T(x,t) = \ [C_1 cos(\omega x) + \ C_2 sin(\omega t)]C_3 exp(-\omega^2 at)} \tag{2.37}$$