Module : "Théorie de Signal"

$2^{ème}$ Année GE (TC + ELN + ELT) 2017/2018

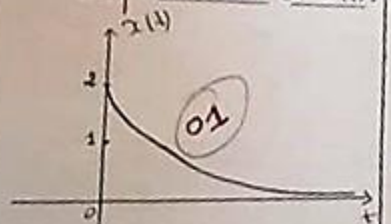
Corrigé d'Examen

Exercice (01) :

$$x(t) = \begin{cases} 2e^{-\beta t} & si\ t \geq 0 \\ 0 & si\ t < 0 \end{cases}$$

(avec : $\beta > 0$)

① → Représentation de $x(t)$:



② → La TF de $x(t)$: $X(f)$

D'après la table de la TF :

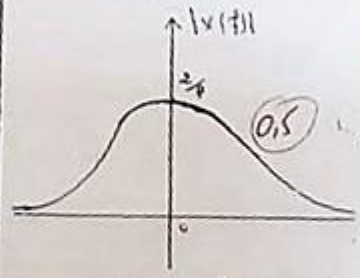
$$\boxed{X(f) = \frac{2}{\beta + j2\pi f}} \quad 01$$

③ → Représentation des spectres d'amplitude et de phase :

ⓐ Spectre d'amplitude

c'est le module de $X(f)$:

$$|X(f)| = \frac{2}{\sqrt{\beta^2 + (2\pi f)^2}} \quad 0,5$$



ⓑ Spectre de phase :

c'est l'argument de $X(f)$:

$$\phi(f) = \arg\{X(f)\}$$

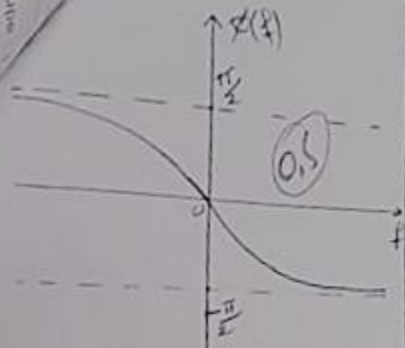
$$\boxed{\phi(f) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{2\pi f}{\beta}\right)} \quad 0,5$$

$f = 0 \Rightarrow \phi(f) = 0$

$f \to -\infty \Rightarrow \phi(f) \to +\frac{\pi}{2}$

$f \to +\infty \Rightarrow \phi(f) \to -\frac{\pi}{2}$

d'où :



④ → L'énergie de x(t):

On a: $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$ 0,5

alors: $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (2e^{-\beta t})^2 \, dt$

$\boxed{E_x = \frac{2}{\beta}}$ 0,5

→ on remarque que le signal x(t) est à énergie finie 0,5

⑤ la fonction d'auto-corrélation $\varphi_{xx}(\tau)$:

On sait que: x(t) est un signal à énergie finie, alors:

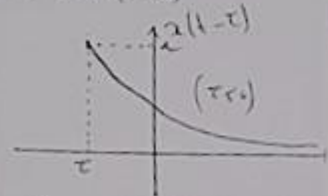
$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$ 0,5

x est réel $\Rightarrow x \equiv x^*$

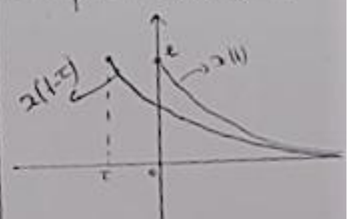
donc: $\varphi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,x(t-\tau)\,dt$

Deux cas se présentent: $\tau > 0$ et $\tau < 0$

• 1er cas: ($\tau < 0$)



• le produit $x(t)\,x(t-\tau)$



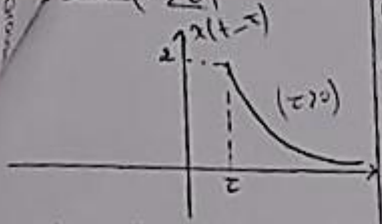
donc: $\varphi_{xx}(\tau) = \int_{0}^{+\infty} 4e^{-\beta t}\, e^{-\beta(t-\tau)}\, dt$

$= 4e^{\beta\tau} \int_{0}^{+\infty} e^{-2\beta t}\, dt$

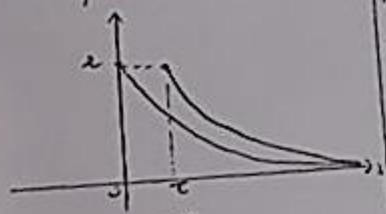
$\boxed{\varphi_{xx}(\tau) = \frac{2}{\beta} e^{\beta\tau}}$ pour $\tau < 0$

0,75

cas: $(\tau \geq 0)$



→ Le produit $x(t)\,x(t-\tau)$



donc:

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{\tau}^{+\infty} 4\, e^{-\beta t}\, e^{-\beta(t-\tau)}\, dt$$

$$= 4\, e^{\beta\tau} \int_{\tau}^{+\infty} e^{-2\beta t}\, dt$$ 0,75

$$\boxed{\varphi_{xx}(\tau) = \frac{2}{\beta}\, e^{-\beta\tau}}$$ pour $\tau \geq 0$

⑥ → vérification du résultat de la Ex à partir de $\varphi_{xx}(\tau)$:

on a: $E_x = \varphi_{xx}(0)$ 0,5

$\Rightarrow \boxed{E_x = \frac{2}{\beta}}$ 0,5

donc le résultat est vérifié

⑦ → La densité spectrale d'énergie $S_{xx}(f)$:

en utilisant la relation entre convolution et corrélation

$\varphi_{xx}(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau)$ 0,5

x est réel $\Rightarrow x \equiv x^*$

donc:

$\varphi_{xx}(\tau) = x(\tau) * x(-\tau)$

alors

$TF\{\varphi_{xx}(\tau)\} = TF\{x(\tau) * x(-\tau)\}$

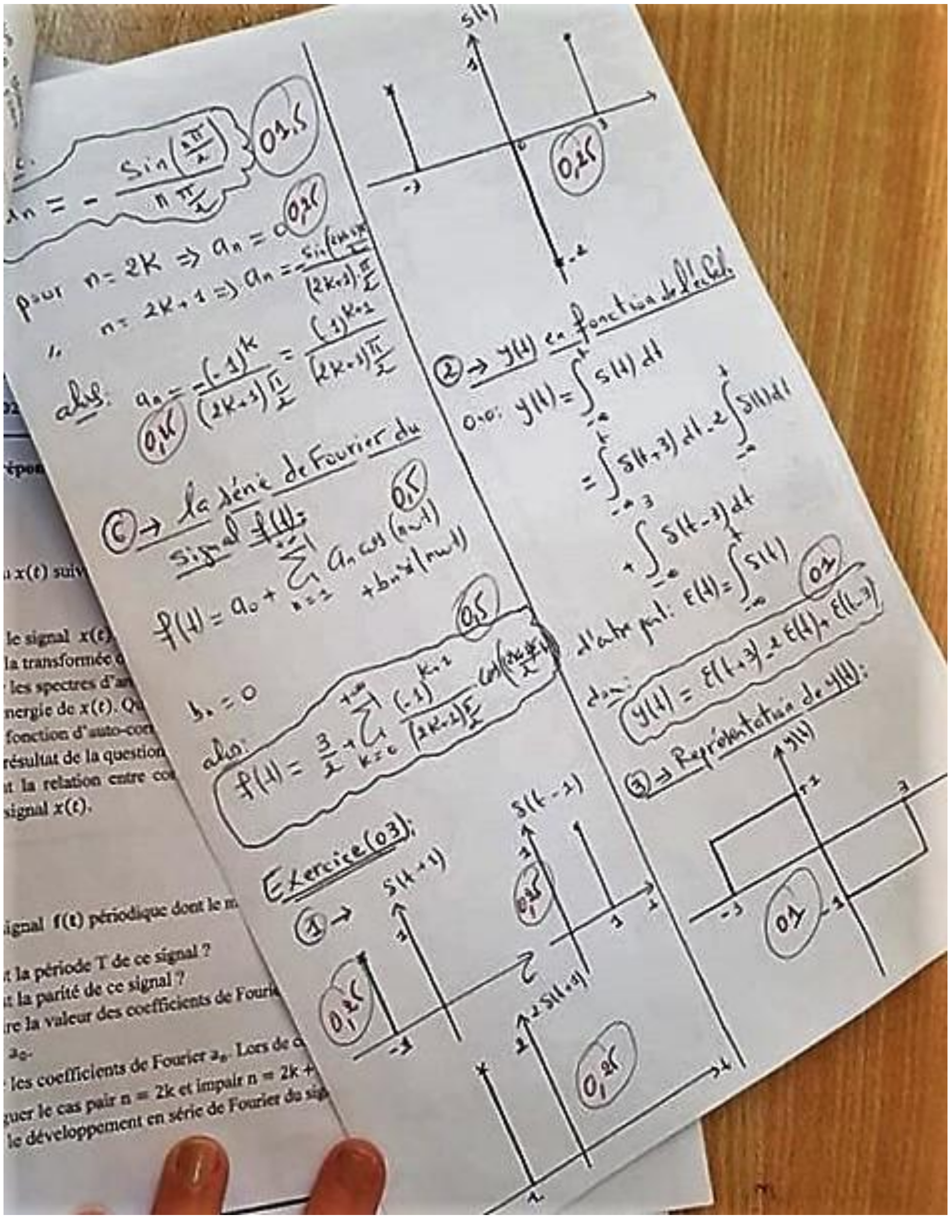
$\Rightarrow S_{xx}(f) = TF\{x(\tau)\} \cdot TF\{x(-\tau)\}$

$\Rightarrow \boxed{S_{xx}(f) = X(f) \cdot X(-f)}$ 0,5

donc

$$S_{xx}(f) = \frac{2}{\beta + j2\pi f} \cdot \frac{2}{\beta - j2\pi f}$$

$$\boxed{S_{xx}(f) = \frac{4}{\beta^2 + (2\pi f)^2}}$$ 01



$$a_n = -\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\frac{\pi}{2}}$$ (0,5)

pour $n = 2K \Rightarrow a_n = 0$ (0,25)

" $n = 2K+1 \Rightarrow a_n = -\frac{\sin\left((2K+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2K+1)\frac{\pi}{2}}$

alors: $a_n = \frac{-(-1)^K}{(2K+1)\frac{\pi}{2}} = \frac{(-1)^{K+1}}{(2K+1)\frac{\pi}{2}}$ (0,25)

⑥ → la série de Fourier du signal $f(t)$: (0,5)

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$b_n = 0$ (0,5)

alors: $$f(t) = \frac{3}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2} t\right)$$

Exercice (03):

① → $s(t+1)$ (0,25), $s(t-1)$ (0,25), $2s(t+1)$ (0,25), $s(t)$ (0,25)

② → $y(t)$ en fonction de l'échel.

donc: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} s(t)\,dt$

$= \int_{-\infty}^{t} \delta(t+3)\,dt - 2\int_{-\infty}^{t} \delta(t)\,dt + \int_{-\infty}^{t} \delta(t-3)\,dt$

d'autre part: $E(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)$ (01)

donc: $y(t) = E(t+3) - 2E(t) + E(t-3)$

③ → Représentation de $y(t)$: (01)

ercice (02) :

① → **la période 'T' du signal f(t) :**

D'après la figure « 1 »,

$\boxed{T = 4}$ 0,5

② → **la parité de ce signal.**

Le signal $f(t)$ est pair 0,5

③ → **Les coefficients de Fourier b_n :**

Comme le signal $f(t)$ est pair,

donc : $\boxed{b_n = 0}$ $(\forall n)$ 0,5

④ → **Calcul de a_0 :**

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt \quad 0{,}5$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\int_{-2}^{-1} 2\,dt + \int_{-1}^{1} dt + \int_{1}^{2} 2\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{2 + 2 + 2\right\} = \frac{6}{4}$$

$\boxed{a_0 = \frac{3}{2}}$ 0,5

⑤ → **Les coefficients a_n :**

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt \quad 0{,}5$$

on a : $T = 4 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$

donc :

$$a_n = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} 2\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{1}^{2} 2\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt$$

alors :

$$a_n = \frac{1}{2}\left[\frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)}{n.\pi/2}\right]_{-2}^{-1}$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)}{n\pi/2}\right]_{-1}^{1}$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)}{n.\pi/2}\right]_{1}^{2}$$

$$a_n = \frac{\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)}{n\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\frac{\pi}{2}}$$

$$- \frac{1}{2}\frac{\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)}{n\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\frac{\pi}{2}}$$

3 → l'énergie de $y(t)$:

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 \, dt \quad 0,5$$

$$\Rightarrow E_y = \int_{-3}^{3} |y(t)|^2 \, dt$$

$$= \int_{-3}^{0} dt + \int_{0}^{3} dt$$

$$\boxed{E_y = 6} \quad 0,5$$

FIN