Module : Théorie du signal

2ème Année GE (TC + ELN + ELT) 2017/2018

Corrigé d'Examen de Rattrapage

Questions de Cours :

① → Soit un signal $x(t)$:

→ La formule de la fonction d'auto-corrélation $\varphi_{xx}(\tau)$:

a) $x(t)$ est à énergie finie :

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt \quad 0{,}5$$

b) $x(t)$ est à puissance finie :

$$\varphi_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt \quad 0{,}5$$

② → Si le décalage temporel $\tau = 0$:

a) $x(t)$ est à énergie finie :

$$\varphi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t)\, dt \quad 0{,}5$$

b) $x(t)$ est à puissance finie :

$$\varphi_{xx}(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, x^*(t)\, dt \quad 0{,}5$$

③ → Que représente $\varphi_{xx}(0)$ dans les deux cas :

a) $x(t)$ est à énergie finie :

$\varphi_{xx}(0)$ représente l'énergie du signal $x(t)$. 0,5

b) $x(t)$ est à puissance finie :

$\varphi_{xx}(0)$ représente la puissance du signal $x(t)$. 0,5

④ → La fonction de corrélation permet l'extraction d'information, elle consiste à mesurer la similitude entre deux signaux. 01

⑤ → $h(t) = \varepsilon(t) \xrightarrow{TL} H(P) = \frac{1}{P}$

a) La transformée de Laplace du signal $f(t) = e^{5t}\, h(t)$:

$$TL\{f(t)\} = TL\{e^{5t}\, h(t)\}$$

d'autre part : $TL\{e^{-at}\, x(t)\} = X(P+a)$

dans notre cas : $a = -5$

donc :

$$F(P) = H(P+a) \text{ avec } a = -5$$

$$F(P) = H(P-5)$$

alors:

$$\boxed{F(p) = \frac{1}{p-5}}$$ (0,5)

b) → théorème de la valeur initiale sur le signal $f(t)$:

on a: $\lim_{t \to 0} x(t) = \lim_{p \to \infty} p X(p)$

C.à.d: $\lim_{t \to 0} f(t) \stackrel{?}{=} \lim_{p \to \infty} p F(p)$

On a: $\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{t \to 0} e^{5t} \mathcal{E}(t) = 1$ (0,25)

d'autre part:

$\lim_{p \to \infty} p F(p) = \lim_{p \to \infty} \frac{p}{p-5} = 1$ (0,25)

donc: le théorème de la valeur initiale est vérifié sur le signal $f(t)$.

Exercice (01):

$$s(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ -t+1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t>1 \end{cases}$$

① → décomposition du signal $s(t)$:

$\begin{cases} s_p(t): \text{ la partie paire} \\ s_i(t): \text{ " " impaire} \end{cases}$

$s_p(t) = \frac{s(t)+s(-t)}{2}$ (0,5)

$s_i(t) = \frac{s(t)-s(-t)}{2}$ (0,5)

alors:

$s(-t) = 1+t$

donc:

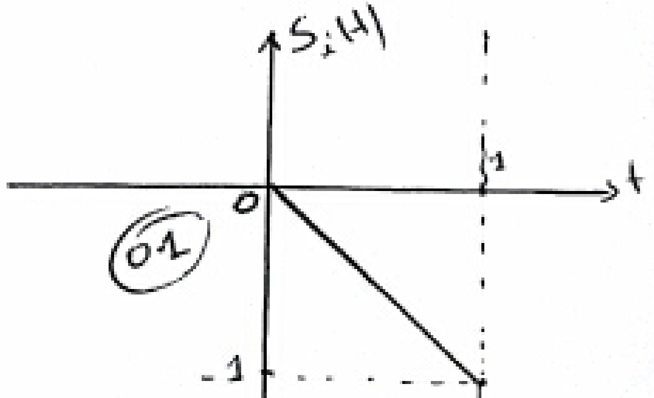
$s_p(t) = \frac{1-t+1+t}{2}$

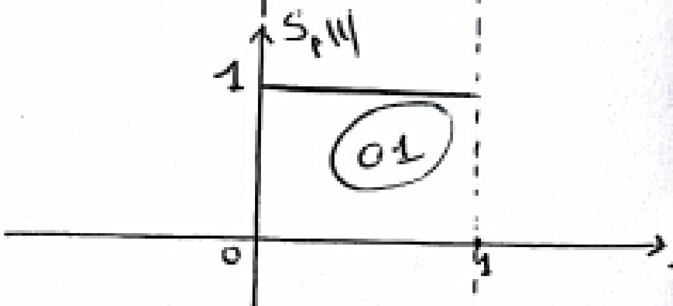
$$\boxed{s_p(t) = 1}$$ (0,5)

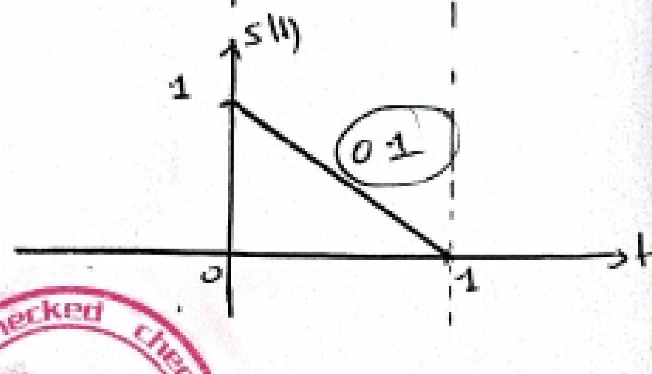
$s_i(t) = \frac{1-t-1-t}{2}$

$$\boxed{s_i(t) = -t}$$ (0,5)

② → Les représentations graphiques de $s_i(t)$, $s_p(t)$ et $s(t)$:



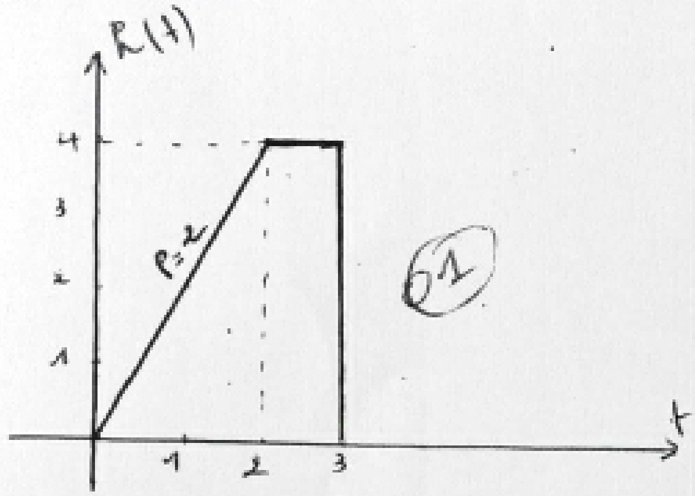




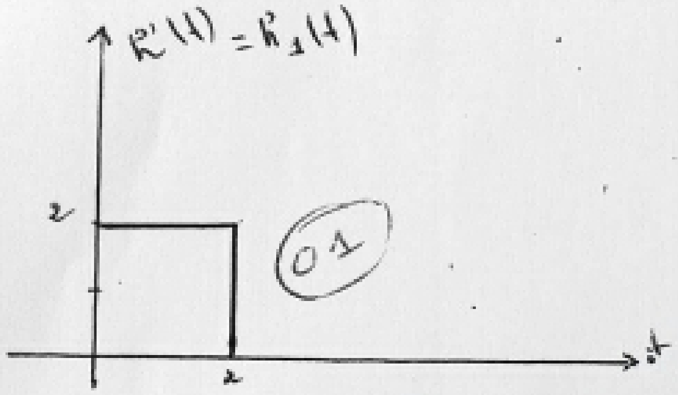
Exercice (02):

$h(t) = 2r(t) - 2r(t-2) - 4\varepsilon(t-3)$

① → Représenter le signal $h(t)$ et $h_1(t) = h'(t)$:



01



01

② →

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,\delta(t-1)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(1)\,\delta(t-1)\,dt$$

$$= 2\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-1)\,dt}_{1}$$

$$\boxed{I_1 = 2}$$ 01

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-1)\,\delta(t)\,dt$$

on pose $t' = t - 1$
$\Rightarrow dt' = dt$

$$\Rightarrow I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t')\,\delta(t+1)\,dt'$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{h(-1)}_{0}\,\delta(t+1)\,dt'$$

$$\boxed{I_2 = 0}$$ 01

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t)\,\delta(t-1)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(1)\,\delta(t-1)\,dt$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-1)\,dt$$

$$\boxed{I_3 = 2}$$ 01

$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t)\,\delta[2(t-1)]\,dt$$

on a: $\delta(kt) = \frac{1}{k}\,\delta(t)$

donc: $\delta[2(t-1)] = \frac{1}{2}\,\delta(t-1)$

alors: $I_4 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t)\,\delta(t-1)$

$$I_4 = \frac{1}{2} \times 2$$

$$\Rightarrow \boxed{I_4 = 1}$$ 01

Exercice (03):

on a: $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$

① → montrer que:

$$Y(f) = \frac{1}{2}\left[X(f-f_0) + X(f+f_0)\right]$$

on a:

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$ 0,5

donc:

$$y(t) = \frac{1}{2}\left[x(t)e^{j2\pi f_0 t} + x(t)e^{-j2\pi f_0 t}\right]$$

→ on applique la propriété de translation:

$$e^{j2\pi a t}\,x(t) \xrightarrow{TF} X(f-a)$$

alors:

$$e^{j2\pi f_0 t}\,x(t) \xrightarrow{TF} X(f-f_0)$$ 0,5

$$e^{-j2\pi f_0 t}\,x(t) \xrightarrow{TF} X(f+f_0)$$ 0,5

donc: 0,5

$$\boxed{Y(f) = \frac{1}{2}\left[X(f-f_0) + X(f+f_0)\right]}$$

② → en utilisant le produit de convolution dans le domaine fréquentielle:

on a: $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$

$$TF\{y(t)\} = TF\{x(t)\cos(2\pi f_0 t)\}$$

$$= TF\{x(t)\} * TF\{\cos(2\pi f_0 t)\}$$

$$TF\{x(t)\} = X(f)$$

$$TF\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]$$ 0,5

(D'après la table de la TF)

donc:

$$Y(f) = X(f) * \left\{\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]\right\}$$ 0,5

$$= \frac{1}{2}\left[X(f)*\delta(f-f_0) + X(f)*\delta(f+f_0)\right]$$ 0,5

$$\boxed{Y(f) = \frac{1}{2}\left[X(f-f_0) + X(f+f_0)\right]}$$ 0,5

[appliquer la propriété de translation pour le produit de convolution].