

# Communications numériques

## Transmission en bande de base

Laurent Oudre  
laurent.oudre@univ-paris13.fr

Université Paris 13, Institut Galilée  
Ecole d'ingénieurs Sup Galilée  
Parcours Informatique et Réseaux Alternance - 2<sup>ème</sup> année  
2015-2016

## Sommaire

### Introduction

- Emetteur
- Canal
- Récepteur
- Hypothèses du cours

### Codage en ligne

### Transmission en absence de bruit

### Transmission en présence de bruit blanc additif gaussien

### Transmission sur un canal à bande passante limitée

## Sommaire

### Introduction

- Emetteur
- Canal
- Récepteur
- Hypothèses du cours

### Codage en ligne

- Conversion bits/symboles
- Mise en forme
- Energie moyenne par bit
- Densités spectrale de puissance

### Transmission en absence de bruit

- Hypothèses
- Interférences entre symboles
- Réception en absence de bruit

### Transmission en présence de bruit blanc additif gaussien

- Hypothèses
- Récepteur optimal
- Réception en présence de bruit

### Transmission sur un canal à bande passante limitée

## Chaîne de transmission idéale : rappel



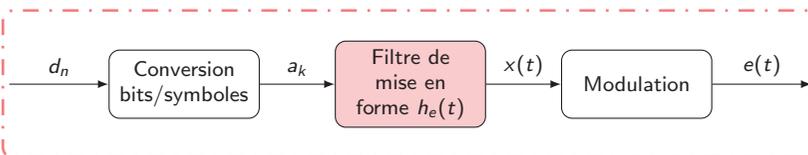
## Chaîne de transmission idéale : emetteur



Emetteur : transformer le signal numérique  $d_n$  en un signal physique  $e(t)$  (onde électromagnétique, signal électrique, etc...) qui puisse être transmis sur le canal de transmission

- ▶ Transmettre le maximum de données avec une fiabilité maximale
- ▶ S'adapter au canal de transmission utilisé

## Emetteur : différentes étapes

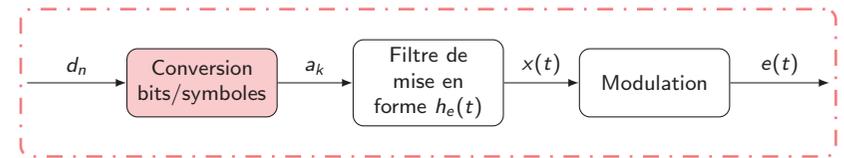


Emetteur

Mise en forme :

- ▶ Transformation du signal numérique en un signal physique
- ▶ Choix du filtre de mise en forme dépend de la largeur de bande souhaitée, de la présence de raies à la fréquence d'horloge...

## Emetteur : différentes étapes

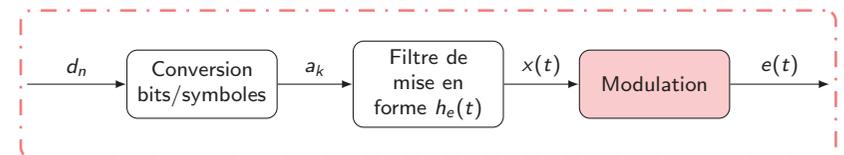


Emetteur

Conversion bits/symboles (transcodage) :

- ▶ Modification de la taille de l'alphabet
- ▶ Modification du rythme

## Emetteur : différentes étapes



Emetteur

Modulation :

- ▶ Adaptation au canal de transmission (bande passante)
- ▶ Large choix de possibilités : dépend de la puissance, de la probabilité d'erreur acceptable...

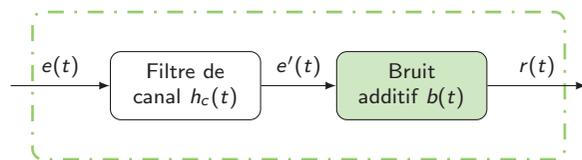
## Chaîne de transmission idéale : canal



Canal de transmission : câbles coaxiaux, paires torsadées, réseau hertzien, infrarouge, fibres optiques,....

- ▶ Propriétés physiques différentes selon le canal utilisé : bande passante, débit maximal, etc...
- ▶ Eventuellement source d'erreurs (bruit, perte de données, etc...)

## Canal : différentes étapes

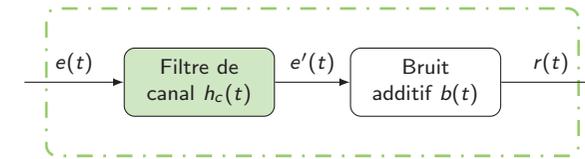


Canal de transmission

Bruit additif  $b(t)$

- ▶ Souvent supposé bruit blanc additif gaussien indépendant du signal  
 $\Gamma_b(f) = \frac{N_0}{2}$

## Canal : différentes étapes



Canal de transmission

Filtre de canal ayant pour fonction de transfert  $H_c(f)$

- ▶ Dépend à priori de la fréquence : notion de **bande passante** du canal
- ▶ Canal idéal :  $H_c(f)$  constant dans la bande passante

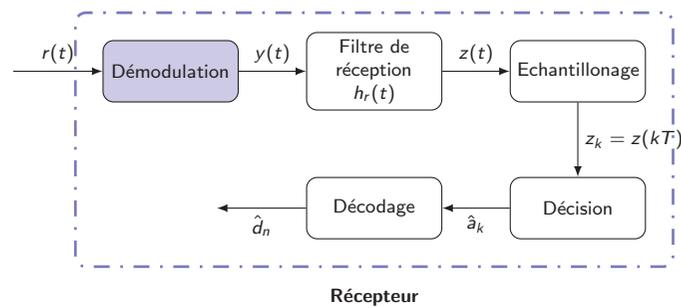
## Chaîne de transmission idéale : récepteur



Récepteur : transformer le signal physique reçu  $r(t)$  pour retrouver le signal numérique envoyé  $\hat{d}_n$

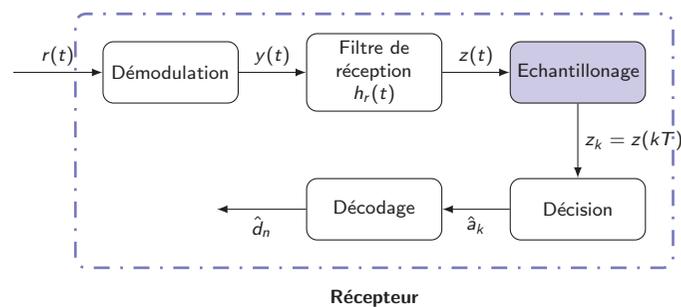
- ▶ Echantillonnage, détection, élimination du bruit
- ▶ Parfois difficile s'il y a eu des erreurs de transmission

## Récepteur : différentes étapes



Démodulation : inverse de l'étape de modulation

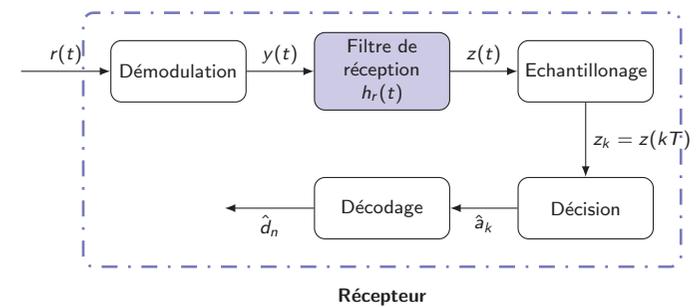
## Récepteur : différentes étapes



Echantillonnage :

- ▶ Transformation du signal physique en signal discret
- ▶ Nécessite une synchronisation sur le temps d'horloge

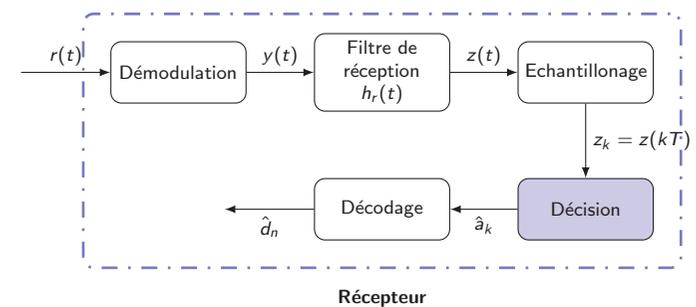
## Récepteur : différentes étapes



Filtre de réception :

- ▶ Adapté au filtre de mise en forme utilisé lors de l'émission
- ▶ Vise à minimiser les interactions entre symboles et à maximiser le rapport signal sur bruit

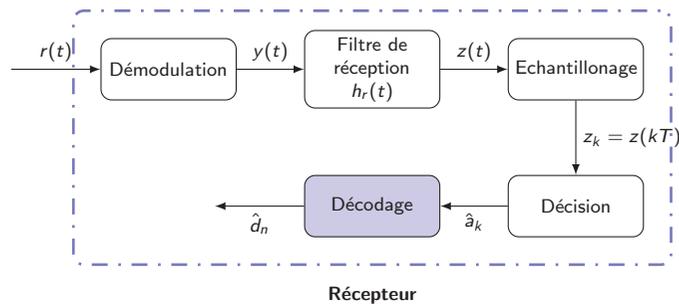
## Récepteur : différentes étapes



Décision :

- ▶ A partir des valeurs échantillonnées, on retrouve les symboles émis
- ▶ Sensible au bruit ajouté par le canal

# Récepteur : différentes étapes



Décodage : on transforme les symboles détectés en bits d'information

## Sommaire

Introduction

Codage en ligne

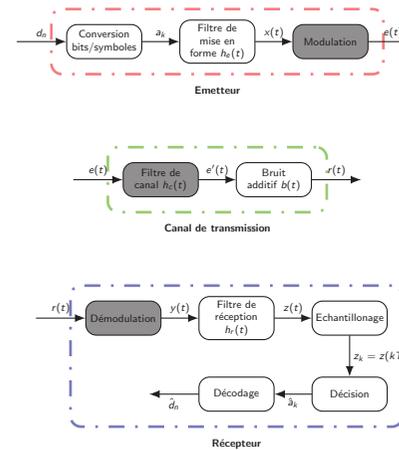
- Conversion bits/symboles
- Mise en forme
- Energie moyenne par bit
- Densités spectrale de puissance

Transmission en absence de bruit

Transmission en présence de bruit blanc additif gaussien

Transmission sur un canal à bande passante limitée

# Hypothèses



On s'intéresse ici à la transmission en bande de base :

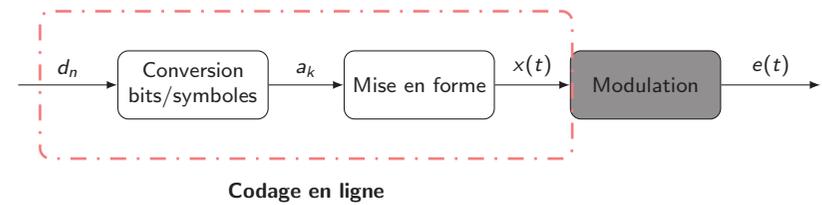
- Pas d'étape de modulation/démodulation
- Transmission des signaux tels quels, dans la bande de fréquence originale

On suppose aussi que le canal utilisé est idéal, invariant, et de gain unitaire

$$H_c(f) = 1$$

Sa bande passante est donc supposée infinie.

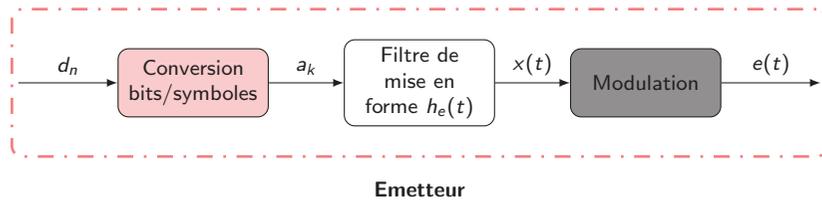
## Codage en ligne



Codage en ligne :

- Toutes les étapes en bande de base, avant l'étape de modulation
- But : donner de bonnes propriétés au signal physique créé (largeur de bande, raies ou annulations du spectre à certaines fréquences, etc...)

## Emetteur : conversion bits/symboles



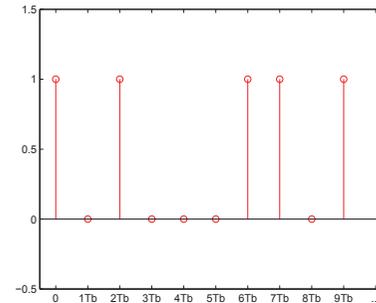
Conversion bits/symboles (transcodage) :

- ▶ Modification de la taille de l'alphabet
- ▶ Modification du rythme

## Transcodage : conversion bits/symboles

- ▶ Principe : remplacer les bits ou des groupements de bits par des symboles
- ▶ Idée : passer de deux valeurs possibles (0 ou 1) à  $M$  valeurs possibles
- ▶ Plusieurs façons de procéder :
  - ▶ Codage par dictionnaire : regrouper les bits  $m$  par  $m$  et associer un symbole à chaque groupement
  - ▶ Codage par diagramme d'états
  - ▶ Codage par équation linéaire

## Débit binaire



- ▶ Entrée : signal binaire initial  $d_n$

$$d = 1010001101 \dots$$

- ▶ Un bit émis toutes les  $T_b$  secondes
- ▶ Débit binaire :

$$D_b = \frac{1}{T_b} \text{ (bits/seconde)}$$

$$d(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n \delta(t - nT_b)$$

## Codage par dictionnaire

- ▶ Dictionnaire à  $M$  symboles ( $M$  : valence)
- ▶ Regrouper les bits  $m$  par  $m$  et associer un symbole du dictionnaire à chaque groupement
- ▶ Dans ce cas :

$$M = 2^m$$

$$m = \log_2 M$$

- ▶ Exemple avec  $m = 1$  :

$$1010001101 \rightarrow 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \rightarrow 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 1$$

- ▶ Exemple avec  $m = 2$  :

$$1010001101 \rightarrow 10 \ 10 \ 00 \ 11 \ 01 \rightarrow 2 \ 2 \ 0 \ 3 \ 1$$

## Codage par dictionnaire

- Plusieurs façons d'attribuer un symbole  $a_k$  à chaque groupe de  $m$  bits

- Codage M-aire unipolaire :

$$a_k \in \{0, 1, \dots, M-1\}$$

- Codage M-aire antipolaire :

$$a_k \in \{-(M-1), \dots, -3, -1, 1, 3, \dots, M-1\} \text{ (uniquement les valeurs impaires)}$$

- Exemple avec  $m = 2$  :

$$10 \ 10 \ 00 \ 11 \ 01 \longrightarrow 2 \ 2 \ 0 \ 3 \ 1 \text{ (unipolaire)}$$

$$10 \ 10 \ 00 \ 11 \ 01 \longrightarrow 3 \ 3 \ -3 \ 1 \ -1 \text{ (antipolaire)}$$

## Exemples

- Codage quaternaire antipolaire (ou 2B1Q)

$d_n d_{n+1}$	$a_k$
00	-3
01	-1
11	1
10	3

codage de Grey : un bit de différence entre chaque état

## Exemples

- Codage binaire unipolaire

$d_n$	$a_k$
0	0
1	1

- Codage binaire antipolaire

$d_n$	$a_k$
0	-1
1	1

## Rapidité de modulation

- Si on regroupe les bits  $m$  par  $m$ , on transmet  $m$  fois moins vite. Un symbole émis toutes les  $T$  secondes (période symbole) avec

$$T = m T_b = \log_2 M T_b = \frac{\log_2 M}{D_b}$$

- On a un nouveau signal

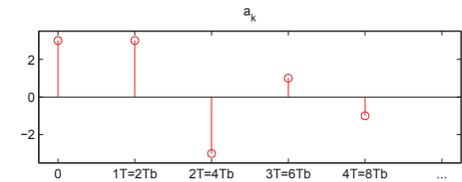
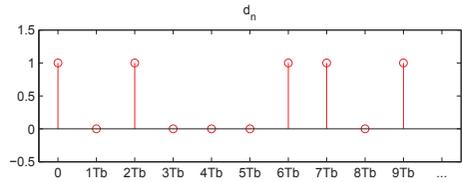
$$a(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta(t - kT)$$

- Rapidité de modulation  $R$  (débit symbole)

$$R = \frac{1}{T}$$

$$R = \frac{D_b}{\log_2 M} \text{ (bauds)}$$

## Exemple : codage 2B1Q



10 10 00 11 01 → 3 3 -3 1 -1

## Mise en forme

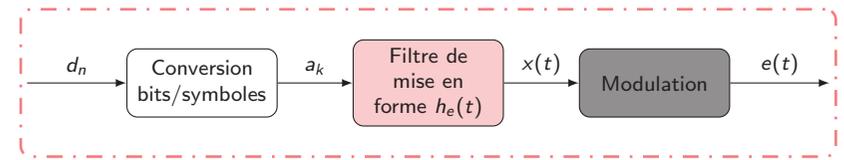
- ▶ Entrée : suite de symboles M-aires  $a_k$ . Un symbole émis toutes les  $T$  secondes

$$a(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta(t - kT)$$

- ▶ Principe : associer un signal physique  $x(t)$  à cette suite de symboles en convoluant  $a(t)$  par la réponse impulsionnelle  $h_e(t)$  d'un filtre de mise en forme (aussi appelé filtre d'émission).
- ▶ Codes à formant : même filtre de mise en forme pour tous les symboles

$$x(t) = a(t) * h_e(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT)$$

## Emetteur : mise en forme

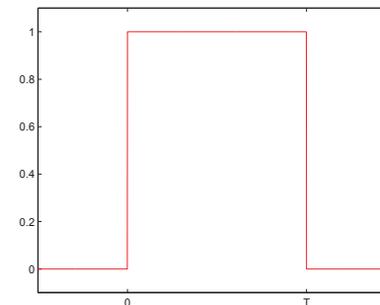


Emetteur

Mise en forme :

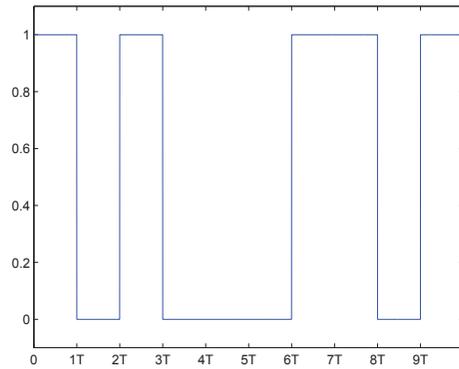
- ▶ Transformation du signal numérique en un signal physique
- ▶ Choix du filtre de mise en forme dépend de la largeur de bande souhaitée, de la présence de raies à la fréquence d'horloge...

## Filtre NRZ (non retour à zéro)



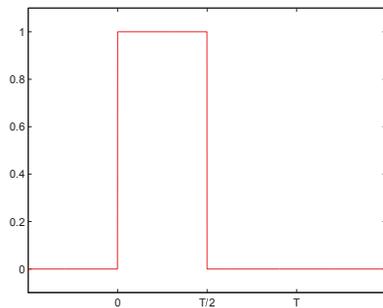
$$h_e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## Exemple : Codage binaire unipolaire NRZ



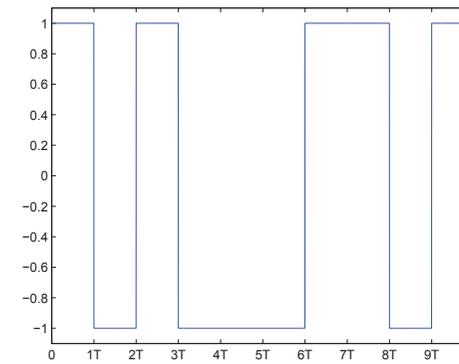
1010001101 → 1010001101

## Filtre RZ (retour à zéro)



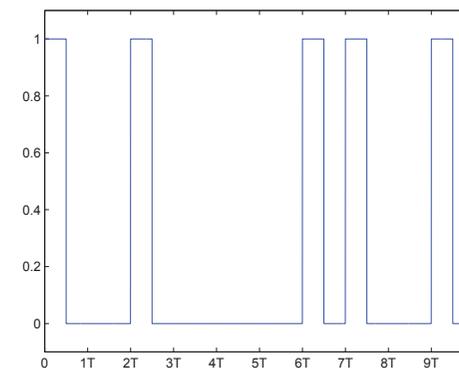
$$h_e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## Exemple : Codage binaire antipolaire NRZ



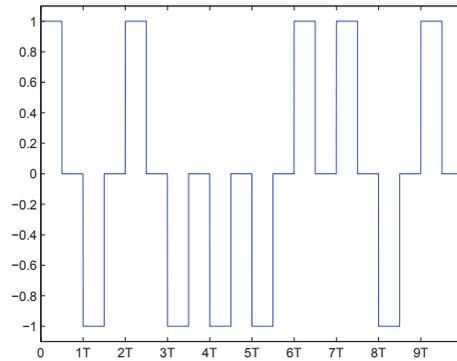
1010001101 → 1-11-1-1-111-11

## Exemple : Codage binaire unipolaire RZ



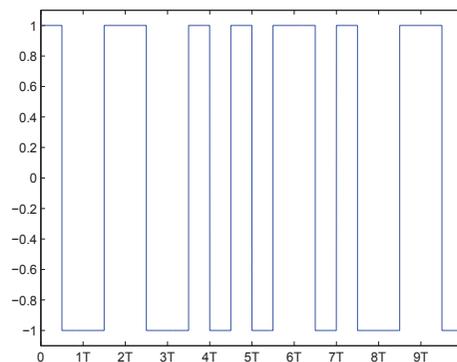
1010001101 → 1010001101

## Exemple : Codage binaire antipolaire RZ



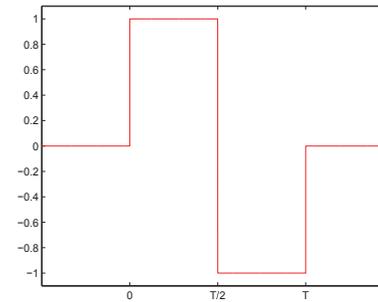
1010001101  $\rightarrow$  1-11-1-1-111-11

## Exemple : Codage binaire antipolaire Manchester



1010001101  $\rightarrow$  1-11-1-1-111-11

## Filtre biphasé Manchester



$$h_e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{T}{2} \leq t < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## Notion d'énergie

- Comment évaluer l'énergie totale du signal en bande de base  $x(t)$  ?

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT) \right|^2 dt$$

- Si le support temporel de  $h_e(t)$  est égal à  $T$ , on a :

$$E_x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |h_e(t - kT)|^2 dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 E_{h_e}$$

- Problème : on ne connaît pas les  $a_k$  a priori car ils sont aléatoires !
- Solution : au lieu de définir une énergie totale, on va définir une **énergie moyenne**

## Energie moyenne par symbole

- ▶ L'énergie correspondant à l'émission d'un seul symbole  $a_i$  est

$$E_{a_i} = \int_{-\infty}^{\infty} |a_i h_e(t)|^2 dt = |a_i|^2 E_{h_e}$$

- ▶ Si l'on suppose que tous les symboles du dictionnaire sont équiprobables, l'énergie moyenne par symbole peut donc être définie comme

$$E_{sym} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M E_{a_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |a_i|^2 E_{h_e}$$

- ▶ Comme un symbole correspond à  $m = \log_2 M$  bits, on peut aussi définir l'énergie moyenne par bit comme

$$E_{bit} = \frac{E_{sym}}{\log_2 M} = \frac{1}{M \log_2 M} \sum_{i=1}^M |a_i|^2 E_{h_e}$$

## Exemples

- ▶ Exemple : dictionnaire binaire antipolaire

$$E_{sym} = E_{bit} = \frac{1}{2}((-1)^2 + (1)^2)E_{h_e} = E_{h_e}$$

- ▶ Exemple : dictionnaire 2B1Q

$$E_{sym} = \frac{1}{4}((-3)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (3)^2)E_{h_e} = 5E_{h_e}$$

$$E_{bit} = \frac{E_{sym}}{\log_2 4} = \frac{5}{2}E_{h_e}$$

## Energie moyenne par symbole

En notant  $\mu_a$  et  $\sigma_a^2$  respectivement la moyenne et la variance des symboles du dictionnaire, on peut remarquer que :

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |a_i - \mu_a|^2 \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |a_i|^2 - \frac{2}{M} \sum_{i=1}^M |a_i| |\mu_a| + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |\mu_a|^2 \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |a_i|^2 - |\mu_a|^2 \end{aligned}$$

Donc on a aussi :

$$E_{sym} = (\sigma_a^2 + |\mu_a|^2) E_{h_e}$$

## Formules générales

On peut montrer que pour un dictionnaire  $M$ -aire

- ▶ unipolaire  $a_k \in \{0, 1, \dots, M-1\}$

$$E_{bit} = \frac{(M-1)(2M-1)}{\log_2 M} E_{h_e}$$

- ▶ antipolaire  $a_k \in \{-(M-1), \dots, -3, -1, 1, 3, \dots, M-1\}$

$$E_{bit} = \frac{M^2 - 1}{3 \log_2 M} E_{h_e}$$

## Notion de puissance

- ▶ Chaque symbole est émis durant une période  $T$ , donc on peut définir la puissance moyenne totale du signal  $x(t)$  comme

$$P_x = \frac{E_{sym}}{T}$$

- ▶ De la même façon, on peut définir la puissance moyenne totale du signal  $x(t)$  comme

$$P_x = \frac{E_{bit}}{T_b} = E_{bit} D_b$$

- ▶ Pour simplifier, on appelle souvent  $P_x$  la puissance émise moyenne

## Propriétés spectrales des signaux en bande de base

$$\Gamma_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |H_e(f)|^2 + \frac{\mu_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| H_e\left(\frac{k}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

- ▶ Le dictionnaire utilisé influence  $\mu_a$  et  $\sigma_a^2$  : en particulier, si  $\mu_a \neq 0$ , on fait apparaître sur la DSP des raies fréquentielles aux fréquences multiples de  $\frac{1}{T}$
- ▶ Le filtre de mise en forme utilisé conditionne la forme de la DSP : en particulier, lorsque l'on utilise un filtre NRZ, RZ ou biphasé Manchester, on obtient un signal en bande de base, où la majorité de la puissance est répartie dans la bande  $[-B, +B]$  où  $B$  est la largeur de bande du signal.
- ▶ Comme nous le verrons en Travaux Pratiques, à débit binaire constant, le dictionnaire et le filtre utilisés impactent directement la largeur de bande du signal

## Densité spectrale de puissance

- ▶ Le signal  $x(t)$  est un signal aléatoire dont l'aspect fréquentiel doit donc être étudié grâce à une densité spectrale de puissance
- ▶ Il correspond au filtrage du signal aléatoire  $a(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta(t - kT)$  par un filtre de fonction de transfert  $H_e(f)$ , sa densité spectrale de puissance  $\Gamma_x(f)$  vérifie donc :

$$\Gamma_x(f) = |H_e(f)|^2 \Gamma_a(f)$$

- ▶ Si les symboles sont supposés équiprobables et indépendants, on a :

$$\Gamma_a(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{\mu_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

- ▶ Et donc :

$$\Gamma_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |H_e(f)|^2 + \frac{\mu_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| H_e\left(\frac{k}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

## Liens entre les notions de puissance

- ▶ Nous avons défini *avec les mains* la puissance moyenne totale  $P_x$  du signal  $x(t)$  comme étant :

$$P_x = \frac{E_{sym}}{T} = \frac{\sigma_a^2 + |\mu_a|^2}{T} E_{h_e}$$

- ▶ D'un autre côté, nous savons que par définition, on a :

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(f) df$$

- ▶ Ces deux expressions sont-elles compatibles ?

## Liens entre les notions de puissance

- ▶ Prenons le cas simple d'un dictionnaire antipolaire
- ▶ On a donc  $\mu_a = 0$  et dans ce cas, la définition avec les mains nous donne :

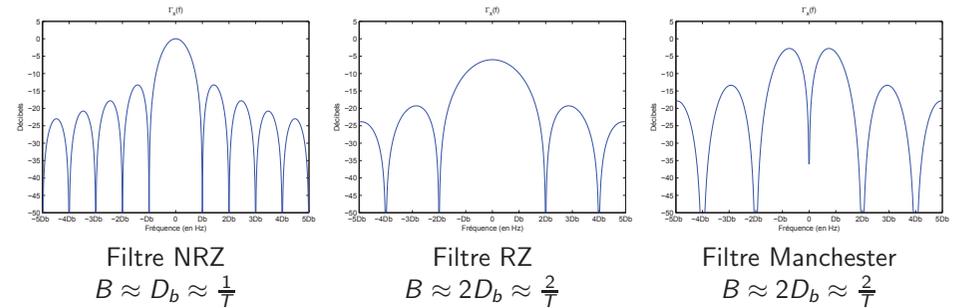
$$P_x = \frac{E_{sym}}{T} = \frac{\sigma_a^2}{T} E_{he}$$

- ▶ En faisant le calcul à partir de la DSP, on trouve :

$$\begin{aligned} P_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(f) df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_a^2}{T} |H_e(f)|^2 df \\ &= \frac{\sigma_a^2}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_e(f)|^2 df \\ &= \frac{\sigma_a^2}{T} E_{he} \end{aligned}$$

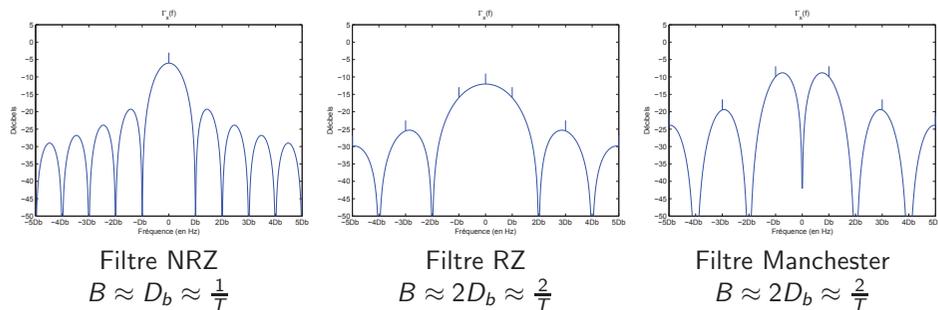
- ▶ Les deux définitions sont donc parfaitement cohérentes !

## Quelques DSP des codes en ligne



$D_b = 1$  bit/seconde,  $M = 2$ , dictionnaire antipolaire

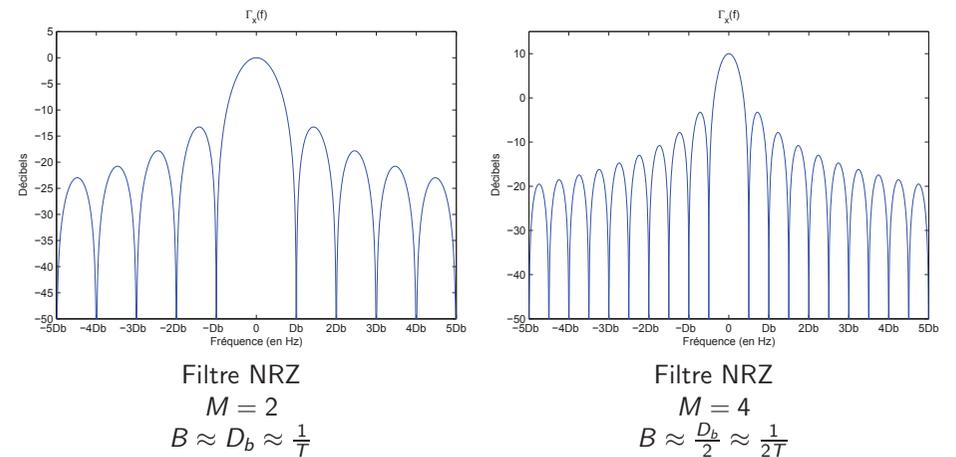
## Quelques DSP des codes en ligne



$D_b = 1$  bit/seconde,  $M = 2$ , dictionnaire unipolaire

Idem au dictionnaire antipolaire, mais apparition de raies fréquentielles pour  $f = \frac{k}{T}$

## Quelques DSP des codes en ligne



$D_b = 1$  bit/seconde, dictionnaire antipolaire

A débit binaire, dictionnaire et filtre constant, lorsque  $M$  augmente, la largeur de bande diminue

# Quelques DSP des codes en ligne : conclusion

- Dictionnaire antipolaire :

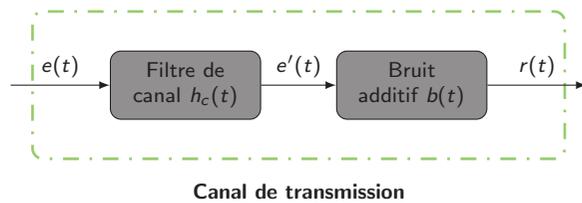
$$B_{NRZ} \approx \frac{1}{T}$$

$$B_{RZ} \approx \frac{2}{T}$$

$$B_{Manchester} \approx \frac{2}{T}$$

- Dictionnaire unipolaire : idem + apparition de raies fréquentielles pour  $f = \frac{k}{T}$

## Transmission en absence de bruit



Rappel :

- On travaille en bande de base
- On suppose le canal idéal, invariant et de gain unitaire  $H_c(f) = 1$  (bande passante du canal infinie)
- Ici, on suppose une absence de bruit  $b(t) = 0$   
 $r(t) = e(t)$

# Sommaire

Introduction

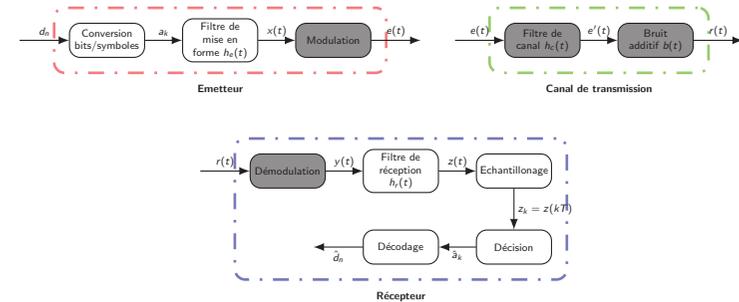
Codage en ligne

Transmission en absence de bruit  
 Hypothèses  
 Interférences entre symboles  
 Réception en absence de bruit

Transmission en présence de bruit blanc additif gaussien

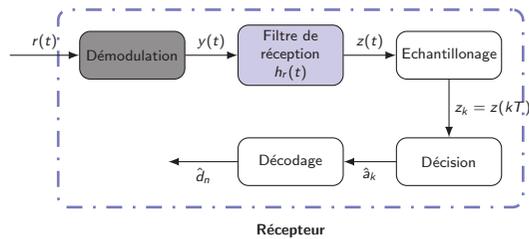
Transmission sur un canal à bande passante limitée

## Transmission en absence de bruit



$$y(t) = x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT)$$

## Récepteur : filtre de réception



$$z(t) = (y * h_r)(t)$$

$$z(t) = \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT) \right) * h_r(t)$$

$$z(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h(t - kT) \text{ avec } h = h_e * h_r$$

## Interférence entre symboles (IES)

$$z_k = a_k h(0) + \underbrace{\sum_{k' \neq k} a_{k'} h((k - k')T)}_{\text{IES}}$$

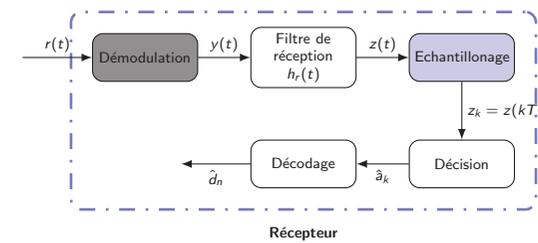
- ▶ Problème : pour retrouver  $a_k$  à partir de  $z_k$ , il y a un terme parasite qui dépend des symboles émis avant et après : interférence entre symboles
- ▶ Si l'on veut que ce terme soit nul, il faut que

$$h(kT) = 0 \text{ pour } k \neq 0$$

ce qui s'écrit aussi

$$h(kT) = h(0)\delta(k) : \text{condition de Nyquist}$$

## Récepteur : échantillonnage



Si synchronisation parfaite :

$$z_k = z(kT) = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} a_{k'} h(kT - k'T)$$

$$z_k = a_k h(0) + \sum_{k' \neq k} a_{k'} h((k - k')T)$$

## Filtres de Nyquist

Filtres de Nyquist : filtre de réponse impulsionnelle  $h(t)$  telle que

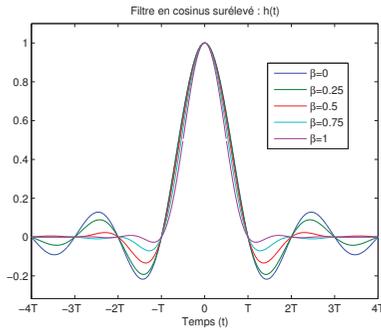
$$h(kT) = h(0)\delta(k) \text{ et } h(0) \neq 0$$

Exemples :

- ▶ Filtres à support temporel borné centré et strictement inférieur à  $2T$
- ▶ Filtres à support temporel non borné mais s'annulant à tous les multiples de  $T$ 
  - ▶ Exemple important : filtre en cosinus surelevé ( $0 \leq \beta \leq 1$ )

$$h(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \frac{\cos(\pi \beta t/T)}{1 - (2\beta t/T)^2}$$

## Filtre en cosinus surélevé



$$0 \leq \beta \leq 1$$

- ▶ Réponse impulsionnelle :

$$h(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \frac{\cos(\pi \beta t/T)}{1 - (2\beta t/T)^2}$$

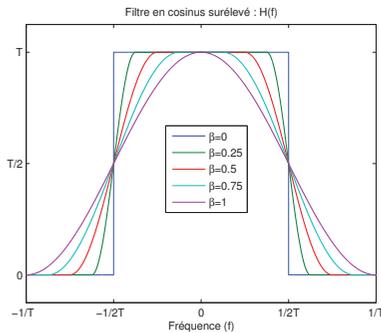
- ▶ Support temporel infini

## Filtre en cosinus surélevé

Fonction de transfert :

$$H(f) = \begin{cases} T & \text{si } |f| < \frac{1-\beta}{2T} \\ \frac{T}{2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\beta} \left(|f| - \frac{1-\beta}{2T}\right)\right) \right] & \text{si } \frac{1-\beta}{2T} < |f| \leq \frac{1+\beta}{2T} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## Filtre en cosinus surélevé

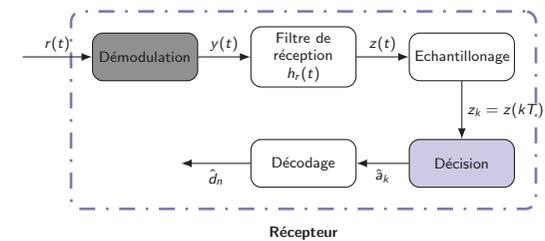


- ▶ Bande passante :

$$BP = \frac{1 + \beta}{2T}$$

comprise entre  $\frac{1}{2T}$  et  $\frac{1}{T}$

## Décision en absence de bruit

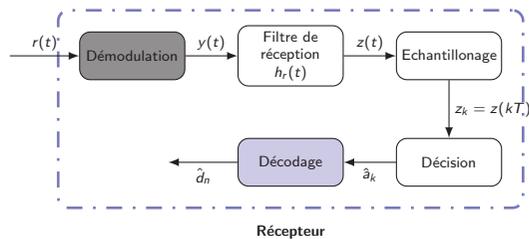


Si l'on suppose que  $h = h_e * h_r$  est un filtre de Nyquist, alors l'IES est nulle et on a donc

$$z_k = a_k h(0)$$

En connaissant  $h(0)$  on peut donc estimer  $\hat{a}_k = \frac{z_k}{h(0)}$ . La probabilité d'erreur symbole est ici nulle car  $\hat{a}_k = a_k$

## Décodage en absence de bruit



En connaissant le dictionnaire utilisé, on peut retrouver  $\hat{d}_n$  à partir de  $\hat{a}_k = a_k$  de façon parfaite. La probabilité d'erreur binaire est nulle car  $\hat{d}_n = d_n$ .

## Sommaire

Introduction

Codage en ligne

Transmission en absence de bruit

Transmission en présence de bruit blanc additif gaussien

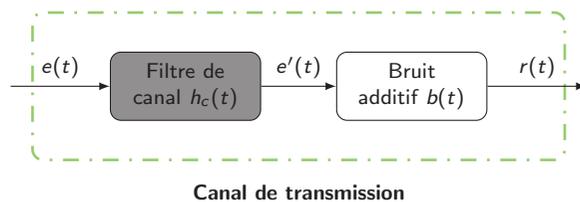
Hypothèses

Récepteur optimal

Réception en présence de bruit

Transmission sur un canal à bande passante limitée

## Transmission en présence de bruit blanc additif gaussien

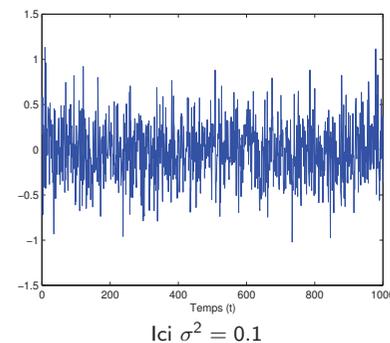


Rappel :

- ▶ On travaille en bande de base ( $e(t) = x(t)$ ,  $r(t) = y(t)$ )
- ▶ On suppose le canal idéal, invariant et de gain unitaire  $H_c(f) = 1$  (bande passante du canal infinie)
- ▶ Ici, on suppose que  $b(t)$  est un bruit blanc gaussien de densité spectrale de puissance  $\Gamma_b(f) = \frac{N_0}{2}$

$$y(t) = x(t) + b(t)$$

## Bruit blanc gaussien



- ▶ Signal aléatoire : on ne peut pas savoir quelles valeurs le signal va prendre, donc on utilise des probabilités
- ▶ Caractérisation par la moyenne (nulle pour un bruit blanc) et la variance  $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$
- ▶ A priori, le signal peut prendre n'importe quelle valeur, on sait juste que plus cette valeur est éloignée de la moyenne, moins elle est probable
- ▶ Plus la variance est élevée, plus le signal a le droit de prendre des valeurs éloignées de la moyenne

# Bruit gaussien

# Transmission en présence de bruit blanc additif gaussien

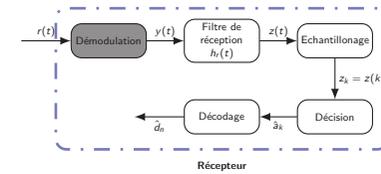
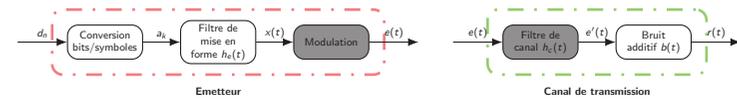
## Fonction de Marcum $Q(x)$

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Si  $b(t)$  est un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$

$$p(b(t) > b_0) = Q\left(\frac{b_0}{\sigma}\right) \quad p(b(t) < b_1) = Q\left(-\frac{b_1}{\sigma}\right) = 1 - Q\left(\frac{b_1}{\sigma}\right)$$

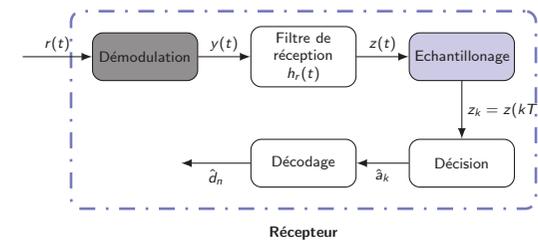
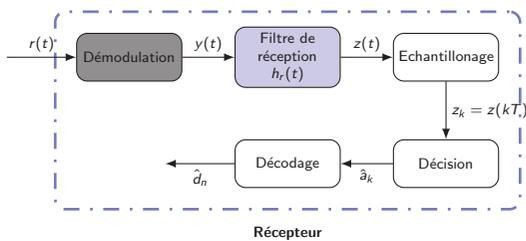
$$p(b_0 < b(t) < b_1) = Q\left(\frac{b_0}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{b_1}{\sigma}\right)$$



$$y(t) = x(t) + b(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT) + b(t)$$

## Récepteur : filtre de réception

## Récepteur : échantillonnage



$$z(t) = (y * h_r)(t)$$

$$z(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h(t - kT) + n(t) \text{ avec } h = h_e * h_r \text{ et } n = b * h_r$$

Si synchronisation parfaite :

$$z_k = z(kT) = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} a_{k'} h(kT - k'T) + n(kT)$$

$$z_k = a_k h(0) + \sum_{k' \neq k} a_{k'} h((k - k')T) + n(kT)$$

## Récepteur optimal

$$z_k = a_k h(0) + \underbrace{\sum_{k' \neq k} a_{k'} h((k - k')T)}_{\text{IES}} + \underbrace{n(kT)}_{\text{bruit}}$$

► Si on veut faire le moins d'erreur possible, il faut que l'IES soit nulle et que l'influence du bruit soit la plus faible possible.

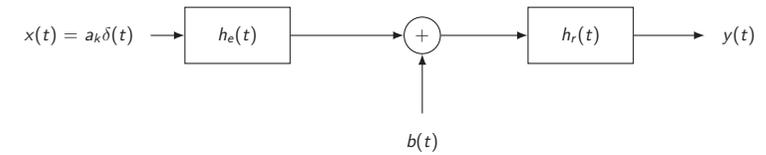
► On a déjà vu que pour que l'IES soit nulle :  $h = h_e * h_r$  doit être un filtre de Nyquist

$$h(kT) = (h_e * h_r)(kT) = h(0)\delta(k)$$

► Comment choisir le filtre de réception  $h_r(t)$  pour que l'influence du bruit soit la plus faible possible ?

- cf TD 1 : maximisation du rapport signal sur bruit  $SNR = \frac{h(0)^2}{P_n}$
- $h_r$  doit être le filtre adapté à  $h_e$

## Rappel : filtrage adapté



► Pour maximiser le rapport signal sur bruit en sortie du récepteur il faut

$$H_r(f) = H_e^*(f) \text{ ce qui implique } h_r(t) = h_e^*(-t)$$

► Dans ce cas, le rapport signal sur bruit vaut

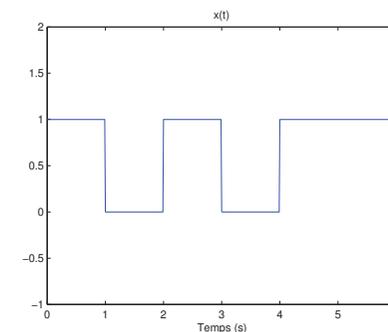
$$SNR = \frac{2E_{h_e}}{N_0}$$

## Récepteur optimal : domaine temporel

Dans le domaine temporel :

- Si le filtre de réception est adapté au filtre d'émission, on a  $h_r(t) = h_e(-t)$  (on suppose ici que les filtres sont réels)
- On a donc  $h(t) = h_e(t) * h_e(-t)$
- On veut que  $h$  soit un filtre de Nyquist
- Cas simple : si  $h_e(t)$  a un support strictement inférieur à  $T$ , alors en prenant  $h_r(t) = h_e(-t)$ ,  $h$  est un filtre de Nyquist (ex : filtre NRZ, RZ, biphase Manchester...)

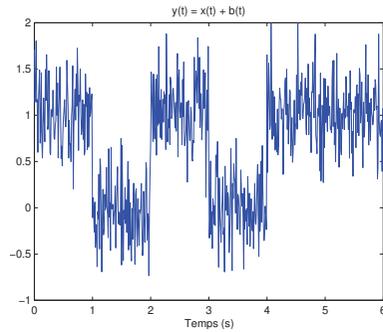
## Exemple : filtre NRZ



Message binaire 101011 codé avec un dictionnaire binaire unipolaire et mis en forme par un filtre NRZ avec une période symbole  $T=1s$

$$x(t)$$

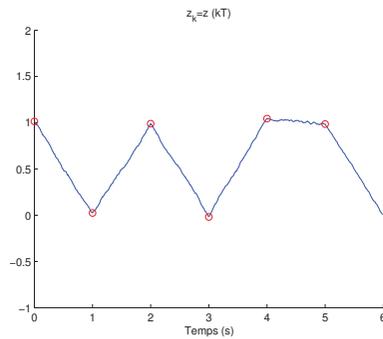
## Exemple : filtre NRZ



Lors du passage dans le canal, ce signal a été perturbé par un bruit additif gaussien  $b(t)$  de variance  $\sigma^2=0.1$

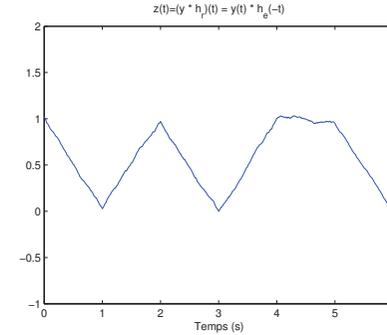
$$y(t) = x(t) + b(t)$$

## Exemple : filtre NRZ



Lorsqu'on échantillonne ce signal aux multiples de la période symbole  $T$  on retrouve les symboles envoyés (mais pas exactement à cause du bruit)

## Exemple : filtre NRZ



Au niveau du récepteur, le signal bruité est passé dans un filtre de réception adapté au filtre de mise en forme :

$$z(t) = (y * h_r)(t) = y(t) * h_e(-t)$$

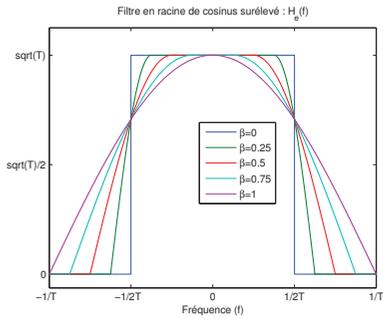
## Récepteur optimal : domaine fréquentiel

Dans le domaine fréquentiel :

- ▶ Si le filtre de réception est adapté au filtre d'émission, on a  $H_r(f) = H_e^*(f)$
- ▶ On a donc  $H(f) = H_e(f)H_r(f) = |H_e(f)|^2$ , qui est réel et positif
- ▶ Cas simple : partir d'un filtre de Nyquist de réponse fréquentielle  $H(f)$  réelle et positive et prendre

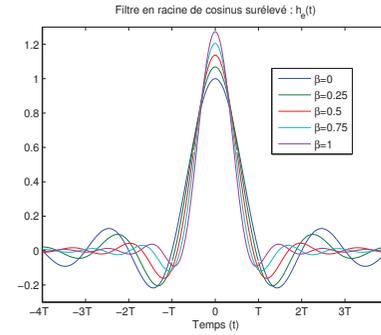
$$H_e(f) = H_r(f) = \sqrt{H(f)}$$

## Filtre en racine de cosinus surelevé



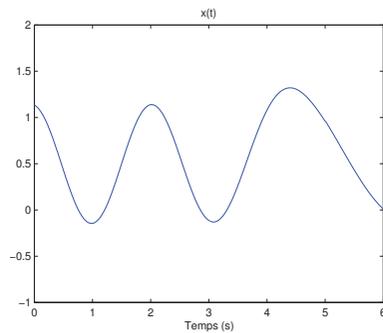
- ▶ Dans le domaine fréquentiel : racine de la fonction de transfert d'un filtre en cosinus surelevé
- ▶ Bande passante  $BP = \frac{1+\beta}{2T}$

## Filtre en racine de cosinus surelevé



- ▶ Dans le domaine temporel : ce n'est plus un filtre de Nyquist (pas d'annulation aux multiples de  $T$ )
- ▶ En revanche,  $h(t) = h_e(t) * h_e(-t)$  est un filtre de Nyquist

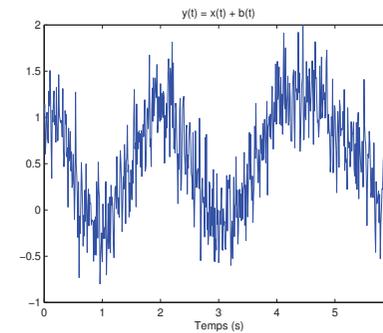
## Exemple : filtre RCS



Message binaire 101011 codé avec un dictionnaire binaire unipolaire et mis en forme par un filtre TRC avec une période symbole  $T=1s$

$$x(t)$$

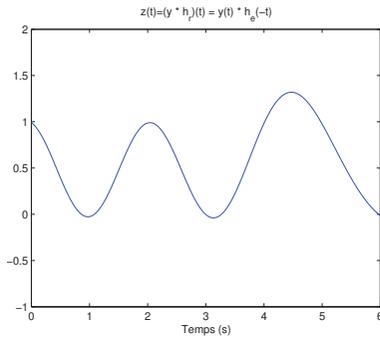
## Exemple : filtre RCS



Lors du passage dans le canal, ce signal a été perturbé par un bruit additif gaussien  $b(t)$  de variance  $\sigma^2=0.1$

$$y(t) = x(t) + b(t)$$

## Exemple : filtre RCS



Au niveau du récepteur, le signal bruité est passé dans un filtre de réception adapté au filtre de mise en forme :

$$z(t) = (y * h_r)(t) = y(t) * h_e(-t)$$

## Récepteur optimal : bilan

Conditions :

- ▶  $h_r(t)$  doit être le filtre adapté  $h_e(t)$  pour maximiser le SNR en sortie du récepteur

$$h_r(t) = h_e(-t) \quad H_r(f) = H_e^*(f)$$

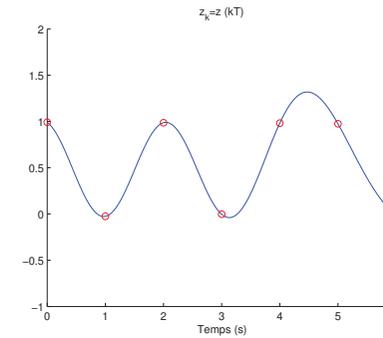
- ▶  $h = h_e * h_r$  doit être un filtre de Nyquist

$$h(kT) = h(0)\delta(k)$$

Deux cas simples de filtres formant un récepteur optimal

- ▶  $h_e(t)$  de support temporel inférieur à  $T$ , et  $h_r(t) = h_e(-t)$
- ▶ OU  $H_e(f) = H_r(f) = \sqrt{H(f)}$  où  $H(f)$  est un filtre de Nyquist

## Exemple : filtre RCS



Lorsqu'on échantillonne ce signal aux multiples de la période symbole  $T$  on retrouve les symboles envoyés (mais pas exactement à cause du bruit)

## Récepteur optimal : conséquences

Rappel :

$$z_k = a_k h(0) + \underbrace{\sum_{l \neq k} a_l h((k-l)T)}_{\text{IES}} + \underbrace{n(kT)}_{\text{bruit}}$$

Si le récepteur est optimal (ce qui sera le cas dans la suite du cours) :

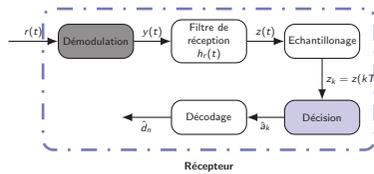
- ▶ IES = 0
- ▶  $h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_e(f) H_e^*(f) df = E_{h_e}$

Donc :

$$z_k = E_{h_e} a_k + n(kT)$$

→ Il va falloir estimer  $\hat{a}_k$  à partir de  $z_k$ , malgré le bruit

## Décision



Etape supplémentaire à cause de la présence de bruit : il faut affecter une valeur de symbole à chaque  $z_k$

Exemple :  $z_k = 1.26E_{h_e} \rightarrow \hat{a}_k = 1$ ,  $z_k = -0.34E_{h_e} \rightarrow \hat{a}_k = 0$ , etc...

## Décision par seuil : cas binaire

- ▶ Idée : utiliser un seuillage pour décider de la valeur de chaque symbole
- ▶ Exemple : codage binaire antipolaire  $a_k = 1$  ou  $a_k = -1$  (qu'on suppose équiprobable)
  - ▶ On a donc  $z_k = E_{h_e} + n(kT)$  ou  $z_k = -E_{h_e} + n(kT)$
  - ▶  $n(kT)$  est aléatoire et gaussien, de moyenne nulle
  - ▶ Une idée intuitive est de seuiller :
    - ▶ si  $z_k > 0$  alors  $\hat{a}_k = 1$
    - ▶ sinon  $\hat{a}_k = -1$

## Décision par seuil : cas M-aire

Dans le cas de  $M$  symboles, on utilise le même principe

- ▶ On calcule  $\frac{z_k}{E_{h_e}}$  et on regarde quel symbole du dictionnaire est le plus proche (au sens de la distance euclidienne)
- ▶ On décide ensuite que  $\hat{a}_k$  est ce symbole

Exemple :  $M = 4$  et  $\frac{z_k}{E_{h_e}} = 1.56 \quad 3.82 \quad 2.10 \quad -2.10$

$\rightarrow 1 \quad 3 \quad 3 \quad -3$

## Probabilité d'erreur

Si le bruit est trop important, on risque de faire des erreurs

### Probabilité d'erreur par symbole

$$P_{sym}^{err} = p(\hat{a}_k \neq a_k)$$

Cette erreur sur les symboles se répercute ensuite sur les bits après décodage.

### Probabilité d'erreur par bit

$$P_{bit}^{err} = p(\hat{d}_n \neq d_n)$$

## Calcul de la probabilité d'erreur (cas binaire)

Supposons que l'on utilise un dictionnaire binaire antipolaire ( $a_k = 1$  ou  $a_k = -1$ ).  
Quelle est la probabilité de faire une erreur sur le symbole ?

- ▶ On a soit  $z_k = E_{h_e} + n(kT)$ , soit  $z_k = -E_{h_e} + n(kT)$
- ▶ On a déjà vu que  $P_n = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_r(f)|^2 df = \frac{N_0 E_{h_e}}{2}$  (car le récepteur est supposé optimal)
- ▶  $n(t)$  est un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma_n^2 = P_n$
- ▶ Intuitivement on va dire que si  $z_k > 0$ , alors  $\hat{a}_k = 1$ , et sinon  $\hat{a}_k = -1$

## Calcul de la probabilité d'erreur (cas binaire)

- ▶ Si  $a_k = -1$  alors  $z_k = -E_{h_e} + n(kT)$ . Si on a  $z_k > 0$ , c'est donc que  $n(kT) > E_{h_e}$ . Or  $n(t)$  est gaussien de moyenne nulle et de variance  $P_n$  donc

$$p(n(kT) > E_{h_e}) = Q\left(\frac{E_{h_e}}{\sqrt{P_n}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{h_e}}{N_0}}\right)$$

- ▶ Si  $a_k = 1$  alors  $z_k = E_{h_e} + n(kT)$ . Si on a  $z_k < 0$ , c'est donc que  $n(kT) < -E_{h_e}$ . Or  $n(t)$  est gaussien de moyenne nulle et de variance  $P_n$  donc

$$p(n(kT) < -E_{h_e}) = 1 - Q\left(\frac{-E_{h_e}}{\sqrt{P_n}}\right) = Q\left(\frac{E_{h_e}}{\sqrt{P_n}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{h_e}}{N_0}}\right)$$

Finalement comme les  $a_k$  sont équiprobables,

$$P_{sym}^{err} = \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{2E_{h_e}}{N_0}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{2E_{h_e}}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{h_e}}{N_0}}\right)$$

## Calcul de la probabilité d'erreur (cas binaire)

Quand va-t-on faire une erreur ? 2 cas :

- ▶ Quand  $a_k = -1$  et que  $z_k > 0$
- ▶ Quand  $a_k = 1$  et que  $z_k < 0$

## Probabilité d'erreur M-aire (antipolaire)

Généralisation (admise) : on peut montrer qu'avec un dictionnaire antipolaire à  $M$  éléments, on a

$$P_{sym}^{err} = 2 \frac{M-1}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2E_{h_e}}{N_0}}\right)$$

- ▶ Remarque : on retrouve bien notre expression quand  $M = 2$  !
- ▶ La probabilité d'erreur dépend du nombre de symboles du dictionnaire  $M$ , de la variance du bruit blanc additif gaussien  $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ , et de l'énergie du filtre de mise en forme/filtre de réception  $E_{h_e}$ .

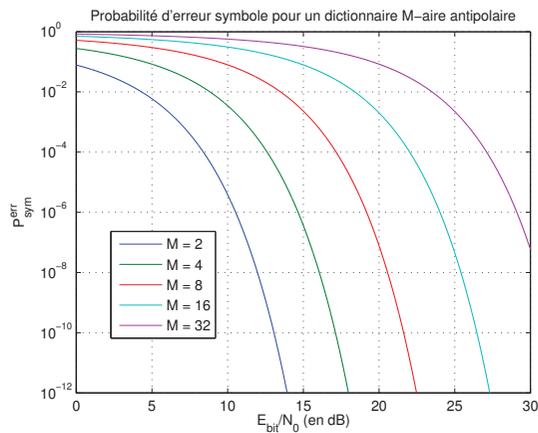
## Energie moyenne par bit

Rappel : Dans le cas d'un dictionnaire antipolaire à  $M$  symboles, on peut montrer que

$$E_{bit} = \frac{M^2 - 1}{3 \log_2 M} E_{he}$$

où  $E_{bit}$  est l'énergie moyenne par bit émis. On a aussi  $E_{bit} = P_e D_b$  où  $P_e$  est la puissance émise moyenne et  $D_b$  le débit binaire.

## Probabilité d'erreur M-aire (antipolaire)



## Probabilité d'erreur M-aire (antipolaire)

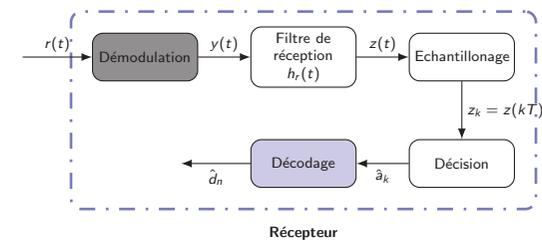
Avec cette définition, on peut réécrire pour un dictionnaire  $M$ -aire antipolaire

$$P_{sym}^{err} = 2 \frac{M-1}{M} Q \left( \sqrt{\frac{2E_{bit}}{N_0} \frac{3 \log_2 M}{M^2 - 1}} \right)$$

- ▶ Pour minimiser  $P_{sym}^{err}$ , il faut augmenter  $E_{bit}$  donc soit augmenter la puissance émise moyenne  $P_e$ , soit diminuer le débit binaire  $D_b$
- ▶ A  $\frac{E_{bit}}{N_0}$  fixé, plus on augmente  $M$ , plus la probabilité d'erreur augmente
- ▶ Remarque : si on utilise un codage de Grey on a

$$P_{bit}^{err} \approx \frac{P_{sym}^{err}}{\log_2 M}$$

## Décodage



En connaissant le dictionnaire utilisé, on peut retrouver  $\hat{d}_n$  à partir de  $\hat{a}_k = a_k$ . La probabilité d'erreur binaire dépend de la probabilité d'erreur par symbole et du dictionnaire utilisé.

## Sommaire

Introduction

Codage en ligne

Transmission en absence de bruit

Transmission en présence de bruit blanc additif gaussien

Transmission sur un canal à bande passante limitée

## Bande passante du canal

- ▶ Pour le moment, on a considéré que le canal était idéal et avait une bande passante infinie ( $H_c(f) = 1$ )
- ▶ En réalité, la bande passante du canal  $BP$  est limitée et le canal est plutôt de la forme

$$H_c(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } -BP < f < BP \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- ▶ Ceci est du
  - ▶ soit à la nature physique du canal (ex : type de câble, atténuation du signal sur de grandes distances, etc...)
  - ▶ soit à des réglementations (ex : bande de fréquence achetée par un opérateur téléphonique, etc...)

## Largeur du bande du signal

- ▶ Nous avons vu en TP que les signaux en bande de base ont une largeur de bande que l'on peut écrire  $[-B, +B]$ 
  - ▶ filtre NRZ :  $B \approx \frac{1}{T}$
  - ▶ filtre RZ :  $B \approx \frac{2}{T}$
  - ▶ filtre biphase Manchester :  $B \approx \frac{2}{T}$
  - ▶ filtre en racine de cosinus surelevé :  $B = \frac{1+\beta}{2T}$
- ▶  $B$  dépend du type de filtre de mise en forme  $h_e(t)$ , du débit binaire  $D_b$ , et de la taille  $M$  de l'alphabet utilisé

## Transmission en bande de base

- ▶ Afin de transmettre le plus d'information possible on fait en sorte d'utiliser toutes les capacités du canal, mais sans les dépasser !
- ▶ Si l'on connaît la bande passante du canal (ce qui est en pratique toujours le cas), on va faire en sorte que la largeur du bande du signal en bande de base soit du même ordre

$$B \approx BP$$

- ▶ En effet, si  $B > BP$  de l'information sera perdue lors de la transmission, et si  $B < BP$  alors on a tendance à être plus sensible au bruit
- ▶ Connaissant la bande passante du canal de transmission, la largeur de bande va donc être fixée. Ceci va contraindre les choix de dictionnaire, filtres de mise en forme, etc...

## Paramètres d'une chaîne de transmission

- ▶  $D_b$  : débit binaire (en bits/seconde)
- ▶  $B$  : largeur de bande occupée (en Hz) (égale à la bande passante  $BP$  du canal).
- ▶  $P_x = E_{bit} D_b$  : puissance émise moyenne (en W)
- ▶  $P_{bit}^{err}$  : probabilité d'erreur par bit

On veut  $D_b$  le plus grand possible,  $P_x$  et  $P_{bit}^{err}$  les plus petits possibles, et  $B = BP$  est souvent fixe.

## Dimensionnement d'une chaîne de transmission

- ▶ Principe : on a des contraintes sur  $D_b$ ,  $B (=BP)$ ,  $P_x$  et/ou  $P_{bit}^{err}$
- ▶ Selon l'application et le type de transmission, on va réaliser des compromis entre ces paramètres
- ▶ On va choisir en fonction de ces contraintes le dictionnaire (valence + type de dictionnaire) et les filtres d'émission/réception

## Evaluation d'une chaîne de transmission

### Efficacité spectrale

$$\eta = \frac{D_b}{B} = \frac{\log_2 M}{T B}$$

$\eta$  le plus grand possible :  $D_b$  maximal et  $B$  minimal

### Taux d'erreur binaire

$$TEB = \frac{\text{nombre de bits mal détectés}}{\text{nombre total de bits émis}}$$

NB :  $P_{bit}^{err}$  est le TEB quand le nombre total de bits est infini