MINISTER DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

C.U relizane

Institut de Sciences et Techniques

Cours maths1- Sciences et Technologie pour 1^{ére} année, avec les fiches TD corrigées

Par : Beddani Abdallah

baddanixabd@yahoo.fr

2014/2015

Table des matières

Chapitre 1

Méthodes du raisonnement mathématique

1.1 Assertions(ou proposition logique)

Définition 1.1.1 *Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.*

Exemple 1.1.1
$2+2=4$ *est une assertion vraie.*
$2\times 3=7$ *est une assertion fausse.*
Pour tout $x\in\mathbb{R}$,*on a* $x^2\geq 0$. *st une assertion vraie.*

-Si P est une assertion et Q est une autre assertion, nous allons définir de nouvelles assertions construites à partir de P et de Q.

1.1.1 Conjonction « et »

On appelle conjonction de P et Q, la proposition logique P $\wedge$ Q
L'assertion « $P\wedge Q$ » est vraie si P est vraie et Q est vraie.
L'assertion « $P\wedge Q$ » est fausse sinon.
On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 1.1.2

"$2+2=4 \ \wedge \ 2\times 3=6$" *est une assertion vraie .*

"$2+2=4 \ \wedge \ 2\times 3=7$" *est une assertion fausse.*

1.1.2 Disjonction «ou»

On appelle disjonction de P ou Q, la proposition logique P $\vee$ Q.

L'assertion « P $\vee$ Q » est vraie si l'une des deux assertions P ou Q est vraie.

L'assertion « P $\vee$ Q » est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses.

On reprend ceci dans la table de vérité :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple 1.1.3

"$2+2=4 \ \vee \ 2\times 3=6$" *est une assertion vraie .*

"$2=4 \ \vee \ 2\times 3=7$" *est une assertion fausse.*

1.1.3 La négation « $\bar{P}$ »

L'assertion « $\bar{P}$ » est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

P	$\bar{P}$
V	F
F	V

Exemple 1.1.4 *La négation de l'assertion* $2 \geq 0$ *elle est l'assertion* $2 \lneqq 0$.

1.1.4 L'implication $\Longrightarrow$

La définition mathématique est la suivante :

L'assertion ($\bar{P}$ ou Q) est notée «$P \Longrightarrow Q$».

Sa table de vérité est donc la suivante :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

1.1.5 L'équivalence $\Longleftrightarrow$

L'équivalence est définie par :«$P \Longleftrightarrow Q$ » est l'assertion «($P \Longrightarrow Q$) et ($Q \Rightarrow P$)».

On dira « P est équivalent à Q » ou « P équivaut à Q » ou « P si et seulement si Q ».

Cette assertion est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses.

La table de vérité est :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1.2 Quantificateurs

Le quantificateur $\forall$: « pour tout »

L'assertion

$$\forall x \in E,\ P(x)$$

est une assertion vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E. On lit « Pour tout x appartenant à E, $P(x)$ est vraie ».

Par exemple :

– « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ » est une assertion vraie.

– «$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1$» est une assertion fausse.

Le quantificateur $\exists$: « il existe »

L'assertion

$$\exists x \in E,\ P(x)$$

est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un élément x de E pour lequel $P(x)$ est vraie. On lit « il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ (soit vraie) ».

Exemple 1.2.1

« $\exists x \in \mathbb{R}(x \leq 0)$ » est vraie ,par exemple $x = 0$.

« $\exists x \in \mathbb{R}(x < 0)$ » est fausse.

La négation des quantificateurs

La négation de «$\forall x \in E,\ P(x)$ » est « $\exists x \in E,\ \overline{P(x)}$» .

Exemple : la négation de « $\forall x \in \mathbb{R}(x \leq 0)$ » est l'assertion «$\exists x \in \mathbb{R}(x > 0)$ ».

La négation de « $\exists x \in E,\ P(x)$» est « $\forall x \in E,\ \overline{P(x)}$ ».

Exemple : la négation de « $\exists x \in \mathbb{R}(x \geq 0)$ » est l'assertion «$\forall x \in \mathbb{R}(x < 0)$ ».

La négation de $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \geq 0(x + y \geq 10)$ est

$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \geq 0(x + y\langle 10)$

1.3 Raisonnements

1.3.1 Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion « P $\Longrightarrow$Q » est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie.

Exemple 1.3.1 *Montrer que si $a = b \Longrightarrow \frac{a+b}{2} = b$*

on a $a = b \Longrightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{2}$

$$\Longrightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}$$
$$\Longrightarrow \frac{a+b}{2} = b$$

1.3.2 Contraposée

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante

L'assertion « $P \Longrightarrow Q$ » est équivalente à « $\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P}$».

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion « $P \Longrightarrow Q$»,

On montre en fait que si $\bar{Q}$ est vraie alors $\bar{P}$ est vraie.

Exemple 1.3.2 *.Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.*

Démonstration. Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair. Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.

Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2k^{'} + 1$ avec $k^{'} = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$.

Et donc n^2 est impair.

Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : Si n^2 est pair alors n est pair.

1.3.3 Absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer « P $\Longrightarrow$ Q » repose sur le principe suivant :

On suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction.

Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc « P $\Longrightarrow$ Q » est vraie.

Exemple 1.3.3 *Soient $a, b \rangle 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Longrightarrow a = b$*

Démonstration. Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$

alors .$a\,(1+a) = b\,(1+b)$ et $a \neq b \Longrightarrow a - b + a^2 - b^2 = 0$ et $a \neq b$

$$\Longrightarrow (a-b)\,(a+b) = 0 \text{ et } a \neq b$$
$$\Longrightarrow (a=b) \text{ car } (a+b) > 0 \text{ et } a \neq b$$

Nous obtenons une contradiction.

Alors $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Longrightarrow a = b$

1.3.4 Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in E, P(x)$ » est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à l'assertion « $\forall x \in E, P(x)$».

Exemple 1.3.4 *Montrer que l'assertion suivante est fausse « $\forall x \in \mathbb{R}(x^2 \geq 1$ ».*
Démonstration. Un contre-exemple est 0.5.

1.3.5 Récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n, est vraie pour tout n $\in \mathbb{N}$.
La démonstration par récurrence se déroule en deux étapes :
1)On prouve $P(0)$.est vraie.
2)On suppose $n \geq 0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que
l'assertion $P(n+1)$ est vraie.
Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.3.5 *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$.*
1) On a $2^0 \geq 0$ c-à-dire $P(0)$.est vraie.
2) On suppose $P(n) : 2^n \geq n$.vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n+1) : 2^{n+1} \geq n+1$ est vraie.
On a

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2^n + 2^n \geq n + 1$$

alors $P(n+1) : 2^{n+1} \geq n+1$ est vraie.
donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$.

Chapitre 2

Les ensembles, les relations et les applications

2.1 Théorie des ensembles

Dans la pratique il y a deux façons de construire ou d´ecrire des ensembles : en donnant la liste de ses éléments, par exemple $E = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ est un ensemble, ou bien en d'écrivant une caractérisation des éléments, par exemple nous admettrons que $\mathbb{N} = \{n | n$ est un entier naturel$\}$ est un ensemble. Parmi les ensembles les plus importants nous,
l'ensemble des nombres entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$,
l'ensembledes nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$,
l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$,
l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$.

2.1.1 L'ensemble fini

On dit que l'ensemble E est fini si nombre d'éléments de E est fini.
Nombre d'éléments de E S'appelle le cardinal de E noté Card (E).

Exemple 2.1.1 $E = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8\}$
donc $Card\ E = 7$
$\mathbb{N}$ *n'est pas un ensemble fini.*

Ensemble vide :

Il s'agit de l'ensemble ne contenant aucun élément ; on le note $\emptyset$; on peut aussi le définir comme $\emptyset = \{x|x \neq x\}$

$Card\ \emptyset = 0$

Ensemble de parties de E noté $\wp(E)$

Exemple 2.1.2 *$E = \{1, 2, 3\}$ alors*

$\wp(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Et on a $Card\wp(E) = 2^{Card\ E}$

2.1.2 Inclusion

On dit qu'un ensemble E est inclus dans un autre ensemble F (ce qu'on note $E \subset F$), si tous les éléments de E sont aussi dans F ; en d'autres termes si $x \in E \Rightarrow x \in F$.

Deux ensembles sont égaux si ils ont les memes éléments ; en particulier :

$$E \subset F \text{ et } F \subset E \Leftrightarrow E = F$$

Exemple 2.1.3 *Si $E = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ et $P = \{0, 2, 5\}$,*

On a $P \subset E$

2.1.3 Intersection

Si E et F sont deux ensembles on peut former un ensemble appelé leur intersection notée $E \cap F$ et définie par :

$$E \cap F = \{x|x \in E \text{ et } x \in F\}$$

Exemple 2.1.4 *Si $E = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ et $P = \{0, 2, 14, 6, 11, 8\}$, alors $E \cap P = \{0, 2, 8\}$.*

2.1.4 Union

Si E et F sont deux ensembles on peut former un ensemble appelé leur union et notée $E \cup F$ et d´efinie par :

$$E \cup F = \{x|x \in E \text{ ou } x \in F\}$$

Exemple 2.1.5 *Si* $E = \{0, 1, 2, 3, 5, 7\}$ *et* $F = \{0, 1, 2, 4, 6, 8\}$
alors $E \cup F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

2.1.5 Complémentaire

Soit F un sous-ensemble de E; on définit le complémentaire de F dans E que l'on note $C_E F$ (ou simplement CF si E est sous-entendu) comme l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F :

$$C_E F = \{x \in E | x \notin F\}$$

Exemple 2.1.6 *Le complémentaire de* $P = \{x \in \mathbb{N} \diagup \exists y \in N, x = 2y\}$ *dans* $\mathbb{N}$ *est l'ensemble des nombres impairs :*

$$C_{\mathbb{N}} P = \{x \in \mathbb{N} \diagup \exists y \in N, x = 2y + 1\}$$

2.1.6 produit cartésien

Produit : Si $x \in E$ et $y \in F$ on peut fabriquer un nouvel élément appelé couple et noté (x, y). L'ensemble de ces couples s'appelle le produit cartésien de E et F et se note :

$$E \times F = \{(x, y) | x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Exemple 2.1.7 $E = \{1, 2\}, F = \{3, 5\}$ *alors*

$$E \times F = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\}$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \diagup x, y \in \mathbb{R}\}$$

Proposition 2.1.1
1) $A \cap B = B \cap A$ *et* $A \cup B = B \cup A$ *(commutativité)*
2) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *et*$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(associativité)*
3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *et* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(distributivité)*
4) $C_E(A \cup B) = C_E B \cap C_E A$,$C_E(A \cap B) = C_E B \cup C_E A$ *(loi de Morgan)*
5) $C_E [C_E(A)] = A$

2.2 Relation d'équivalence et Relation d'ordre

2.2.1 Relations binaires

Définition 2.2.1 *On appelle relation binaire, toute assertion entre deux objets, pouvant être vérifiée ou non. On note xRy et on lit "x est en relation avec y".*

Définition 2.2.2 *Etant donnée une relation binaire R entre les éléments d'un ensemble non vide E, on dit que :*
1. R est Réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in E(xRx)$,
2. R est Transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in E, (xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow (xRz)$
3. R est Symétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in E, (xRy) \Rightarrow (yRx)$
4. R est Anti-Symétrique $\Longleftrightarrow \forall x, y \in E, (xRy) \wedge (yRx) \Rightarrow x = y$

2.2.2 Relations d'équivalence

Définition 2.2.3 *On dit qu'une relation binaire R sur un ensemble E est une relation d'équivalence si elle est Réflexive, Symétrique et Transitive.*

Définition 2.2.4 *On dit que deux éléments x et* $y \in E$ *sont équivalents si* xRy.
On appelle classe d'équivalence d'un élément $x \in E$*, l'ensemble :* $\dot{x} = \{y \in E; xRy\}$.
On appelle ensemble quotient de E par la relation d'équivalence R, l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de E. Cet ensemble est noté $E_{/R} = \{\dot{x} \diagup x \in E\}$.

Exemple 2.2.1 *Dans* $\mathbb{R}$ *on définit la relation R par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, xRy \Longleftrightarrow x^2 = y^2$$

Montrer que R est une relation d'équivalence et donner l'ensemble quotient $\mathbb{R}\backslash_R$.
R est une relation d'équivalence.
i) R est une relation Reflexive, car d'après la Réflexivité de l'égalité on a

$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = x^2$ *donc*

$$\forall x, \in \mathbb{R}, xRx$$

ce qui montre que R est une relation Réflexive.

ii) R est une relation Symétrique, car d'après la Symétrie de l'égalité on a :

$$\begin{aligned}\forall x, y \in R, xRy &\Longleftrightarrow x^2 = y^2 \\ &\Longleftrightarrow y^2 = x^2 \\ &\Longleftrightarrow yRx\end{aligned}$$

iii) R est une relation Transitive, car d'après la Transitivité de l'égalité on a :

$$\begin{aligned}\forall x, y, z \in R, (xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow x^2 &= y^2 \wedge y^2 = z^2 \\ &\Longrightarrow x^2 = z^2 \\ &\Longrightarrow xRz\end{aligned}$$

Donc

$$\forall x, y, z \in R, (xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow (xRz)$$

ce qui montre que R est une relation Transitive.

De i) , ii) et iii) , on déduit que R est une relation déquivalence.

Donc :

$$\dot{x} = \{x, -x\}$$

Par suite

$$\mathbb{R}/_R = \{\{x, -x\}, x \in \mathbb{R}\}$$

2.3 Relations d'ordre

Définition 2.3.1 *On dit qu'une relation binaire R sur E est une relation d'ordre si elle est Réflexive, Transitive et Anti-Symétrique.*

Dans la littérature, les relations d'ordre sont souvent notées $\preceq$.

Si $x \preceq y$, *on dit que* x *est inférieur ou égal à* y *ou que* y *est supérieur ou égal à* x.

Définition 2.3.2 *Soit une relation d'ordre sur un ensemble E.*

1. On dit que deux éléments x et y de E sont comparables si :

$$x \preceq y \text{ ou } y \preceq x$$

2. On dit que est une relation d'ordre total, ou que E est totalement ordonné, si tous les éléments de E sont deux à deux comparables. Si non, on dit que la relation est une relation d'ordre partiel ou que E est partiellement ordonné.

Exemple 2.3.1 *Soit E un ensemble et $P(E)$ l'ensemble de parties de E. On considère sur $P(E)$, la relation binaire "$\subset$", alors :*
"$\subset$" est une relation d'ordre sur E.
1. "$\subset$" est Réflexive, car pour tout ensemble $A \in P(E)$, on a $A \subset A$.
2. "$\subset$" est Transitive, car pour tous $A, B, C \in P(E)$,

$$(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$$

est transitive
3. "$\subset$" est Anti-symétrique, car pour tous $A, B \in P(E)$,

$$(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Rightarrow A = B$$

De 1), 2) et 3) on déduit que "$\subset$" est une relation d'ordre sur E.

2.4 Application injective, surjective, bijective : définition d'une application, image directe, image réciproque, caractéristique d'une application.

Définition 2.4.1 *On appelle Fonctions d'un ensemble E dans un ensemble F, toute correspondance f entre les éléments de E et ceux de F*
Domaine de définition de f : *noté D_f l'ensemble des éléments $x \in E$ fait correspondre un unique élément $y \in F$ noté $f(x)$.*
$y = f(x)$ est appelé image de x et x est un antécédant de y.
E est appelé ensemble de départ et F l'ensemble d'arrivée de l'application f.

On écrit

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad E \to F \\ x \quad &\to \quad f(x) \end{aligned}$$

Définition 2.4.2 *L' application est une fonctions d'un ensemble E dans un ensemble F,tel que $D_f = E$.*

Définition 2.4.3 *f est une application si :*

$$\forall x, x^{'} \in E, (x = x^{'}) \Rightarrow (f(x) = f(x^{'})$$

Exemple 2.4.1 *L'application $Id : E \to E$ telle que*

$$\forall x \in E,\ Id(x) = x$$

est appelée application identité sur E.

Graphe

Définition 2.4.4 *On appelle graphe d'une application $f : E \to F$, l'ensemble*

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in E\}$$

2.4.1 Composition d'applications

Définition 2.4.5 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$, on note $g \circ f$ l'application de E dans G définie par :*

$$\forall x \in E, g \circ f(x) = g(f(x))$$

Cette application est appelée composée des applications $f$et g.

Exemple 2.4.2 *Etant données les applications*

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \quad &\to \quad x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\to x+1 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} g \circ f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\to (x+1)^2 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} f \circ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\to \left(x^2+1\right) \end{aligned}$$

Il est claire que

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Proposition 2.4.1 *Composée de deux applications injectives et injective*

Composée de deux applications surjectives et surjective

Composée de deux applications bijectives et bijective

2.4.2 L'application réciproque (ou inverse)

Définition 2.4.6 *Si* $f : E \to F$ *est bijective on définie l'application réciproque par*

$$\begin{aligned} f^{-1} &: F \to E \\ y &\to x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Exemple 2.4.3 $f(x) = 3x + 1$

On a

$$y = 3x + 1 \Longrightarrow x = \frac{y-1}{3}$$

Donc

$$\begin{aligned} f^{-1} &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\to f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3} \end{aligned}$$

2.4.3 Restriction et prolongement d'une application

Définition 2.4.7 *Etant donnée une application $f : E \to F$.*

1.On appelle restriction de f à un sous ensemble non vide X de E, l'application $g : X- \to F$ telle que

$$\forall x \in X, g(x) = f(x)$$

On note $g = f_{/X}$

2. Etant donné un ensemble G tel que $E \subset G$, on appelle prolongement de l'application f à l'ensemble G, toute application h de G dans F telle que f est la restriction de h à E.

Remarque 2.4.1 *Si F n'est pas un singleton, alors le prolongement de f n'est pas unique.*

Exemple 2.4.4 *Etant donnée l'application*

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \quad &\to \quad log x \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{array}{ll} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to log|x| & x \to log(2|x| - x) \end{array}$$

sont deux prolongements différents de f à $\mathbb{R}$.

2.4.4 Images et images réciproques

Définition 2.4.8 *Soient $A \subset E$ et $M \subset F$.*

1. On appelle image de A par f, l'ensemble des images des éléments de A noté $f(A)$:

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F$$

C'est-à- dire

$$y \in f(A) \Longleftrightarrow \exists x \in A, y = f(x)$$

2. On appelle image réciproque de M par f, l'ensemble des antécédents des éléments de M, noté $f^{-1}(M)$:

$$f^{-1}(M) = \{x \in E, f(x) \in M\} \subset E$$

C'est-à- dire

$$x \in f^{-1}(M) \Longleftrightarrow f(x) \in M$$

Proposition 2.4.2 *Soient $f : E \to F$,A, $B \subset E$ et $M, N \subset F$, alors*

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

2.$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

3. $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f(N)$

4. $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f(N)$

5. $f^{-1}\complement_F M = \complement_E f^{-1}(M)$

Preuve. 1. Soit $y \in F$, alors

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) & \iff \exists x \in A \cup B; y = f(x) \\ & \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B); y = f(x) \\ & \Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (y = f(x))] \vee [(x \in A) \wedge (y = f(x))] \\ & \iff (y \in f(A)) \vee (y \in f(B)) \\ & \iff y \in f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

ce qui montre que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

2. Soit$y \in F$, alors

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) & \Rightarrow \exists x \in A \cap B; y = f(x) \\ & \Longrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in B)] \wedge (y = f(x)) \\ & \Longrightarrow [(x \in A) \wedge (y = f(x))] \wedge [(x \in B) \wedge (y = f(x))] \\ & \Longrightarrow (y \in f(A)) \wedge (y \in f(B) \\ & \Longrightarrow y \in f(A) \cap f(B) \\ & \Longrightarrow y \in f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

ce qui montre que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

3-Soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(M \cup N) & \iff f(x) \in M \cap N \\ & \iff f(x) \in M \vee f(x) \in N \\ & \iff x \in f^{-1}(M) \vee x \in f^{-1}(N) \\ & \iff x \in f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N) \end{aligned}$$

ce qui montre que $f^{-1}(M \cup N) + f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$

4-Soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\complement_F N). & \iff f(x) \in \complement_F N \\ & \iff f(x) \notin N \\ & \iff x \notin f^{-1}(N) \\ & \iff x \in \complement_E f^{-1}(N) \end{aligned}$$

ce qui montre que $f^{-1}(\complement_F N) = \complement_E f^{-1}(N)$. □

2.4.5 Applications injectives, surjectives, bijectives

Définition 2.4.9 *On dit que :*

1. f est injective si tout élément de F possède au plus un antécédant.

$$f \text{ injective} \Longleftrightarrow \forall x, x^{'} \in E, f(x) = f(x^{'}) \Rightarrow x = x^{'}$$

2. f est surjective si tout élément de F possède au moins un antécédant.

$$f \text{ surjective} \Longleftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$$

3. f est bijective si elle est injective et surjective

$$f \text{ bijective} \Longleftrightarrow \forall y \in F, \exists x \,(\text{unique}) \in F; f(x) = y.$$

Exemple 2.4.5 *La application*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \to & x^2 \end{array}$$

Non injective car $f(1) = f(-1) \Longrightarrow 1 = -1$ *est fausse*

La application

$$\begin{array}{rcl} g & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \to & 3x \end{array}$$

injective car $g(x) = g\left(x^{'}\right) \Longrightarrow 3x = 3x^{'}$

$$\Longrightarrow x = x^{'}$$

La application g *est surjective car* $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x = \frac{y}{3} \in \mathbb{R}$ *tel que* $y = g(x)$,

donc g *est bijective car* g *est surjective et injective.*

Chapitre 3

Les fonctions réelles à une variable réelle

Soit $f : U \to R$ une fonction. On dit que :

f est majorée sur U si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in U, f(x) \leq M$;

f est minorée sur U si$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in U, f(x) \geq M$;

f est bornée sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U, c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in U, |f(x)| \leq M$;

f est croissante sur U si

$$\forall x, y \in U x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

f est décroissante sur U si

$$\forall x, y \in U x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$

f est paire si

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$$

f est impaire si

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(-x).$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$.

La fonction f est dite périodique de période T si

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x).$$

3.1 Limite d'une fonction

Soit $a \in \mathbb{R}$. Dans tout ce chapitre, on dira qu'une fonction f de domaine de définition D$_f$ est définie au voisinage de a s'il existe un réel $h > 0$ tel que l'on soit dans un des trois cas suivants :

$D_f \cap [a-h, a])\backslash\{a\} = [a-h, a[$i.e. f est définie dans un voisinage à gauche de a et éventuellement non définie en a ;

$D_f \cap [a, a+h])\backslash\{a\} =]a, a+h]$ i.e. f est définie dans un voisinage à droite de a et éventuellement non définie en a ;

$D_f \cap [a-h, a+h])\backslash\{a\} = [a-h, a+h]\backslash\{a\}$ i.e. f est définie dans un voisinage de a et éventuellement nondéfinie en a.

Définition 3.1.1 *Soit $a, l \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie au voisinage de a. On dit que f admet l pour limite en a si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Exemple 3.1.1 $\lim\limits_{x \to 0} (3x+1) = 1$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha = \frac{\varepsilon}{3} > 0, \forall x \in D_f, , |x-0| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |(3x+1) - 1| < \varepsilon$$

3.1.1 Limite à gauche, à droite

Définition 3.1.2 *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie au voisinage de a.*
1 On dit que f admet l pour limite à gauche en a si la restriction de f à $D_f \cap]-\infty, a[$ admet l pour limite en a. Dans ce cas, cette limite est unique et on la note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, , a - \alpha < x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

2- On dit que f admet l pour limite à droite en a si la restriction de f à $D_f \cap]a, +\infty[$admet l pour limite on la note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, a < x < a + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Exemple 3.1.2

$$\begin{array}{lll} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \to & f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \;\; x \geq 0 \\ 4x+5 & si \;\; x < 0 \end{cases} \end{array}$$

On a

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 5.$
Dans ce cas on dit que f n'admet pas une limiteen 0.

Proposition 3.1.1

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l$$

3.1.2 Unicité de la limite

Théorème 3.1.1 *Soit f une fonction définie au voisinage de a. Si f admet une limite l en a, elle est unique. On note alors*

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$
Si f est définie en a et admet une limite en a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

3.1.3 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 3.1.2 *Caractérisation séquentielle de la limite*

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. *Soit* $l \in \mathbb{R}$. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$
(ii) Pour toute suite (u_n) *à valeurs dans* D_f *de limite a,* $(f(u_n))$ *a pour limite l.*

3.1.4 Méthode.

Pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en a, il suffit de trouver deux suites (u_n) et (v_n)de même limite a telles que $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$,possèdent des limites différentes.

Exemple 3.1.3 *La fonction* $x \to \sin \dfrac{1}{x}$ *n'admet pas de limite en* 0.

$$(u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}), (v_n = \frac{1}{\pi + 2n\pi})$$

$$(f(u_n)) \to 1, (f(v_n)) \to 0,$$

possèdent des limites différentes

Théorème 3.1.3 *Soient f et g deux fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Soient $l, l\prime, \in \mathbb{R}$.*

Théorème 3.1.4 *Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l\prime$*

Alors

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = l + l\prime$

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\, g(x) = ll\prime$

3) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l\prime}$ *si* $l\prime \neq 0$

3.1.5 Composition de limites

Proposition 3.1.2 *Soient f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et g une fonction définie au voisinage de $b \in \mathbb{R}$. Soit enfin $l \in \mathbb{R}$.*

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *et* $\lim\limits_{x\to b} g(x) = l$ *alors* $\lim\limits_{x\to a} g \circ f(x) = l$

3.1.6 Passage à la limite

Soient f et g deux fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Soient $l, l\prime, m, M \in R$.

(i) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l\prime$ et si f $\leq$ g au voisinage de a, alors $l \leq l\prime$.

(ii)$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ et f $\leq$ M au voisinage de a, alors $l \leq M$.

(iii) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ et f $\geq$ m au voisinage de a, alors l $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

3.1.7 Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration

Théorème 3.1.5 *Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration*

Soient $a, l \in \mathbb{R}$. Soit f ,m et M trois fonctions définies au voisinage de a.

Théorème 3.1.6 *Théorème des gendarmes/d'encadrement :*

Si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = l$ *et* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$ *et* $h \leq f \leq g$ *au voisinage de a, alors f admet une limite en a et celle-ci vaut l.*

Théorème 3.1.7 *Théorème de minoration :*

Si lim $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ *et* $g \leq f$ *au voisinage de a, alors f admet une limite en a et celle-ci vaut* $+\infty$.

Théorème 3.1.8 *Théorème de majoration :*

Si lim $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ *et* $g \geq f$ *au voisinage de a, alors f admet une limite en a et celle-ci vaut* $-\infty$.

Corollaire 3.1.1 *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de* $a \in \mathbb{R}$. *Si* $|f| \leq g$ *au voisinage de a et si l*$\lim\limits_{x\to a} g(x)=$ *0, alors* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

Corollaire 3.1.2 *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de* $a \in \mathbb{R}$. *Si f est bornée au voisinage de a et si* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=$ *0, alors* $\lim\limits_{x\to a} f(x)\, g(x) = 0$

Exemple 3.1.4

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

car $\sin\frac{1}{x}$ *bornée et* $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

3.2 Continuité d'une fonction

Définition 3.2.1 *. Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a. On dit que f est continue en a si f est définie en a et*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

C'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, , |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Exemple 3.2.1 *La fonction*

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \quad &\to \quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si \quad x \geq 0 \\ 0 \quad si \quad x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

est continue en 0.

car

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$$

Définition 3.2.2 *Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a. On dit que f*

1)f est continue à gauche en a si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

C'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, a - \alpha < x < a \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

.2)f est continue à droite en a si

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

C'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, a < x < a + \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Exemple 3.2.2 *La fonction*

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \quad &\to \quad f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & si \;\; x > 1 \\ 2 & si \;\; x = 1 \\ 3x & si \;\; x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

est continue en 0.

car $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2 = f(1)$ *et* $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 3 \neq f(1)$

f est continue à droite en 1 mais n'est pas ontinue à gauche en 1.

dans ce cas f n'est pas ontinue en 1.

Proposition 3.2.1 *f est définie en a* $\Longleftrightarrow$ *f est continue à droite et continue à gauche en a.*

3.2.1 Prolongement par continuité

Définition 3.2.3 *Soit f un efonction définie au voisinage de a mais non définie en a. On dit que f est prolongeable par*

continuité en a si f admet une limite finie l en a. Le prolongement g de f définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si \;\; x \neq a \\ l & si \;\; x = a \end{cases}$$

est alors continu en a.

Exemple 3.2.3 $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$

Le prolongement g de f définie par

$$g(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 \quad si \quad x = 0 \end{cases}$$

3.2.2 Continuité ponctuelle et composition

Proposition 3.2.2 *Soit f une fonction définie au voisinage de a et continue en a. Soit g une fonction définie au voisinage de f(a) et continue en f(a). Alors* $g \circ f$ *est continue en a.*

3.2.3 Continuité sur un intervalle

Dans ce paragraphe, I désigne un intervalle.

Définition 3.2.4 *Continuité sur un intervalle*

Soit$f : I \to \mathbb{R}$*. On dit que* f *est continue sur* I *si* f *est continue en tout point de* I*.*

On note $C(I, \mathbb{R})$ *ou* $C^0(I, \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions continues sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{R}$

3.2.4 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3.2.1 *Soit f une fonction continue sur intervalle* $[a, b]$*. Pour tout réel y compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$*, il existe* $x \in [a, b]$ *tel que* $y = f(x)$*..*

Proposition 3.2.3 *Soit f une fonction continue sur intervalle* $[a, b]$*. Pour tout réel y compris entre* $f(a)\ f(b) < 0$*, il existe* $x \in [a, b]$ *tel que* $f(x) = 0$*.*

Exemple 3.2.4 *Montrons que* $x + xe^{(x-1)(x+2)} = 0$ *admet une solution*

On pose

$$f(x) \;= x + xe^{(x-1)(x+2)}$$

et on aussi $f(1) = 2 \geq 0$ *et* $f(-2) = -4 < 0$*.*

alors il existe x *tel que* $f(x) = 0$*.*

3.2.5 Opérations sur les fonctions continues

Théorème 3.2.2 *. Soient f et g deux fonctions continues au point a. Alors*$f + g, f - g, fg$ *sont continues, ainsi que* $\dfrac{f}{g}$ *si* $g(a) \neq 0$*.*

3.3 Dérivabilité

Définition 3.3.1 . *Soit f une fonction et $a \in Df$. On dit que f est dérivable au point a si l'accroissement fini*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a une limite lorsque x tend vers a.

Cette limite est appelée dérivée de f au point a, alors notée $f'(a)$, ou bien $\frac{df}{dx}(a)$.

3.3.1 Opérations sur les dérivées

Théorème 3.3.1 *Soient f et g deux fonctions dérivables au point a. Alors$f+g, f-g$, fg sont dérivables en a, ainsi que $\dfrac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$. On a de plus les formules :*

$(f+g)'(a) = f\prime(a) + g\prime(a)$,

$(f-g)'(a) = f\prime(a) - g\prime(a)$,

$(fg)'(a) = f(a)g\prime(a) + f\prime(a)g(a)$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f\prime(a)g(a) - f(a)g\prime(a)}{[g(a)]^2}$

Preuve :.comme exercice.

Théorème 3.3.2 *Soit f une fonction dérivable en a, et g une fonction dérivable en f(a) = b. Alors $g \circ f$ est dérivable en a, et l'on a :*

$$(g \circ f)\prime(a) = f\prime(a).g\prime(f(a))$$

Exemple 3.3.1 $f(x) = (x^3+1)^5 \Longrightarrow f\prime(x) = 15x(x^3+1)^4$

$f(x) = \sqrt{x^3+1} \Longrightarrow f\prime(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$

Proposition 3.3.1 . *Si f est croissante sur un intervalle f et dérivable en $a \in D_f$, alors $f\prime(a) \geq 0$. Si f est décroissante, alors $f\prime(a) \leq 0$.*

3.3.2 La dérivée d'une fonction composée

Définition 3.3.2 .*Soit f une fonction définie sur un intervalle I On dit que f admet un maximum local en $a \in I$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, on a $f(x) \leq f(a)$. Si l'inégalité est vraie pour tous les $x \in I$, on dit que f a un maximum global en a. Si c'est l'inégalité inverse $f(x) \geq f(a)$ qui a lieu, on parle de minimum local ou global.*

3.3.3 Condition nécessaire de 1er ordre

Théorème 3.3.3 *Si f est définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$, est dérivable et admet un maximum ou minimum local en $a \in I$, alors $f^{'}(a) = 0$.*

3.3.4 théorème de rolle

Théorème 3.3.4 *(Rolle). Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$, dérivable sur $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f\prime(c) = 0$.*

3.3.5 théorème des accroissements finis

Théorème 3.3.5 *(des accroissements finis). Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que :*

$$f^{'}(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Preuve.

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

. Alors g est continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$,.De plus $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(a)$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle à g, et déduire qu'il existe c tel que $0 = g\prime(c) = f\prime(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a)$. C'est ce qu'il fallait démontrer. □

Chapitre 4

Les fiches TD

4.1 Fiche TD 1

Exercice 1 : Soient P , Q deux assertions.

Écrire les tables de vérité des assertions suivante :

1.$P \Leftrightarrow \overline{\overline{P}}$

2. $\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$

3.$\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$

Que remarquez vous ?

Exercice 2 :

1) Écrire à l'aide des quantificateurs la phrase suivante :

« Pour tout nombre réel, son carré est positif ». Puis écrire la négation.

« Pour tout entier n, il existe un unique réel x tel que $exp(x)$ égale n » Puis écrire la négation.

2) Écrire la négation. de

i) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y > 0, (x + y > 10)$

ii) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y > 0, (x + y > 8)$

iii) $P \wedge (\overline{P} \vee Q)$ (voir exercice 1)

Exercice 3 :

1.(Raisonnement direct) . Montrer que si $a, b \in Q$ alors $a + b \in Q$.

2.(Contre-exemple) Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x < 2 \Rightarrow x2 < 4$?

3. (Contraposée) n^2 est impair alors n est impair.

3.(Absurde) Soient a, $b \in \mathbb{R}^+$. Montrer que si $a = b$ alors $\dfrac{a}{(1+b)} = \dfrac{b}{(1+a)}$

3. (Récurrence) Montrer que pour tout $n \in N, 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

4.2 Correction de fiche TD 1

Exercice 1 : Soient P, Q, deux assertions.

Table de vérité de $P \Leftrightarrow \overline{\overline{\mathrm{P}}}$

P	$\overline{\mathrm{P}}$	$\overline{\overline{\mathrm{P}}}$	$P \Leftrightarrow \overline{\overline{\mathrm{P}}}$
V	F	V	V
F	V	F	V

Table de vérité de $\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	(P∧Q)	$\overline{(P \wedge Q)}$	$(\overline{P} \vee \overline{Q})$	$\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F	V

Table de vérité de $\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	(P∨Q)	$\overline{(P \vee Q)}$	$(\overline{P} \wedge \overline{Q}$	$\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F	V

Nous remarquons

L'assertion de P est l'assertion $\overline{\overline{\mathrm{P}}}$

L'assertion de $\overline{(P \wedge Q)}$ est l'assertion $(\overline{P} \vee \overline{Q})$

L'assertion de $\overline{(P \vee Q)}$ est l'assertion $(\overline{P} \wedge \overline{Q})$

Exercice 2 :

1 « Pour tout nombre réel, son carré est positif ».

$$\forall x \in \mathbb{R}, x2 \geq 0 \text{ sa négation est } .\exists x \in \mathbb{R}, x2 < 0$$

« Pour tout entier n, il existe un unique réel x tel que exp(x) égale n »

$$\forall n \in N, \exists x \in \mathbb{R}/exp(x) = n \text{ sa négation est } .\exists n \in N, \forall x \in \mathbb{R}/exp(x) \neq n$$

La négation. de $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > 0, (x + y > 10)$ est $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, (x + y \leq 10)$

La négation. de $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, (x + y > 8)$est $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > 0, (x + y \leq 8)$

La négation. de .$P \wedge (\overline{P} \vee Q)$ est $\overline{P} \vee (P \wedge \overline{Q})$

Exercice 3 :

1.(Raisonnement direct) pour .montrer que

$$\text{si } a, b \in Q \text{ alors } a + b \in Q.$$

On suppose $a, b \in Q$ et on montre $a + b \in Q$.

On a $a, b \in Q$ donc

$a \in Q$ alors il existe $n, m \in Z$ tel que $a = \dfrac{m}{n}$(la définition de Q)

$b \in Q$ alors il existe $n^{'}, m^{'} \in Z$ tel que $b = \dfrac{m^{'}}{n^{'}}$

Alors

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{m^{'}}{n^{'}} = \frac{mn^{'} + nm^{'}}{nn^{'}}$$

mais $mn^{'} + nm^{'} \in Z$ et $nn^{'} \in Z$ donc

$$a + b \in Q$$

2.(Contre-exemple) Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$?

Contre-exemple $x = -10$

$$-10 \leq 2 \Longrightarrow (-10)^2 \leq 4$$

est fausse car $-10 \leq 2$ est vraie et $10^2 \leq 4$ est fausse

3. (Contraposée) pour montrer que l'assertion

n^2 est impair alors n est impair. est vraie

On montre que

n est pair alors n^2 est pair est vraie

car $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\bar{q} \Longrightarrow \bar{p})$

n est pair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$

alors

$$n^2 = 4k^2$$

donc

$$n^2 = 2(2k^2)$$

finalement n^2 est pair

4.(Absurde) Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$. Montrer que si $a = b$ alors $\dfrac{a}{(1+b)} = \dfrac{b}{(1+a)}$

par absurde on suppose $a = b$ et $\dfrac{a}{(1+b)} \neq \dfrac{b}{(1+a)}$

donc $a = b$ et $a(1+a) \neq b(1+b)$

donc $a = b$ et $a - b + a^2 - b^2 \neq 0$

donc $a = b$ et $(a-b)(1+a+b) \neq 0$

est une contradiction

car $a = b \Longrightarrow (a-b) = 0 \Longrightarrow (a-b)(1+a+b) = 0$

5. (Récurrence) Montrer que pour tout $n \in N, 1+2+ \ldots\ldots\ldots\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

p(n) : $1+2+ \ldots\ldots\ldots\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

1)pour $n = 0$ on a p(0) est vraie *car* $0 = \dfrac{0\,(0+1)}{2}$

2) on suppose p(n) : $1+2+ \ldots\ldots\ldots\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ est vraie

et on montre p$(n+1)$: $1+2+ \ldots\ldots\ldots\ldots+n+(n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ est vraie

on a $1+2+ \ldots\ldots\ldots\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

alors $1+2+ \ldots\ldots\ldots\ldots+n + (n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

donc $1+2+ \ldots\ldots\ldots\ldots+n + (n+1) = \dfrac{n(n+1)+2\,(n+1)}{2}$

finalement $1+2+ \ldots\ldots\ldots\ldots+n+(n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

4.3 Fiche TD 2

Exercice 1 : Soit E un ensemble.

Montrer pour toutes parties A, B, C de E

1. $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$

2. $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$

3. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

4. Démontrer que si $A \cup B = A \cap B$ alors $A = B$

5. $A \subset B \Longrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$

Exercice 2 :

1.Dans $\mathbb{Z}$ on considère la relation $\Re$ définie par

$\forall\,(x, y) \in \mathbb{Z}^2, x\Re y \Longleftrightarrow x - y$ est une multiple de 4

-Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

- Déterminer l'ensemble quotient.

- Montrer que $\dot{7} = \dot{3}$.

2. Soit $\preccurlyeq$ la relation sur $\mathbb{N}$ définie par

x$\preccurlyeq y \Longleftrightarrow x$ divise y

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

L'ordre il est total ?

Exercice 3 :

Soient $f : \mathbb{R}^{\div} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow f(x) = x^2 + 1$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow g(x) = 2x + 1$$

Etudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité de f et g.

Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$

Exercice 4 : Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications

et A et B deux ensembles de E, et M et N deux ensembles de F,

montrer que :

1. $A \subset B \Longrightarrow f\,(A) \subset f\,(B)$

2.$M \subset N \Longrightarrow f^{-1}(M) \subset f^{-1}(N)$

3. Si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.

4. Si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.

4.4 Correction de fiche TD 2

Exercice 1 :

Soit E un ensemble.

Montrons pour toutes parties A, B, C de E

1. $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$

$$\begin{aligned} x \in \complement_E(A \cup B) &\Longleftrightarrow x \notin (A \cup B) \\ &\Longleftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\Longleftrightarrow x \in \complement_E A \text{ et } \in \complement_E B \\ &\Longleftrightarrow x \in \complement_E A \cap \complement_E B \end{aligned}$$

2. $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$

$$\begin{aligned} x \in \complement_E(A \cap B) &\Longleftrightarrow x \notin (A \cap B) \\ &\Longleftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\Longleftrightarrow x \in \complement_E A \text{ ou } \in \complement_E B \\ &\Longleftrightarrow x \in \complement_E A \cup \complement_E B \end{aligned}$$

3. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

4. Démontrer que si $A \cup B = A \cap B$ alors $A = B$

On suppose $A \cup B = A \cap B$ et on montre que $A = B$

$$\begin{aligned} x \in A \Rightarrow x &\in A \cup B \\ &\Longrightarrow x \in A \cap B \text{ car } A \cup B = A \cap B \\ &\Longrightarrow x \in B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in B \Rightarrow x &\in A \cup B \\ &\Longrightarrow x \in A \cap B \text{ car } A \cup B = A \cap B \\ &\Longrightarrow x \in A \end{aligned}$$

5. $A \subset B \Longrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$

On suppose $A \subset B$ et on montre que $\complement_E B \subset \complement_E A$

$$\begin{aligned} x \in \complement_E B &\Longrightarrow x \notin B \\ &\Longrightarrow x \notin A \text{ car } A \subset B \\ &\Longrightarrow x \in \complement_E A \end{aligned}$$

Exercice 2 :

1.Dans $\mathbb{Z}$ on considère la relation $\Re$ définie par

$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x\Re y \Longleftrightarrow x - y$ est une multiple de 4

-Montrons que $\Re$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

i) R est une relation Reflexive

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x - x = 0$ est une multiple de 4 donc

$$\forall x, \in \mathbb{R}, xRx$$

ce qui montre que R est une relation Réflexive.

ii) R est une relation Symétrique :

$\forall x, y \in R, xRy \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \diagup x - y = 4k$

$\Longrightarrow \exists - k \in \mathbb{Z} \diagup y - x = 4(-k)$

$\Longrightarrow yRx$

iii) R est une relation Transitive :

$\forall x, y, z \in R, (xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow k \in \mathbb{Z} \diagup x - y = 4k \wedge k' \in \mathbb{Z} \diagup y - z = 4k'$

$\Longrightarrow x - z = 4k + 4k' = 4\left(k + k'\right) \diagup k'' = k + k'$

$\Longrightarrow x - z = 4k''$

$\Longrightarrow xRz$

Donc

$$\forall x, y, z \in R, (xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow (xRz)$$

ce qui montre que R est une relation Transitive.

De i) , ii) et iii) , on déduit que R est une relation déquivalence.

- L'ensemble quotient

$$\mathbb{Z}/_R = \{\{x + 4k \diagup k \in \mathbb{Z}\} \diagup x \in \mathbb{Z}\}$$

- Montrons que $\dot{7} = \dot{3}$.

x$\in \dot{7} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \diagup x = 7 + 4k$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \diagup x = 3 + 4 + 4k$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \diagup x = 3 + 4(1 + k) \diagup k' = (1 + k)$

$\Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} \diagup x = 3 + 4k'$

$\Longleftrightarrow x \in \dot{3}$

2. Soit $\preccurlyeq$ la relation sur $\mathbb{N}$ définie par

x$\preccurlyeq y \Longleftrightarrow x$ divise y

Montrons que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

i) R est une relation Reflexive :

$\forall x \in \mathbb{R}$, x divise x donc

$$\forall x, \in \mathbb{R}, xRx$$

ce qui montre que $\preccurlyeq$ est une relation Réflexive.

ii) R est une relation Anti-symétrique, car :

$\forall x, y \in R, x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x \Longrightarrow x$ divise y et y divise x

$\Longrightarrow y = x.$

iii) R est une relation Transitive :

$\forall x, y, z \in R, (x \preccurlyeq y) \wedge (y \preccurlyeq z) \Rightarrow x$ divise y et y divise z

$\Longrightarrow x$ divise z

$\Longrightarrow x \preccurlyeq z.$

Donc

$$\forall x, y, z \in R, (x \preccurlyeq y) \wedge (y \preccurlyeq z) \Rightarrow (x \preccurlyeq z)$$

ce qui montre que R est une relation Transitive.

cette relation non totalement ordonnée

car $5 \preccurlyeq 3$ ou $3 \preccurlyeq 5$ n'est pas vraie.

Exercice 3 :

Soient $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = x^2 + 1$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow g(x) = 2x + 1$

f injective car $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+, f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

f non surjective car $-3 = x^2 + 1$ n'admet pas une solution.

f non bijective car f non surjective

g est injective car $g(x) = g(y) \Longrightarrow 2x + 1 = 2y + 1$

$$\Longrightarrow 2x = 2y.$$

$$\Longrightarrow x = y$$

g est surjective car $y = 2x + 1 \Longrightarrow x = \dfrac{y-1}{2}$

c'est à dire $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \dfrac{y-1}{2}$

g est bijective car f est injective et surjective.

On précise $g \circ f$ et $f \circ g$

$g \circ f(x) = 2(x^2 + 1) + 1 = 2x^2 + 3.$

$g \circ f(x) = (2x+1)^2 + 1 = 4x^2 + +4x + 2.$

Exercice 4 : Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications

et A et B deux ensembles de E, et M et N deux ensembles de F,

montrons que :

1. $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$

On suppose $A \subset B$ et on montre que $f(A) \subset f(B)$

$$\begin{aligned} x \in f(A) &\Longrightarrow \exists y \in A / y = f(x) \\ &\Longrightarrow \exists y \in A \subset B / y = f(x) \\ &\Longrightarrow \exists y \in B / y = f(x) \\ &\Longrightarrow x \in f(B) \end{aligned}$$

2.$M \subset N \Longrightarrow f^{-1}(M) \subset f^{-1}(N)$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(M) &\Longrightarrow \exists y \in M / y = f(x) \\ &\Longrightarrow \exists y \in M \subset N / y = f(x) \\ &\Longrightarrow \exists y \in N / y = f(x) \\ &\Longrightarrow x \in f^{-1}(N) \end{aligned}$$

3. Si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.

$\forall y_1, y_2 \in F$ alors $\exists x_1, x_2 \in E / y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ .car f surjective

$$\begin{aligned} g(y_1) = g(y_2) &\Longrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \text{ car } g \circ f \text{ est injective} \\ &\Longrightarrow f(x_1) = f(x_2) \\ &\Longrightarrow y_1 = y_2. \end{aligned}$$

4. Si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.

$\forall z \in G$ alors $\exists x \in E / z = g \circ f(x)$ car $g \circ f$ est surjective.

$$\begin{aligned}
\text{Soit } y \in F &\Longrightarrow g(y) = z \in G \\
&\Longrightarrow \exists x \in E \diagup g(y) = g \circ f(x) \quad \text{comme } g \text{ est injective.} \\
&\Longrightarrow \exists x \in E \diagup y = f(x).
\end{aligned}$$

Alors f est surjective.

4.5 Fiche TD 3

Exercice 1 : Soit $f :]-1, \infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)} - \sqrt{(1+x)}}$$

Déterminer les limites de f, si elle existent, en 0 et en $+\infty$.

Exercice 2 :

1) Si $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ et $\lim_{x\to 5} g(x) = 1$,

Donner la limite de $g \circ f(x)$ lorsque $x \to 1$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$.

Déterminer l'ensemble des points où elle est continue.

Exercice 3 : Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

Montrer qu'il existe c dans $[0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

Exercice 4 : Dans chacun des cas suivants, dire si l'application f se prolonge par continuité en a et donner le prolongement par continuité le cas échéant

1.$f : [-3, +\infty[\setminus\{6\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{(\sqrt{(x+3)} - 3)}{(x-6)}$,et $a = 6$.

2.$f : R\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}}{x}$,et $a = 0$.

Exercice 5 :

Soit a et b deux nombres réels. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$x \to \begin{cases} ax + b \text{ si } & x \geq 0 \\ \dfrac{1}{1+x} \quad \text{si} & x < 0 \end{cases}$$

1) Donner une condition sur b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer a et b tels que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et dans ce cas calculer $f\prime(0)$.

Exercice 6 : Les fonctions f et g définies par :

$f(x) = x|x|$, $g(x) = \sqrt{(x^2 - x)}$.

Sont-elles dérivables en 0 ?

Exercice 1 : Soit $f :] - 1, \infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)} - \sqrt{(1+x)}}$$

les limites de f en 0 et en $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)} - \sqrt{(1+x)}} &= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)} - \sqrt{(1+x)}} \times \frac{\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1+x)}}{\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1+x)}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1+x)}\right)}{1+x^2-(1+x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1+x)}\right)}{x^2-x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1+x)}\right)}{x(x-1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1+x)}\right)}{(x-1)} = -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)} - \sqrt{(1+x)}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1+x)}\right)}{(x-1)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x\sqrt{(\frac{1}{x^2}+1)} + x\sqrt{(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x})}\right)}{x(1-\frac{1}{x})} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\sqrt{(\frac{1}{x^2}+1)} + \sqrt{(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x})}\right)}{x(1-\frac{1}{x})} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{(\frac{1}{x^2}+1)} + \sqrt{(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x})}\right)}{(1-\frac{1}{x})} = 1
\end{aligned}$$

Exercice 2 :

1) $\lim\limits_{x\to 1} g \circ f(x) = 1$,

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$.

Notons déjà que cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$ il reste à étudier la continuité en 0.

D'autre part $\sqrt{x^2} = |x|$, nous allons donc distinguer deux cas $x \geq 0$ et $x \leq 0$.

Si $x \geq 0$ alors $f(x) = x + 1$ donc

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

Si $x \leq 0$ alors $f(x) = x - 1$donc

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

Ce qui montre que n'est pas continue en 0.

Exercice 3 : Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ défini par

$$g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2})$$

$g(0) = f(0) - f(\frac{1}{2})$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = f(\frac{1}{2}) - f(1) = f(\frac{1}{2}) - f(0) = -g(0)$

alors $g(0).g\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0$ et la fonction g est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que

$$g(c) = 0$$

,c'est-à-dire tel que

$$f(c) = f(c + \frac{1}{2})$$

Exercice 4 :

1.$f : [-3, +\infty[\setminus\{6\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{(\sqrt{(x+3)} - 3)}{(x-6)}$,et $a = 6$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 6} \frac{(\sqrt{(x+3)} - 3)}{(x-6)} &= \lim_{x\to 6} \frac{(\sqrt{(x+3)} - 3)}{(x-6)} \times \frac{(\sqrt{(x+3)} + 3)}{(\sqrt{(x+3)} + 3)} \\ &= \lim_{x\to 6} \frac{(x+3-9)}{(x-6)(\sqrt{(x+3)} + 3)} \\ &= \lim_{x\to 6} \frac{(x-6)}{(x-6)(\sqrt{(x+3)} + 3)} \\ &= \lim_{x\to 6} \frac{1}{(\sqrt{(x+3)} + 3)} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

le prolongement par continuité défini par

$$x \to \begin{cases} \dfrac{(\sqrt{(x+3)} - 3)}{(x-6)}, \text{ si } x \neq 6 \\ \dfrac{1}{6} \quad \text{si} \quad x = 6 \end{cases}$$

2.$f : R\backslash\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}}{x}$,et $a = 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}}{x} = 1$$

le prolongement par continuité défini par

$$x \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Exercice 5 :

Soit a et b deux nombres réels. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$x \rightarrow \begin{cases} ax + b \text{ si } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{1+x} \quad \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

1) f est continue sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} ax + b = b$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1+x} = 1$

f est continue sur $\mathbb{R}$ si $b = 1$.

2)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{ax + 1 - 1}{x - 0} = a$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\dfrac{1}{1+x} - 1}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{1+x} = -1$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ si $a = -1$ et $b = 1$.

Exercice 6 : Les fonctions f et g définies par :

$f(x) = x|x|$, $g(x) = \sqrt{(x^2 - x)}$.

1) On a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} |x| = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} |x| = 0$$

alors f est dérivable en 0 et $f^{'}(0) = 0$.

2) On a la fonction g n'est pas définie au voisinage à gauche de 0 car :

x	$-\infty$	-	0	+	1	+	$+\infty$
$x-1$		-		-	0	+	
$x(x-1) = x^2 - x$		+	0	-	0	+	

Donc

$$D_g =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$$

Bibliographie

[1] Serie Ramis, Mathématiques Tout-en-un pour la Licence Cours complet et 270 exercices corrigés , (2007).

[2] Hitta Amara, Cours Algebre et Analyse I ,LMD : DEUG I–MI/ST– (2008/2009) .

[3] Marc Hindry,Cours mathématiques premiere année (L1).

[4] M. Mechab, Cours d'algèbre-LMD Sciences et Techniques.