Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Ahmed Zabana Relizane

Cours Analyse complexe (Maths 4)

2 année LMD-Sciences et Techniques

Par: Beddani Abdallah

baddanixabd@yahoo.fr

Ce travail pour mes étudiants

Départements - Génie Mécanique

- Génie Civil

2017/2018

Table des Matières

1 Fonctions holomorphes (Conditions de Cauchy Riemann) **2**

1.1 Limites et continuité 3

1.2 Fonctions Holomorphes 4

1.2.1 Conditions de Cauchy-Riemann 4

1.3 Fonctions harmoniques 7

2 Fonctions élémentaires **9**

2.1 Fonction exponentielle 9

2.1.1 Propriétés de la fonction exponentielle 9

2.1.2 Formule d'Euler 10

2.2 Fonctions hyperboliques 11

2.3 Fonctions trigonométriques 12

2.4 Fonction Logarithme 13

3 Intégration dans le domaine complexe **15**

3.1 Chemins et courbes dans le plan complexe 15

3.1.1 Intégration le long d'une courbe 16

3.1.2 Propriétés 17

3.1.3 Longueur d'une courbe 17

3.1.4 Théorème d'estimation 18

3.1.5 Théorème de Cauchy 19

3.1.6 Formule intégrale de Cauchy 21

Chapitre 1

Fonctions holomorphes (Conditions de Cauchy Riemann)

Définition 1.0.1 *On appelle fonction complexe à une variable complexe, une fonction de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} f \;&:\; \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ &:\; z \to f(z) \end{aligned}$$

Remarque 1 *Posons :* $z = x + iy$ *et* $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, *où* $\operatorname{Re} f(z) = P(x,y)$ *et* $\operatorname{Im} f(z) = Q(x,y)$.

Exemple 1

$$\begin{aligned} f \;&:\; \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \\ &:\; z \to f(z) = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$$
$$P(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, Q(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

Exemple 2

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \\ &: z \to f(z) = |z| \end{aligned}$$

$f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} + i0$

$P(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, Q(x, y) = 0.$

1.1 Limites et continuité

Définition 1.1.1

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |z - z_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon$

**On dit que f est continue en z_0 si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.*

**f est continue dans un domaine D si elle est continue en tout point de D.*

Remarque 2 *Si $l = a + ib, z_0 = x_0 + iy_0$ et $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$*

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l \Longleftrightarrow \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} P(x, y) = a$ et $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} Q(x, y) = b$

f est continue en $z_0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} P(x, y) = P(x_0, y_0)$ et $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} Q(x, y) = Q(x_0, y_0)$.

c'est a dire f est continue en $z_0 \Longleftrightarrow P$ et Q sont continues en (x_0, y_0)

Proposition 1.1.1 *Si f et g sont continues en z_0 alors, $f + g, f.g, f \circ g$ et $\dfrac{f}{g}$ $(g(z_0) \neq 0)$ le sont aussi.*

Exemple 3 $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z}{\bar{z}}$ *n'existe pas, car*

Si $z = x + i0$ donc

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

Si $z = 0 + iy$ donc

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{y \to 0} \frac{iy}{-iy} = -1$$

finalement $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z}{\bar{z}}$ n'existe pas

1.2 Fonctions Holomorphes

On note $D(z_0, r) = \{z \in C$ tel que $|z - z0| < r, r > 0\}$.

Définition 1.2.1 *Soit f une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On dit que f est dérivable en z_0 si $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe, et dans ce cas elle sera notée $f'(z_0)$.*

Définition 1.2.2 *f holomorphe en $z_0 \Longleftrightarrow \exists r > 0$, f dérivable en $D(z_0, r)$.*

Proposition 1.2.1

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(f.g)' = f'.g + f.g'$
- $(f \circ g)' = (f' \circ g).g\prime$

Exemple 4 $f(z) = z^2 \Longrightarrow f'(z) = 2z$.

1.2.1 Conditions de Cauchy-Riemann

Théorème 1.2.1 *Soient $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ et $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$*

Si f est holomorphe z_0 alors $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases}$.

Preuve. $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{P(x, y) + iQ(x, y) - P(x_0, y_0) + iQ(x_0, y_0)}{z - z_0} \\ &= \frac{(P(x, y) - P(x_0, y_0))}{(x - x_0) + i(y - y_0)} + i\left(\frac{Q(x, y) - Q(x_0, y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}\right) \end{aligned}$$

Fixons $y = y_0$ on a

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(P(x, y) - P(x_0, y_0))}{(x - x_0)} + i\left(\frac{Q(x, y) - Q(x_0, y_0)}{(x - x_0)}\right)$$

donc $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$
Fixons $x = x_0$ on a

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{(P(x,y)-P(x_0,y_0))}{i\,(y-y_0)} + i\left(\frac{Q(x,y)-Q(x_0,y_0)}{i\,(y-y_0)}\right)$$

donc $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)$
finalement

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)$$

c'est à dire

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) \end{cases}$$

. ■

Définition 1.2.3 *Une fonction g est dite de classe C^1 sur D si elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à x et y continues sur D.*

Proposition 1.2.2 *Soient $z = x + iy$ et $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$.*

f est holomorphe sur U $\Leftrightarrow$ les fonctions $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ de classe C^1 sur U et leurs dirévées partielles vérifient les conditions de cauchy riemann.

Théorème 1.2.2 *La fonction $z \to f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ est différentiable dans le champ complexe, au point $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si, les fonctions $(x,y) \to P(x,y)$ et $(x,y) \to Q(x,y)$ sont différentiables au point (x_0,y_0) et si leurs dérivées vérifient les conditions de Cauchy-Riemann.*

Proposition 1.2.3 *Soit f une fonction différentiable dans le champ complexe alors*

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \end{aligned}$$

Preuve. $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$
Fixons $y = y_0$

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{(P(x,y)-P(x_0,y_0))}{(x-x_0)} + i\left(\frac{Q(x,y)-Q(x_0,y_0)}{(x-x_0)}\right)$$

donc $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$
Fixons $x = x_0$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(P(x, y) - P(x_0, y_0))}{i\,(y - y_0)} + i\left(\frac{Q(x, y) - Q(x_0, y_0)}{i\,(y - y_0)}\right)$$

donc $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$ ■

Exemple 5 $f(z) = z^2$

On a alors

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + iy)^2 \\ &= x^2 - y^2 + 2iyx \end{aligned}$$

$P(x, y) = x^2 - y^2, Q(x, y) = 2xy.$

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = 2x = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \ \textit{et}\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 2y = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

donc f est une fonction différentiable et $f'(z) = 2z$.

Proposition 1.2.4 *Soit f une fonction différentiable dans le champ complexe alors*

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Preuve. Comme f une est fonction différentiable dans le champ complexe alors
$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$
et on aussi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) + i\left(\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + i\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)\right) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

1.3 Fonctions harmoniques

Définition 1.3.1 *Soit φ une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. φ est dite de classe C^2 sur Ω, (on note $\varphi \in C^2(\Omega)$), si $\forall (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ existent et continues.*

Définition 1.3.2 *Soit φ une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2*

f est harmonique sur Ω si $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \forall (x,y) \in \Omega$.

La fonction $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ est notée $\triangle\varphi$ et est appelée laplacien de φ.

Exemple 6 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$(x,y) \to \varphi(x,y) = e^x \cos y$

φ est de classe C^2 dans $\mathbb{R}^2$.

Et $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y \Longrightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y) = e^x \cos y$,

$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin y \Longrightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x,y) = -e^x \cos y$.

D'où : $\triangle\varphi(x,y) = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x,y) = 0$

donc φ une fonction harmonique.

Théorème 1.3.1 *Soit f une fonction holomorphe et telle que $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, alors les deux fonctions réelles P et Q sont harmoniques.*

Preuve. La démonstration est une application directe des conditions de Cauchy-Riemann.

■

Théorème 1.3.2 *Soit P une fonction harmonique de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ alors il existe une fonction f holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\mathrm{Re}(f) = P$.(Ou $\mathrm{Im}(f) = P$).*

Exemple 7 $P(x,y) = e^x \cos y$ *une fonction harmonique.*

On suppose que $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ une fonction holomorphe donc

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin y = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

$e^x \cos y = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \Longrightarrow Q(x, y) = e^x \sin y + g(x)$

$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = e^x \sin y + g'(x) = e^x \sin y$

alors

$$Q(x, y) = e^x \sin y + c, c \in \mathbb{R}.$$

Chapitre 2

Fonctions élémentaires

2.1 Fonction exponentielle

On définit la fonction exponentielle par

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ &: z \to f(z) = e^z \end{aligned}$$

on a aussi

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

2.1.1 Propriétés de la fonction exponentielle

1) $f(0) = e^0 = 1$.

2) $\forall z, z' \in \mathbb{C}$ on a: $f(z + z') = f(z).f(z')$.

3)$\forall z \in \mathbb{C}, e^z \neq 0$.

On suppose qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z = 0$

on a $1 = e^0 = e^{z-z} = e^z.e^{-z} = 0$ est une contradiction.

4)$\forall z \in \mathbb{C}$, $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

2.1.2 Formule d'Euler

Considérons le cas où $z = iy$ avec y dans $\mathbb{R}$

On reconnaît le développement en série entière des fonctions sinus et cosinus, d'où :

$\forall y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos y + i \sin y. \end{aligned}$$

c'est à dire

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

et aussi

$$\begin{cases} \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \\ \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \end{cases}$$

$\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} \\ &= e^x e^{iy} \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) \end{aligned}$$

donc $\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y, \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$.

Proposition 2.1.1 *La fonction exponenetielle est une fonction holomorphe.*

Preuve. $P(x, y) = \operatorname{Re} e^z = e^x \cos y, Q(x, y) = \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$.

Les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ de classe C^1 sur $\mathbb{C}$ et leurs dirévées partielles vérifient les conditions de Cauchy Riemann, c'est à dire la fonction exponenetielle est une fonction holomorphe. ■

2.2 Fonctions hyperboliques

On définit les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique, et qu'on note respectivement ch et sh par,

$$\begin{cases} \sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} \\ \cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} \end{cases}$$

On définit la fonction «tangente hyperbolique» et qu'on note th par

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \text{ où } z \in C \text{ et } z \neq i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in Z.$$

Proposition 2.2.1 $\forall z \in \mathbb{C}, (\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1$

Preuve. On a

$$\begin{cases} \sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} \\ \cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} (\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 &= \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

■

Et on a aussi

$ch(-z) = chz$

$sh(-z) = -shz$

$ch(z + i\pi) = -chz$

$sh(z + i\pi) = -shz$

$ch\left(z + i\frac{\pi}{2}\right) = ishz$

$sh\left(z + i\frac{\pi}{2}\right) = ichz$

Pour les dérivées on a :

$(shz)' = chz$ et $(chz)' = shz$

2.3 Fonctions trigonométriques

On définit $\sin z$ et $\cos z$ pour z complexe par:

$$\begin{cases} \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \end{cases}$$

On définit aussi

$$\begin{aligned} tgz &= \frac{\sin z}{\cos z}, z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in Z \\ cotgz &= \frac{\cos z}{\sin z}, z \neq \pi + k\pi \text{ où } k \in Z \end{aligned}$$

Proposition 2.3.1 $\forall z \in \mathbb{C}$,

$\cos iz = chz, \cos z = chiz$

$\sin iz = ishz, shiz = i \sin z$

Preuve. $\cos iz = \dfrac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = chz$

$\sin iz = \dfrac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = ishz$

$chiz = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$

$shiz = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \sin z$ ∎

Proposition 2.3.2 $\forall z \in \mathbb{C}, (\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1$

Preuve. On a $\cos z = chiz, \sin z = -ishiz$ donc

$$\begin{aligned} (\cos z)^2 + (\sin z)^2 &= (ch\,(iz))^2 + (-ish\,(iz))^2 \\ &= (ch\,(iz))^2 - (sh\,(iz))^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

∎

2.4 Fonction Logarithme

On définit la fonction logarithme comme suit:

$$\begin{aligned} Log: \quad & \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & z \to Logz = Log|z| + i \ arg \ z \quad \text{où } 0 \leq argz < 2\pi. \end{aligned}$$

(détermination principale)

Interpritation:

$$\forall t \in \mathbb{C}, e^t = z$$

$$z = |z| \left(\cos\left(\arg z\right) + i \sin\left(\arg z\right)\right)$$

si $z = x + iy$ on a

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et

$$\cos\left(\arg z\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} et \sin\left(\arg z\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

comme $e^t = z$ donc $t = Logz$

si $t = x_t + iy_t$

alors

$$\begin{aligned} e^t &= e^{x_t + iy_t} \\ &= e^{x_t} e^{iy_t} \\ &= e^{x_t} \left(\cos\left(y_t\right) + i \sin\left(y_t\right)\right) \end{aligned}$$

par la comparaison on trouve $\begin{cases} e^{x_t} = |z| \\ y_t = \arg z + 2k\pi \end{cases}$

donc

$$\begin{cases} x_t = Log\,|z| \\ y_t = \arg z + 2k\pi \end{cases}$$

Exemple 8 *1)On calcule* $Log(1+i)$

$Log(1+i) = Log\,|1+i| + i\arg(1+i)$

$|1+i| = \sqrt{2}, \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$Log(1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$

2)On calcule $Log(-1-i)$

$Log(-1-i) = Log\,|-1-i| + i\arg(-1-i)$

$|-1-i| = \sqrt{2}, \arg(-1-i) = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

$Log(1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{5\pi}{4}$

Chapitre 3

Intégration dans le domaine complexe

3.1 Chemins et courbes dans le plan complexe

Définition 3.1.1 *Un chemin est défini comme fonction continue*

$z : [a, b] \to \mathbb{C}$

$z(t) = x(t) + iy(t)$

Ses points initial et final sont $z_0 = f(a)$ *et* $z_1 = f(b)$*.*

Définition 3.1.2 *Soit* $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ *une fonction continue, l'image* $A = \{z(t) \in \mathbb{C}, t \in [a, b]\}$ *s'appelle* ***courbe*** *dans* $\mathbb{C}$*.*

Exemple 9

$$z(t) = \cos(t) + i\sin(t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

On a $\operatorname{Re} z\,(t) = \cos(t), \operatorname{Im} z\,(t) = \sin(t)$

$z_0 = z(0) = 1, z\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

Exemple 10

$$z(t) = z_0 + r\cos(t) + ir\sin(t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

Cercle de centre z_0 *et de rayon* r*.*

Exemple 11

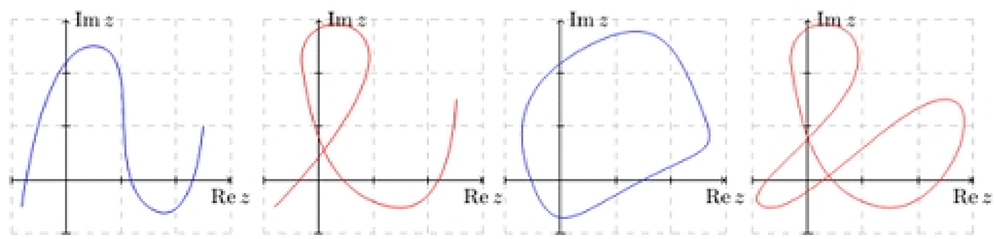
$$z(t) = z_0(1-t) + z_1 t, 0 \leq t \leq 1.$$

segment de droit limité par z_0 et z_1.

Définition 3.1.3 *1) Si les points initial et final d'un chemin coincident, il est appelé chemin fermé ou lacet.*

2. On dit qu'un chemin est simple s'il ne contient pas des points doubles.

3. Toute courbe fermée et simple, est appelée courbe de Jordan.



Chemin non fermé et simple | Chemin non fermé et non simple | Chemin fermé et simple | Chemin fermé et non simple

3.1.1 Intégration le long d'une courbe

Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction continue et, A une **courbe** dans $\mathbb{D}$ paramétrée par la fonction différentiable $z : [a, b] \to \mathbb{C}$.

Définition 3.1.4 *On définit l'intégrale de f le long de la courbe A par:*

$$\int_A f(z)dz = \int_a^b f\left(z\left(t\right)\right) z'\left(t\right) dt$$

L'intégrale le long d'une courbe est aussi appelée intégrale le long d'un chemin.

Exemple 12 $A = \left\{z(t) \in \mathbb{C} \text{ tel que } z(t) = e^{it}, t \in [0, \pi]\right\}$

Calculons l'intégrale $\int_A z dz$

On a $z'(t) = ie^{it}$

Donc

$$\begin{aligned}\int_A zdz &= \int_0^{\pi} z(t)\, z'(t)\, dt \\ &= \int_0^{\pi} e^{it} i e^{it} dt \\ &= \int_0^{\pi} i e^{2it} dt \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{2it}\right]_0^{\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

3.1.2 Propriétés

Soit C une courbe dans le plan complexe. On note par $-C$ la courbe C orientée dans son sens inverse. On suppose que $C = C_1 \cup C_2$ avec le point final de la courbe C_1 coincide avec le point initial de la courbe C_2.

Si f et g sont intégrables le long de C, alors

1) $\int_C (f(z) + g(z))\, dz = \int_C f(z)dz + \int_C f(z)dz$
2) $\int_C \alpha f(z)dz = \alpha \int_C f(z)dz, \forall \alpha \in \mathbb{C}.$
3) $\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$
4) $\int_{C_1 \cup C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$

3.1.3 Longueur d'une courbe

Soit C une courbe défini par la fonction continue

$$\begin{aligned} z &: [a,b] \to \mathbb{C} \\ z(t) &= x(t) + iy(t). \end{aligned}$$

tel que $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ existe et continue.

Définition 3.1.5 *La longueur L_C de la courbe C est définie par*

$$L_C = \int_a^b \left|z'(t)\right| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \ \ dt}$$

Exemple 13

$$C = \left\{z(t) \in \mathbb{C}/z(t) = 2e^{it}, 0 \leq t \leq \pi\right\}$$

On a

$$z'(t) = 2ie^{it} \Longrightarrow \left|z'(t)\right| = 2$$

alors

$$L_C = \int_0^\pi \left|z'(t)\right| dt = 2\pi.$$

3.1.4 Théorème d'estimation

Théorème 3.1.1 *Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction continue et, A une* ***courbe*** *dans $\mathbb{D}$ paramétrée par la fonction différentiable $z : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $|f(z)| \leq M, \forall z \in A$ alors*

$$\left|\int_A f(z)dz\right| \leq ML_A$$

L_A la longueur dela courbe A.

Preuve.

$$\begin{aligned} \left|\int_A f(z)dz\right| &= \left|\int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt\right| \\ &\leq \int_a^b |f(z(t))| \left|z'(t)\right| dt \\ &\leq ML_A \end{aligned}$$

■

Proposition 3.1.1 *Soit $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ et A est la* ***courbe*** *paramétrée par la fonction* *différentiable* $z(t) = x(t) + iy(t)$, *alors*

$$\begin{aligned}
\int_A f(z)dz &= \int_a^b f\left(z\left(t\right)\right) z'\left(t\right) dt \\
&= \left[\int_a^b P(x\left(t\right), y\left(t\right)) + iQ(x\left(t\right), y\left(t\right))\right] \left(x'(t) + iy'(t)\right) dt \\
&= \int_a^b \left(P(x\left(t\right), y\left(t\right))x'(t) - Q(x\left(t\right), y\left(t\right))y'\left(t\right)\right) dt \\
&\quad + i\int_a^b \left(P(x\left(t\right), y\left(t\right))y'(t) + Q(x\left(t\right), y\left(t\right))x'(t)\right) dt
\end{aligned}$$

Exemple 14 $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ *et* A *est la* ***courbe*** *paramétrée par la fonction différentiable* $z(t) = t + it, t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
\int_A f(z)dz &= \int_0^1 \left(P(x\left(t\right), y\left(t\right))x'(t) - Q(x\left(t\right), y\left(t\right))y'\left(t\right)\right) dt \\
&\quad + i\int_0^1 \left(P(x\left(t\right), y\left(t\right))y'(t) + Q(x\left(t\right), y\left(t\right))x'(t)\right) dt \\
&= \int_0^1 -2t^2 dt + i\int_0^1 2t^2 dt \\
&= \left[-\frac{2}{3}t^3\right]_0^1 + i\left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^1 \\
&= -\frac{2}{3} + i\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

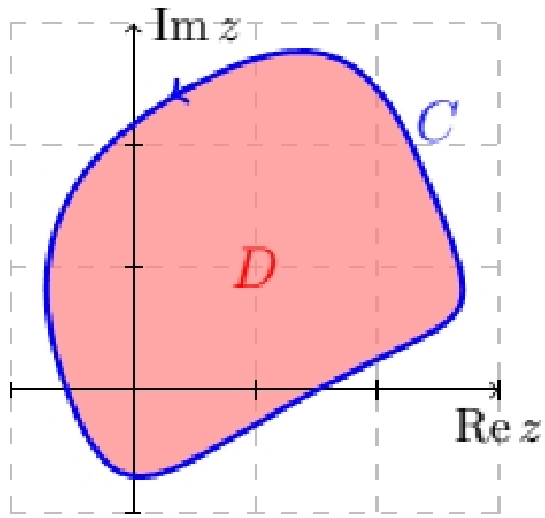
3.1.5 Théorème de Cauchy

Définition 3.1.6 *On dit que* A *est connexe si:*

A est la réunion de deux parties disjoints alors l'un est vide est l'outre égale à A.

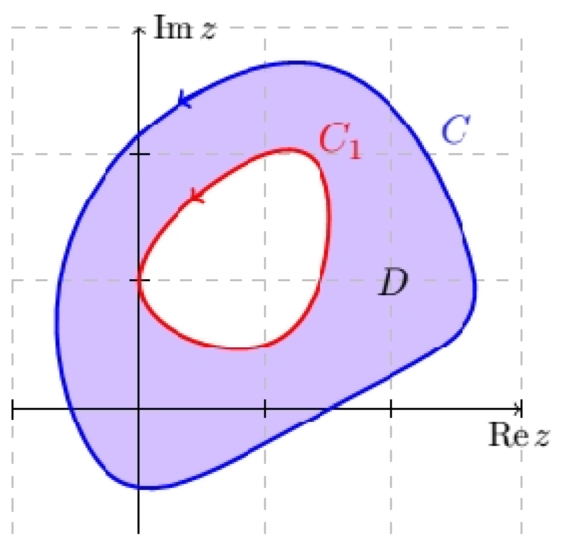
Théorème 3.1.2 *Soit* f *une fonction holomorphe sur un sous ensemble connexe* D *et sur sa frontière* C *tel que* C *est une courbe fermée simple. Alors on a:*

$$\int_C f(z)dz = 0$$



Proposition 3.1.2 *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine connexe limité par deux courbes fermées simples C_1 et C_2 et sur ces courbes. Alors*

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$



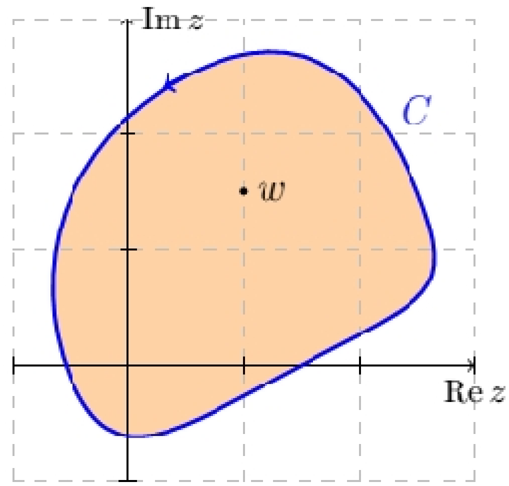
3.1.6 Formule intégrale de Cauchy

Soit f une fonction holomorphe sur un sous ensemble D et sur sa frontière C tel que C est une courbe fermée simple.

Alors on a:

Si $w \in D$ et $w \notin C$ dans ce cas on a:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-w}dz = f(w)$$



De meme la n-ième dérivée de f en w est donnée par

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}dz = f^{(n)}(w), n = 1, 2, 3, ..., ..$$

Exemple 15 *On calcule* $\int_C \frac{1}{(z-2)(z+1)}dz$

tel que

$$C = \left\{z(t) \in \mathbb{C} / z(t) = 2 + e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi\right\}$$

La fonction $f(z) = \frac{1}{z+1}$ *est une fonction holomorphe sur le disque* D *et sur sa frontière* C *avec* C *est une courbe fermée simple et* $z = 2 \in D, 2 \notin C$*. Donc d'aprés la formule intégrale de Cauchy*

$$\int_C \frac{1}{(z-2)(z+1)}dz = \int_C \frac{f(z)}{z-2}dz = 2\pi i f(2) = \frac{2}{3}\pi i.$$

Centre Universitaire Ahmed ZABANA Relizane
Maths 4-2017/2018
2 année LMD-S.T
Fiche TD 1

Exercice 1 :
Montrer que la fonction f est holomorphe sur l'ouvert U dans les cas suivants
1) $U = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z \neq 0\}$, $f(z) = \ln|z| + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.
2) $U = \mathbb{C}^*$, $f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Exercice 2 :
Déterminer les conditions sur les reéls a, b, c et d qui rendent la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tel que

$$f(z) = ax^3 + bxy^2 + i\left(cx^2y + dy^3\right)$$

Exercice 3 :
Etudier l'harmonicité des fonctions suivantes
1) $P(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
2) $f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$ sur $\mathbb{C}$.

Exercice 4 : Sous quelles conditions sur les reéls a, b, c et d la fonction f

$$P(x,y) = ax^3 + bxy^2 + cx^2y + dy^3$$

est-elle harmonique sur $\mathbb{R}^2$?.

Exercice 5 :
Déterminer les fonctions holomorphes ayant la fonction P comme partie réelle
1) $P(x,y) = 2xy$ sur $\mathbb{C}$.
2) $P(x,y) = e^x \cos y$ sur $\mathbb{C}$.

Centre Universitaire Ahmed ZABANA Relizane
Maths 4-2017/2018
2 année LMD-S.T
Fiche TD 2

Exercice 1 :
1) Montrer que pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$:
$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$
$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$
2) Montrer que $\cos z, \cosh z$ sont holomorphes.

Exercice 2 : Calcules
$\sin i$, $\cosh i$, $\log(-1)$.

Exercice 3 :
Résoudre les équations suivantes :
$e^z = i$, $\cosh z = 4$.

Exercice 4 :
Vérifier les conditions de Cauchy Riemann pour :
1) $f(z) = ze^z$ sur $\mathbb{C}$.
2) $f(z) = z + |z|^2$ sur $\mathbb{C}$.

Exercice 5 :
$\cos i$, $\sinh i$, $\log i$.

Exercice 6 :
1) Montrer que pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$:
$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$
$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$
2) Montrer que $\sin z, \sinh z$ sont holomorphes.

Exercice 7 :
Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, tel que $a \operatorname{Im} f + b \operatorname{Re} f = c$ avec a, b et c sont des constants reélles non nuls.
Montrer que f est constant.

Exercice 8 :
Déterminer les fonctions harmoniques de la forme
$f(x,y) = g(x^2 - y^2), (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2.

Correction

Exercice 1 :
1) Montrons que pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$
On a

$$\begin{aligned}
\cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\
&= \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2} \\
&= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^{y}(\cos x - i \sin x)}{2} \\
&= \cos(x)\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) - i \sin x \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right) \\
&= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y
\end{aligned}$$

$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$

$$\begin{aligned}
\cosh z &= \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \\
&= \frac{e^{x+iy} + e^{-x-iy}}{2} \\
&= \frac{e^{x}(\cos y + i \sin y) + e^{-x}(\cos y - i \sin y)}{2} \\
&= \cos(y)\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right) + i \sin y \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) \\
&= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y
\end{aligned}$$

2) Montrons que $\cos z, \cosh z$ sont holomorphes.
On a $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$
$P(x, y) = \cos x \cosh y, Q(x, y) = -\sin x \sinh y$
sont des fonctions de classe C^1et les condition de cauchy Riemann sont satisfaites
On a $\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$
$P(x, y) = \cosh x \cos y, Q(x, y) = \sinh x \sin y$
sont des fonctions de classe C^1et les condition de cauchy Riemann sont satisfaites
Exercice 2 : Calcules
$\sin i = \dfrac{e^{-1} - e}{2},$
$\cosh i = \dfrac{e^{i} + e^{-i}}{2} = \cos 1,$
$\log(-1) = \log|-1| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$

Exercice 3 :
Résoudre les équations suivantes :
$e^{z} = i = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$ donc$z = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$
$\cosh z = 4$ c'est à dire $\dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2} = 4$

$$e^{2z} - 8e^{z} + 1 = 0$$

$y = e^z, y^2 - 8y + 1 = 0$
$y_1 = 4 - \sqrt{15}$ et $y_2 = 4 + \sqrt{15}$
$e^{z_1} = 4 - \sqrt{15} = e^{\log\left(4-\sqrt{15}\right)+i2k\pi}$
$\mathrm{z}_1 = \log\left(4 - \sqrt{15}\right) + i2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
$\mathrm{z}_2 = \log\left(4 + \sqrt{15}\right) + i2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Exercice 4 :

Vérifier les conditions de Chauchy Riemann pour :
1) $f(z) = ze^z$ sur $\mathbb{C}$.
$f(z) = ze^z = (x+iy)\,e^{x+iy} = e^x\left(x\cos y - y\sin y + i\left(y\cos y + x\sin y\right)\right)$
$P(x,y) = e^x\left(x\cos y - y\sin y\right), Q(x,y) = e^x\left(y\cos y + x\sin y\right)$
2) $f(z) = z + |z|^2$ sur $\mathbb{C}$.

$f(z) = z + |z|^2 = x + x^2 + y^2 + iy$
$P(x,y) = x + x^2 + y^2, Q(x,y) = y$
Dans ce cas les condition de cauchy Riemann ne sont pas satisfaites

Exercice 5 :

$\cos i$, $\sinh i$, $\log i$.

Exercice 6 :

1) Montrer que pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$:
$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$
$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$
2) Montrer que $\sin z, \sinh z$ sont holomorphes.

Exercice 7 :

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, tel que $a\,\mathrm{Im}\,f + b\,\mathrm{Re}\,f = c$ avec a, b et c sont des constants reélles non nuls.
Montrer que f est constant.
On a f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ donc $\dfrac{\partial\,\mathrm{Re}\,f}{\partial x} = \dfrac{\partial\,\mathrm{Im}\,f}{\partial y}, \dfrac{\partial\,\mathrm{Re}\,f}{\partial y} = -\dfrac{\partial\,\mathrm{Im}\,f}{\partial x}$
et $a\,\mathrm{Im}\,f + b\,\mathrm{Re}\,f = c$ donc

$$\left\{\begin{array}{l} a\dfrac{\partial\,\mathrm{Im}\,f}{\partial x} + b\dfrac{\partial\,\mathrm{Re}\,f}{\partial x} = 0 \\ a\dfrac{\partial\,\mathrm{Im}\,f}{\partial y} + b\dfrac{\partial\,\mathrm{Re}\,f}{\partial y} = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a\dfrac{\partial\,\mathrm{Im}\,f}{\partial x} + b\dfrac{\partial\,\mathrm{Re}\,f}{\partial x} = 0 \\ a\dfrac{\partial\,\mathrm{Re}\,f}{\partial x} - b\dfrac{\partial\,\mathrm{Im}\,f}{\partial x} = 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} ba\dfrac{\partial\,\mathrm{Im}\,f}{\partial x} + b^2\dfrac{\partial\,\mathrm{Re}\,f}{\partial x} = 0 \\ a^2\dfrac{\partial\,\mathrm{Re}\,f}{\partial x} - ab\dfrac{\partial\,\mathrm{Im}\,f}{\partial x} = 0 \end{array}\right.$$

$(a^2 + b^2)\dfrac{\partial\,\mathrm{Re}\,f}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \dfrac{\partial\,\mathrm{Re}\,f}{\partial x} = 0$

finalement $\dfrac{\partial\,\mathrm{Re}\,f}{\partial x} = \dfrac{\partial\,\mathrm{Im}\,f}{\partial x} = \dfrac{\partial\,\mathrm{Im}\,f}{\partial y} = \dfrac{\partial\,\mathrm{Re}\,f}{\partial y} = 0$
c'est à dire f est constant.

Exercice 8 :

Déterminer les fonctions harmoniques de la forme
$f(x,y) = g(x^2 - y^2)\,,(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2.
On a la fonction f de classe C^2 donc
f harmonique $\Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xg'(x^2 - y^2) \Longrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2g'(x^2 - y^2) + 4x^2 g''(x^2 - y^2)$
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2yg'(x^2 - y^2) \Longrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2g'(x^2 - y^2) + 4y^2 g''(x^2 - y^2)$
$(4x^2 + 4y^2)\, g''(x^2 - y^2) = 0$
$g''(x^2 - y^2) = 0 \Longrightarrow g'(x^2 - y^2) = c, c \in \mathbb{R}$
$g(x^2 - y^2) = c(x^2 - y^2) + k, c, k \in \mathbb{R}$

Centre Universitaire Ahmed ZABANA Relizane

Maths 4-2017/2018

2 année LMD-S.T Fiche TD 3

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_\gamma \bar{z}dz \quad , \quad \int_\gamma (z+1)dz \quad , \quad \int_\gamma |z|^2dz \quad , \quad \int_\gamma \arg(z)dz.$$

Où γ le cercle d'unité (parcouru dans le sens direct).

Exercice 2.

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_\gamma zdz \quad , \quad \int_\gamma z^n dz \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad , \quad \int_\gamma \frac{z+1}{z-1}dz \quad , \quad \int_\gamma \frac{\cos z}{z^3}dz.$$

Où γ le bord (parcouru une fois dans le sens direct) du carrée de sommets $1-i$,$1+i$,$-1+i$ et $-1-i$.

Exercice 3.

Soit γ le chemin défini par $\forall t \in [0, 2\pi]$, $\gamma(t) = a\cos t + ib\sin t$ où $a, b > 0$.

1) *Calculer l'intégrale* $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$.

2) *En déduire la valeur de Calculer l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}$.

Exercice 4.

Soit γ_R le demi cercle de centre 0 et de rayon R dans le demi plant $\{z \in \mathbb{C}, Im(z) > 0\}$.

Calculer la limite $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2}dz$.

Exercice 5.

Calculer les intégrales suivantes.

1) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}$ *où γ le cercle $|z| = 2$ parcouru une fois dans le sens direct.*

2) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2+(i-1)z-i}$ *où γ le cercle $|z+i| = 1$ parcouru une fois dans le sens direct.*

3) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$ *où γ le cercle $|z| = R$ parcouru une fois dans le sens direct , où $0 < a < b$.*