Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Ahmed Zabana Relizane

Cours Algèbre 2

1 année Maths et informatiques

Par: Beddani Abdallah

baddanixabd@yahoo.fr

Départements: Maths et informatiques

2017/2018

Table des Matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1 Généralités

Soit K un corps commutatif ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Soit E un ensemble non vide, muni par:

• La loi interne «+» (addition) : $+ : E \times E \to E, (x, y) \to x + y$

$\forall x, y \in E, x + y \in E.$

• La loi externe «·» (multiplication par un scalaire): $\cdot : K \times E \to E, (\lambda, x) \to \lambda \cdot x$

$\forall x \in E, \forall \lambda \in K, \lambda \cdot x \in E.$

Définition 1.1.1 $(E, +, \cdot)$ *est un espace vectoriel sur K (K-ev) si :*

1) $(E, +)$ *est un groupe commutatif c'est à dire*

- *Associative* $\forall x, y, z \in E, (x + y) + z = x + (y + z)$

- *Commutative* $\forall x, y \in E, x + y = y + x$

- *Il existe un élément neutre* $\exists 0_E \in E, \forall x \in E, 0_E + x = x$

- $\forall x \in E, \exists! x' \in E$ *tel que* $x + x' = 0_E$.

2) La loi externe doit vérifier:

- $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in K, \lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$

- $\forall x \in E, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, (\lambda_1 + \lambda_2) x = \lambda_1 x + \lambda_2 x$

- $\forall x \in E, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \lambda \cdot ({}_1\lambda_2 \cdot x) = (\lambda_1 . \lambda_2) \cdot x$

- $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$

Proposition 1.1.1

1) $\forall \alpha \in K, \alpha.0_E = 0_E$

2) $\alpha.0_E = \alpha.(0_E + 0_E) = \alpha.0_E + \alpha.0_E$

Proposition 1.1.2

1)$0.x = 0_E$

2) $0.x = (0+0).x = 0.x + 0.x$

Proposition 1.1.3

1)$(-1).x = -x$

2)$(-1).x + 1.x = (-1+1).x = 0.x = 0$

Exemple 1 *Soit* $K = \mathbb{R}$ *et* $E = \mathbb{R}^2$

- *La loi interne* " $+$ "

$$\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2, (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$

- *La loi externe* " $\cdot$ "

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda (x,y) = (\lambda x, \lambda y).$$

donc $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

Exemple 2 *Soit* $K = \mathbb{R}$ *et* $E = \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$

- *La loi interne* " $+$ "

$\forall (x_1, x_2, ..., x_n), (x'_1, x'_2, ..., x'_n) \in \mathbb{R}^n$,

$(x_1, x_2, ..., x_n) + (x'_1, x'_2, ..., x'_n) = (x_1 + x'_1, ..., x_n + x'_n)$

- *La loi externe* " $\cdot$ "

$\forall\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$\lambda (x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$.

donc $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

Exemple 3 $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction affine*$\}$

$f_1(x) = a_1 x + b_1$ *et* $f_2(x) = a_2 x + b_2$

$f_1(x) + f_2(x) = (a_1 + a_2)x + b_1 + b_2$

$\lambda f_1(x) = \lambda a_1 x + \lambda b_1$

1.2 Sous espace vectoriel

Soit E un $K-$ev et $F \subset E$.

F est un sous espace vectoriel (sev) si :

- $F \neq \emptyset$
- La loi interne " + " est stable dans F : $\forall x, y \in F, x + y \in F.$
- la loi externe " $\cdot$" est stable dans F : $\forall x \in F, \forall \lambda \in K, \lambda \cdot x \in F.$

Exemple 4 $F = \{0_E\}$ *est un sous espace vectoriel.*

Exemple 5 *Soit* $E = \mathbb{R}^3, F = \left\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 / y = -x\right\} = \left\{(x, -x, 0) \in \mathbb{R}^3 / x \in \mathbb{R}\right\}$

On montre que F *est un sous espace vectoriel.*

$\forall (x, y, z), (x', y', z') \in F, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$(x, y, z), (x', y', z') \in F \iff y = -x, y' = -x', z = z' = 0$

donc

1) $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', -x - x', 0) \in F.$

2) $\alpha\ (x, y, z) = (\alpha x, -\alpha x, 0) \in F$

Exemple 6 $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction affine*$\}$

$F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction linéaire*$\}$

F *est un sous espace vectoriel de* E.

$f_1(x) = a_1 x$ *et* $f_2(x) = a_2 x$

$f_1(x) + f_2(x) = (a_1 + a_2)x$ *donc* $f_1 + f_2 \in F$

$\lambda f_1(x) = \lambda a_1 x$ *donc* $\lambda\ f_1 \in F$

1.3 Combinaisons linéaires, familles libres, liées et génératrices

Définition 1.3.1 *Soit E un K-ev et $\{x_i\}_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. On appelle **combinaison linéaire** de la famille $\{x_i\}_{i\in I}$, l'expression $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i x_i$ avec $\lambda_i \in K, i \in I$.*

1.3.1 familles libres ou linéairement indépendante

Définition 1.3.2 *On dit que la famille $\{x_i\}_{i\in I}$ est libre si $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i x_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0, \forall i \in I$.*

Exemple 7 $e_1 = (1,2)\,, e_2 = (1,1) \in \mathbb{R}^2$.

la famille $\{e_1, e_2\}$ est libre.

1.3.2 familles liées ou linéairement dépendante

Définition 1.3.3 *On dit que la famille $\{x_i\}_{i\in I}$ est liée si elle n'est pas libre c'est à dire $\exists\{\lambda_i\}_{i\in I}$ non tous nuls, tel que $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i x_i = 0$.*

Exemple 8 $e_1 = (1,2)\,, e_2 = (1,1)\,, e_3 = (0,1) \in \mathbb{R}^2$.

la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est liée.

car $e_1 - e_2 - e_3 = 0$.

1.3.3 famille génératrice

Définition 1.3.4 *On appelle famille génératrice de E une famille telle que tout élément de E est une combinaison linéaire de cette famille.$\forall x \in E$, $\exists\{\lambda_i\}_{i\in I}$ tel que $x = \sum\limits_{i\in I}\lambda_i x_i$.*

Définition 1.3.5 *On dit que la famille $\{x_i\}_{i\in I}$ est une base de E si $\{x_i\}_{i\in I}$ est une famille libre et génératrice.*

Proposition 1.3.1 *On dit que la famille $\{x_i\}_{i\in I}$ est une base de E ssi $\forall x \in E$, x s'écrit de manière unique $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i x_i$.*

Preuve. 1) $(\Longrightarrow)$

On suppose que la famille $\{x_i\}_{i\in I}$ est une base de E alors $\forall x \in E$, alors $\exists\{\lambda_i\}_{i\in I}$ tel que $x = \sum\limits_{i\in I}\lambda_i x_i$.

car cette famille est génératrice

on suppose $\exists\{\lambda_i\}_{i\in I}$ et $\{\lambda_i'\}_{i\in I}$ tel que $x=\sum\limits_{i\in I}\lambda_i x_i=\sum\limits_{i\in I}\lambda_i' x_i$.

donc $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i x_i-\sum\limits_{i\in I}\lambda_i' x_i=0$

$\sum\limits_{i\in I}\left(\lambda_i-\lambda_i'\right)x_i=0$ comme cette famille est libre on trouve

$\left(\lambda_i-\lambda_i'\right)=0,\forall i\in I$.

c'est à dir x s'écrit de manière unique $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i x_i$.

2) $(\Longleftarrow)$

$\forall x\in E$, x s'écrit de manière unique $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i x_i$.

c'est à dire la famille $\{x_i\}_{i\in I}$ est génératrice

$\sum\limits_{i\in I}\lambda_i x_i=0$ on a aussi $0=\sum\limits_{i\in I}0x_i$

donc $\lambda_i=0,\forall i\in I$ c'est à dire la famille $\{x_i\}_{i\in I}$ est libre. ■

Exemple 9 *Soit* $e_1=(1,0)\,,e_2=(0,1)\in\mathbb{R}^2$. *La famille* $\{e_1,e_2\}$ *s'appelle la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.

Exemple 10 *Soit* $e_1=(1,0,0)\,,e_2=(0,1,0)\,,e_3=(0,0,1)\in\mathbb{R}^2$. *La famille* $\{e_1,e_2,e_3\}$ *s'appelle la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

Définition 1.3.6 *L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de la famille* $S=(x_1,...,x_n)$ *est un sev engendré par* $(x_1,...,x_n)$ *noté com* $(x_1,...,x_n)$.

$$com\,(x_1,...,x_n)=\{\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n/\alpha_1,...,\alpha_n\in K\}$$

Définition 1.3.7 *Soit* $S=(x_1,...,x_n)$, *la dimension de* $F=com\,(x_1,...,x_n)$ *s'appelle le rang de la famille S:* $dimF=rgS$.

Proposition 1.3.2 *Soit* $S=(x_1,...,x_n)$,

• $rgS\leq n$

•$rgS=n$ *alor* S *est libre*

1.4 Espace vectoriel de dimesion finie

Définition 1.4.1 *Un espace vectoriel est de dimension finie si et seulement il est engendré par un nombre fini de vecteurs.*

1.4.1 Dimension

Définition 1.4.2 *La dimension d'un espace vectoriel E de dimension finie est définie comme le nombre de vecteurs de la base de cette espace et est noté $dim(E)$.*

Proposition 1.4.1 *Si E un espace vectoriel de dimension finie alors tous les sev de dimension finie.*

Remarque 1 *Si $dimE = n$, pour montrer qu'une famille de n éléments est une base de E, il suffit de montrer qu'elle est libre ou bien génératrice.*

1.4.2 Somme de deux sous espaces vectoriels

Définition 1.4.3 *Soit F_1et F_2 deux sev de E.*

On appelle somme des sev F_1 et F_2 l'ensemble noté $F_1 + F_2$ défini par:

$$F_1 + F_2 = \{x + y/x \in F_1 \text{ et } y \in F_2\}$$

1.4.3 Somme directe de deux sous espaces vectoriels

Définition 1.4.4 *On appelle somme directe la somme notée $F_1 \oplus F_2$:*

$F_1 \oplus F_2 = F_1 + F_2$ *et* $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Remarque 2 *Si $F = E$, on dit que F_1et F_2 sont supplémentaires.*

Proposition 1.4.2 *Soit E un ev sur K et F_1et F_2 deux sev de E.*

Si $F = F_1 \oplus F_2$ *alors* $\forall z \in F, \exists! x \in F_1$ *et* $\exists! y \in F_2$ *tel que* $z = x + y$.

Preuve. 1)($\Longrightarrow$)On suppose $\exists z \in F$ tel que $\exists x, x' \in F_1$ et $\exists y, y' \in F_2$ avec $z = x+y = x'+y'$
donc $x - x' = y' - y$
et $x - x' \in F_1$ et $y' - y \in F_2$

sachant que $F = F_1 \oplus F_2$ c'est à dire $F_1 \cap F_2 = \{0\}$

donc $x - x' = y' - y = 0$. ■

Proposition 1.4.3 *Soit E un K-ev de dimension finie n*

1) Tout sevF_1 admet au moins un sous-espace supplémentaire, c'est-à-dire qu'il existe un sev F_2 tq $E = F_1 \oplus F_2$

2) Soit $F_1 \neq \emptyset$ et $F_2 \neq \emptyset$ deux sev de E et soit B_1une base de F_1 et B_2 une base de F_2. La famille $\{B_1, B_2\}$ est une base ssi $E = F_1 \oplus F_2$.

Corollaire 1.4.1 *Soit E un K-ev de dimension finie*

$$E = F_1 \oplus F_2 \text{ ssi } \begin{cases} F_1 \cap F_2 = \{0\} \\ \dim E = \dim F_1 + \dim F_2 \end{cases}$$

Proposition 1.4.4 *Soit E un $K - ev$ de dimension finie et F et G deux sev de E, alors :*

$\dim E = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim (F_1 \cap F_2)$.

Chapitre 2

Applications linéaires

Définition 2.0.5 *Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ deux K-espaces vectoriels. On dit que $f : E \to F$ est linéaire si :*

1) $\forall x, y \in E$, on a $f(x+y) = f(x) + f(y)$

2) $\forall \lambda \in K, \forall x \in E$,on a $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

On note $L(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

Définition 2.0.6 *Soit $f : E \to F$. L'application f est linéaire, si et seulement si ,$\forall \lambda, \mu \in K, \forall x, y \in E$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.*

Exemple 11 *Montrons que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (x+y, x-y, 2y)$ est une application linéaire. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et $a = (x,y), b = (x\prime, y\prime) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\begin{aligned}
f(\lambda a + \mu b) &= f(\lambda x + \mu x\prime, \lambda y + \mu y\prime) \\
&= (\lambda x + \mu x\prime + \lambda y + \mu y\prime, \lambda x + \mu x\prime - \lambda y + \mu y\prime, 2\lambda y + 2\mu y\prime) \\
&= \lambda(x+y, x-y, 2y) + \mu(x\prime + y\prime, x\prime - y\prime, 2y\prime) \\
&= \lambda f(a) + \mu f(b).
\end{aligned}$$

2.1 Applications linéaires particulières

2.1.1 Formes linéaires

Définition 2.1.1 *On appelle forme linéaire sur un K-espace vectoriel E, toute application linéaire de E dans K. On note E^*, au lieu de $L(E, K)$, l'ensemble des formes linéaires sur E.*

2.1.2 Endomorphisme

Définition 2.1.2 *On appelle endomorphisme de E, toute applicatin linéaire de E dans lui même. On note L(E), au lieu de L(E, E), l'ensemble des endomorphismes de E.*

2.1.3 Isomorphisme

Définition 2.1.3 *On appelle isomorphisme d'un K-espace vectoriel E vers un K-espace vectoriel F toute application linéaire bijective de E vers F .*

2.1.4 Automorphisme

Définition 2.1.4 *On appelle automorphisme de E, toute application linéaire bijective de E.*

2.2 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 2.2.1 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire.*

1) On appelle image de f l'ensemble notéImf

$$Imf = f(E) = \{y \in F / \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)\}.$$

2) On appelle noyau de f l'ensemble noté $kerf$

$$kerf = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E / f(x) = 0\}.$$

Proposition 2.2.1 *1) Im f est un sous-espace vectoriel de F .*

(2) ker f est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 12 *Déterminons le noyau et l'image de l'aaplication linéaire* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $f : (x, y) \to (x - y, x + y)$*. Soit* $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ *on a* $kerf = \{x, x) | x \in \mathbb{R}\}$ *et* $Imf = \{(x, -x) | x \in \mathbb{R}\}$.

Théorème 2.2.1 *Si* $f : E \to F$ *est une application linéaire alors*

1) f *est surjective, si et seulement si,* $Imf = F$

2) f *est injective, si et seulement si,* $kerf = \{0_E\}$

Preuve.

$$\begin{aligned} f \text{ est surjective } &\Leftrightarrow \forall y \in F / \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x) \\ &\Longleftrightarrow F = \operatorname{Im} f \end{aligned}$$

f est injective, si et seulement si, $kerf = \{0_E\}$

On suppose f est injective et on montre $kerf = \{0_E\}$

Soit $x \in kerf$ donc $f(x) = 0 = f(0_E) \Longrightarrow x = 0_E$.

On suppose $kerf = \{0_E\}$ et on montre f est injective

Soient $x, x' \in E$

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Longrightarrow f(x) - f(x') = 0 \\ &\Longrightarrow f(x - x') = 0 \\ &\Longrightarrow x - x' = 0 \\ &\Longrightarrow x = x'. \blacksquare \end{aligned}$$

2.3 Rang d'une application linéaire

Soit f une application linéaire de E dans F

Définition 2.3.1 *Le rang d'une application linéaire* f *est égal à la dimension de* $Im(f)$*:* $dim(Imf) = rg(f)$

Proposition 2.3.1 *1) on a toujours* $rg(f) \leq dimF$

2) f *est surjective ssi* $rg(f) = dimF$

3) f *est injective ssi* $rg(f) = dimE$

4) f *est bijective ssi* $rg(f) = dimE = dimF$

2.3.1 Théorème du rang

Soit f une application linéaire de E dans F avec $dimE = n$, alors $dimE = dim(Kerf) + dim(Imf)$.

Exemple 13 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x + y$

$Kerf = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = -y\right\} = \{x(1, -1) / x \in \mathbb{R}\}$

$Imf = \left\{z \in \mathbb{R} / \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, z = x + y\right\} = \mathbb{R}.$

$dimE = 2, \dim(Kerf) = 1, \dim(Imf) = 1.$

2.4 Composée d'applications linéaires

Soient E, F et W des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F, g : F \to W$ deux aplications linéaires

Proposition 2.4.1 *La composée de deux applications linéaires est encore linéaire.*

Preuve. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E, (g \circ f)(\lambda u + \mu v) = \lambda(g \circ f)(u) + \mu(g \circ f)(v)$. ■

Preuve. On a $(g \circ f)(\lambda u + \mu v) = g(f(\lambda u + \mu v))$(par définition de la composition)

$= g(\lambda f(u) + \mu f(v))$ (par linéarité de f)

$= \lambda g(f(u)) + \mu g(f(v))$ (par linéarité de g)

$= \lambda(g \circ f)(u) + \mu(g \circ f)(v)$ (par définition de la composition). ■

Exemple 14 *Calculez la composée $g \circ f$ avec*

$g : (x, y) \to (x + y, x - y)$ *et* $f : (x, y, z) \to (3x + 5y + 7z, 2x + 2y + 2z)$

On calcule $(g \circ f)(x, y, z) = (g(f(x, y, z))$ *(par d´efinition de la composition)*

$= g(3x + 5y + 7z, 2x + 2y + 2z)$ *(par d´efinition de f)*

$= (5x + 7y + 9z, x + 3y + 5z)$ *(par d´efinition de g).*

La composée $g \circ f$ est donc

$(x, y, z) \to (5x + 7y + 9z, x + 3y + 5z)$

Proposition 2.4.2 *Le rang d'une application lin eaire ne change pas quand on lacompose*

(1) a droite par une application lin eaire surjective ;

(2) a gauche par une application lin eaire injective ;

(3) a droite ou a gauche par une application lin eaire bijective.

2.5 Inverse d'une application linéaire bijective, automorphisme.

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une aplication linéaire

Proposition 2.5.1 *Si f est bijective, dan ce cas l'application réciproque f^{-1} est egalement linéaire.*

Preuve. $f^{-1}(\lambda u + \mu v) = \lambda f^{-1}(u) + \mu f^{-1}(v)$

$x = f^{-1}(u), y = f^{-1}(v)$

$\lambda u + \mu v = \lambda f(x) + \mu f(y) = f(\lambda x + \mu y)$

$f^{-1}(\lambda u + \mu v) = \lambda x + \mu y = \lambda f^{-1}(u) + \mu f^{-1}(v)$. ■

Proposition 2.5.2 *Si l'aplication linéaire f une automorphisme alors f^{-1} est une automorphisme.*

Exemple 15 $f : (x, y) \to (x + y, x - y)$

f est bijective

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x' + y'}{2} \\ y = \dfrac{x' - y'}{2} \end{cases}$$

donc $f^{-1} : (x, y) \to \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x-y}{2}\right)$.

Chapitre 3

Matrices

3.1 Les matrices (Définitions et opérations)

3.1.1 Définitions

Définition 3.1.1 *Une matrice de type* (m, n) *ou* m *lignes et* n *colonnes est un tableau de* m *lignes et* n *colonnes*

notée $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1,n} \\ \\ \\ a_{i,1}\ldots\ldots a_{i,j}\ldots\ldots\ldots a_{i,n} \\ \\ a_{m,1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{m,n} \end{pmatrix}$$

*On appelle i^{éme} ligne de A la matrice

$$L_i = (a_{i,1}, \ldots\ldots\ldots, a_{i,n}) \text{ pour } 1 \leq i \leq m$$

*On appelle j^{éme} colonne de A la matrice

$$C_i = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m,1} \end{pmatrix} \text{ pour } 1 \leq i \leq n$$

On pourra écrire

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ . \\ . \\ . \\ L_m \end{pmatrix} = (C_1, ..., C_N)$$

*L'ensemble des matrices de type (m, n) moté $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

3.1.2 Les opérations sur les matrices

1) La multiplicationpar un scalaire

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Exemple 16

$$2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2)La somme de deux matrices

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Exemple 17 $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

$$A+B=\begin{pmatrix} 5+2 & 3+0 \\ 4+7 & 1+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$$

3) produit de deux matrices

soient $A=(a_{i,j})_{m,n}$ et $B=(b_{i,j})_{n,s}$

Le produit de Aet B est une matrice de type (m,s)

$A\times B=(C_{i,j})_{m,s}$ tel que $C_{i,j}=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}\ b_{k,j}$.

Exemple 18 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$A\times B=\begin{pmatrix} 2\times 4+1\times 1+4\times 0 & 2\times 5+1\times 2+4\times 4 \\ 3\times 4+0\times 1+5\times 0 & 3\times 5+0\times 2+5\times 4 \\ 1\times 4+7\times 1+6\times 0 & 1\times 5+7\times 2+6\times 4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 9 & 28 \\ 12 & 35 \\ 11 & 43 \end{pmatrix}.$$

Remarque 3 *le nombre des lignes de la première matrice égale le nombre des colonnes de la deuxième matrice*

est une condition nécessaire pour calculer le produit.

matrice identité de type (n,n) notée I_n:

Est la matrice dont tous les conficients sont nuls sauf les conficients $(a_{i,j})$ tel que $i=j$ (s′appelle diagonal de la matrice)

Exemple 19 $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$I_3\times A=A$

3.1.3 Déterminant d'une matrice

1)Si $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ le déterminant de A est un nombre réel

noté $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} + & - \\ a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad-bc$

2)Si $A=\begin{pmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ le déterminant de A est un nombre réel

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} - a_1\begin{vmatrix} b & b_2 \\ c & c_2 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix}.$$

Exemple 20 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= 2\times(-35) - 1\times 13 + 4\times 21 = 1$$

3)Si $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$, $M_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1}.........a_{1,j-1}...a_{1,j+1}.........a_{1,n} \\ \\ \\ a_{i-1,1}.......a_{i-1,j-1}...a_{i-1,j+1}..........a_{i-1,n} \\ a_{i-1,1}.......a_{i+1,j-1}...a_{i+1,j+1}..........a_{i-1,n} \\ \\ a_{n,1}.........a_{n,j-1}...a_{n,j+1}...........a_{n,n} \end{pmatrix}$

On a

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(M_{i,j}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(M_{i,j})$$

3.2 Matrice associée à une application linéaire

3.2.1 Les applications linéaires

On dit que l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire si:

$\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ on a:

$$f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$$

On pourra écrire toute application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ comme suit:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + a_{1,n}x_n \\ \\ \\ a_{i,1}x_1 + \dots\dots a_{i,j}x_j \dots\dots\dots a_{i,n}x_n \\ \\ a_{m,1}x_1 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix}$$

3.2.2 La matrice associée

La matrice associée a l'application f est

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots a_{1,n} \\ \\ \\ a_{i,1}\dots\dots\dots a_{i,j}\dots\dots\dots\dots a_{i,n} \\ \\ a_{m,1}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots a_{m,n} \end{pmatrix}$$

On remarque que

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1,n} \\ \\ \\ a_{i,1}\ldots\ldots a_{i,j}\ldots\ldots\ldots a_{i,n} \\ \\ \\ a_{m,1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exemple 21 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+z \\ x-y+4z \\ 7x-y+z \end{pmatrix}$$

La matrice associée a l'application f est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 22 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+z \\ x-y+4z \\ 7x-z \end{pmatrix}$$

La matrice associée a l'application f est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.3 Application linéaire associée à une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1,n} \\ \\ a_{i,1}\ldots\ldots a_{i,j}\ldots\ldots a_{i,n} \\ \\ a_{m,1}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{m,n} \end{pmatrix}$ une matrice donnée

L'application linéaire associée à la matrice A

définie par

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1,n} \\ \\ a_{i,1}\ldots\ldots a_{i,j}\ldots\ldots a_{i,n} \\ \\ a_{m,1}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{m,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

L'application linéaire associée à la matrice A

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+z \\ x-y+4z \\ 7x-z \end{pmatrix}.$$

3.4 Changement de base, matrice de passage

3.4.1 Matrice de passage

Etant donnés un espace vectoriel et deux bases $B_0 = (v_1, ..., v_n)$ et $B_1 = ((w_1, ..., w_n))$.

On écrit la décomposition des vecteurs de B_1 sur la base B_0

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i$$

La matrice de passage P de B_0à B_1est la matrice carrée (n, n)

$$P = (p_{i,j})_{n,n}$$

Exemple 23 $B_0 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ *et* $B_1 = \{(1,4,2), (4,1,0), (6,0,0)\}$

deux bases de $(\mathbb{R})^3$.

$(1,4,2) = (1,0,0) + 4(0,1,0) + 2(0,0,1)$

$(4,1,0) = 4(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$,

$(6,0,0) = 6(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1)$

La matrice de passage P de B_0 à B_1est la matrice carrée $(3, 3)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.4.2 Les matrices particulières

Matrice nulle $(m \times n)$

Est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Exemple 24 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matrice identité$(n \times n)$

Est la matrice dont tous les coefficients $a_{i,j} = 1$ pour $i = j$ et $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$.

notée I_n.

On a pour toute $A \in M_{n,n}(\mathbb{R}), AI_n = I_nA = A$

Exemple 25 $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice triangulaire supérieure $(n \times n)$

Est la matrice dont tous les coefficients $a_{i,j} = 0$ pour $j > i$.

Exemple 26 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Matrice triangulaire inférieure $(n \times n)$

Est la matrice dont tous les coefficients $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$.

Exemple 27 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -9 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice diagonale$(n \times n)$

Est la matrice dont tous les coefficients $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$ sauf les coefficients $a_{i,j}$ tel que $i = j$.

Exemple 28 $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

3.4.3 Transposée d'une matrice$(n \times n)$

Transposée de la matrice $A = (a_{i,j})_{n,n}$ notée A^t et

$A^t = (\grave{a}_{i,j})_{n,n}$ tel que $\grave{a}_{i,j} = a_{j,i}$ $,\forall i = 1, ..., n, \forall j = 1, ..., n.$

Exemple 29 $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -1 \\ -6 & 3 & 2 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *alors* $A^t = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 8 \\ 5 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice symétrique

On dit que la matrice A est symétrique si $A = A^t$.

Exemple 30 $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ *est une matrice symétrique.*$\left(A^t = A\right)$

Comatrice d'une matrice$(n \times n)$

Comatrice de la matrice $A = (a_{i,j})_{n,n}$ notée $com\,(A)$ et

$$\text{com}(A) = \left((-1)^{i+j} \det\left(M_{i,j}\right)\right)_{n,n} \text{ tel que } M_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\ldots\ldots\ldots a_{1,j-1}\ldots a_{1,j+1}\ldots\ldots\ldots a_{1,n} \\ \\ \\ a_{i-1,1}\ldots\ldots\ldots a_{i-1,j-1}\ldots a_{i-1,j+1}\ldots\ldots\ldots a_{i-1,n} \\ a_{i-1,1}\ldots\ldots\ldots a_{i+1,j-1}\ldots a_{i+1,j+1}\ldots\ldots\ldots a_{i-1,n} \\ \\ a_{n,1}\ldots\ldots\ldots a_{n,j-1}\ldots a_{n,j+1}\ldots\ldots\ldots a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Exemple 31 $A = \begin{pmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{1} \\ \overset{-}{4} & \overset{+}{0} & \overset{-}{2} \\ \overset{+}{0} & \overset{-}{2} & \overset{+}{6} \end{pmatrix}$ *alors* $com\,(A) = \begin{pmatrix} -4 & -24 & 8 \\ -10 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & -8 \end{pmatrix}$.

3.4.4 Inverse d'une matrice $(n \times n)$

L'inverse de la matrice A notée A^{-1} et

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

et on aussi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(com\,(A)\right)^t$$

Exemple 32 $A = \begin{pmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{1} \\ \overset{-}{4} & \overset{+}{0} & \overset{-}{2} \\ \overset{+}{0} & \overset{-}{2} & \overset{+}{6} \end{pmatrix}$ *alors* $com\,(A) = \begin{pmatrix} -4 & -24 & 8 \\ -10 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & -8 \end{pmatrix}$

$$(com\,(A))^t = \begin{pmatrix} -4 & -10 & 4 \\ -24 & 6 & 2 \\ 8 & -2 & -8 \end{pmatrix} \;\; et \; \det A = -4 - 40 = -44$$

$$donc \; A^{-1} = \tfrac{1}{\det A}\,(com\,(A))^t = \begin{pmatrix} \frac{4}{44} & \frac{10}{44} & \frac{-4}{44} \\ \frac{24}{44} & \frac{-6}{44} & \frac{-2}{44} \\ \frac{-8}{44} & \frac{2}{44} & \frac{8}{44} \end{pmatrix}$$

Remarque 4 *Soit A une matrice*

A *est inversible si et seulement si* $\det A \neq 0.$

Chapitre 4

Résolution de systèmes d'équations

4.1 Généralités

Définition 4.1.1 *On appelle système d'équations linéaires de m équations en n inconnues un système de de la forme :*

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,n}x_n = b_1 \\ ... \\ a_{m,1}x_1 + ... + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right. \tag{4.1.1}$$

où les coefficients $a_{i,j}$ et b_j sont donnés, et où les x_i sont des inconnues dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1.1 Notation matricielle

Peut s'écrire sous la forme matricielle:

$$AX = B$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & a_{1,n} \\ & ... & \\ a_{m,1} & & a_{m,n} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \\ b_m \end{pmatrix}$$

Exemple 33

$$\begin{cases} 2x + y + 5z = -10 \\ x - 3y - 7z = 5 \\ x - z = 13 \end{cases}$$

La matrice associée est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $b = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$

Alors on a $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}.$

4.1.2 Rang d'un système d'équations linéaires

Soit A une matrice de type (m, n)

Déterminant d'ordre r extrait de A :

On appelle déterminant d'ordre r extrait de A le déterminant d'une matrice carrée formée en supprimant dans A $(m - r)$ lignes et $(n - r)$ colonnes.

on appelle **rang de la matrice A** : l'ordre du déterminant non nul, d'ordre le plus élevé, extrait de A.

Exemple 34 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$

les quatre déterminants d'ordre 3 sont nuls, par contre le déterminant d'ordre 2 extrait $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ *n'est par nul, A est de rang 2.*

On appelle rang de système le rang de la matrice A de ce système.

4.2 Etude de l'ensemble des solutions

Soit le système (4.1.1) que nous supposons de rang r et écrit de telle façon que le déterminant $\triangle$ des coefficients des r premières inconnues et r premières équations soit non nul.

4.2.1 Déterminant caractéristique

Déterminant caractéristique de (4.1.1)

On appelle déterminant caractéristique de (4.1.1) le déterminant de la forme

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{1,1} & .... & a_{1,r} & b_1 \\ & ..... & & \\ a_{r,1} & ..... & a_{r,r} & b_r \\ a_{k,1} & ..... & a_{k,r} & b_k \end{vmatrix} ,k = r+1, r+2, ..., m.$$

4.2.2 Etude de l'ensemble des solutions

a) Si $r = m = n$ le système (4.1.1) admet une seule solution.

b) Si $r \prec m \prec n$, le système (4.1.1) indéterminé à $(n-r)$ paramètres.

c) Si $r \prec m$, et si l'un au moins des déterminants caractéristiques de (4.1.1) non nul, (4.1.1) n'a pas de solution.

d)Si $r \prec m$, et si les déterminants caractéristiques de (4.1.1) sont nuls, (4.1.1) réduit aux r équations et se résout comme dans le cas (b) .

Exemple 35 $\begin{cases} x+y+2w=-2 \\ x+2y+3w=a \\ 3x+5y+8z=2 \\ 5x+9y+14z=b \end{cases}$ *,a,b supposés donnés.*

la matrice de ce système $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 8 \\ 5 & 9 & 14 \end{pmatrix} .B = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 2 \\ b \end{pmatrix}$

Les quatre déterminants d'ordre 3 sont nuls, par contre le déterminant d'ordre 2 extrait $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ *n'est par nul, A est de rang 2.*

les déterminants caractéristiques :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -2a+4,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 5 & 9 & b \end{vmatrix} = -4a+b+2$$

1) Si $D_1 \neq 0$ *ou* $D_2 \neq 0$ *alors* (S) *n'a pas de solution.*

2) Si $D_1 = D_2 = 0$ dons ce cas S indéterminé à un paramètre z

$$\begin{cases} x = -3z - 6 \\ y = z + 4 \end{cases}, z \in \mathbb{R}.$$

4.3 Les méthodes de résolutions d'un système linéaire

4.3.1 Résolution par la méthode de Cramer

Soit (S) un système carré c'est à dire sa matrice A est carrée, avec l'interprétation matricielle : $AX = B$. Si la matrice A est inversible on peut résoudre ce système par méthode de Cramer. Nous noterons A_i la matrice A des coefficients dans laquelle on a remplacé la i ème colonne par la matrice B.

La résolution du système, par la méthode de Cramer, donne

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}, i = 1, ..., n.$$

Exemple 36 *Avec la méthode de Cramer, résoudre* $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ -5x + 2y = -2 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ça nous donnera

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

et $x = \dfrac{\det A_1}{\det A} = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{6}{1} = 6, y = \dfrac{\det A_1}{\det A} = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{14}{1} = 14.$

$(x, y) = (6, 14)$ est une solution unique de ce système.

Exemple 37 *Résoudre* $\begin{cases} 5x + 7y - 3z = 16 \\ 3x - 2y + 4z = -7 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

avec la méthode de Cramer.

Identifions d'abord la matrice des coefficients :

$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

et la matrice des constantes :

$B = \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$

Nous obtenons :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 16 & 7 & -3 \\ -7 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 16 & -3 \\ 3 & -7 & 4 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 16 \\ 3 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Et

$x = \dfrac{det(A_1)}{det(A)} = \dfrac{16\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} -7 \begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} +(-3)\begin{vmatrix} -7 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}{5\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} -7\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} +(-3)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$

$x = \dfrac{16 \times (-2) - 7 \times (-17) - 3 \times 5}{5 \times (-2) - 7 \times (-7) - 3 \times (5)} = \frac{72}{24} = 3$

$y = \dfrac{det(A_2)}{det(A)} = \dfrac{5\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} -16\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} +(-3)\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{24}$

y= $\dfrac{5 \times (-17) - 16 \times (-7) - 3 \times 25}{24} = \frac{-48}{24} = -2$

$z = \dfrac{det(A_3)}{det(A)} = \dfrac{5\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} -7\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} +(16)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{24}$

z= $\dfrac{5 \times (-5) - 7 \times (25) + 16 \times 5}{24} = \frac{-120}{24} = -5$

donc $(3,-2,-5)$ est une solution unique de ce système.

4.3.2 Résolution par la méthode de la matrice inverse

Soit (S) un système carré, avec l'interprétation matricielle : $AX = B$.

Si la matrice A est inversible on peut résoudre ce système par la méthode de la matrice inverse comme suit:

On a

$$AX = B \Longleftrightarrow X = A^{-1}B$$

Exemple 38 *Résoudre* $\begin{cases} 5x + 7y - 3z = 16 \\ 3x - 2y + 4z = -7 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{et } B = \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$\det A = 24$ alors A est inversible.

Calculons A^{-1} :

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} +\det\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ +\det\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ 22 & -29 & -31 \end{pmatrix} \Longrightarrow (com\,(A))^t = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 22 \\ 7 & -2 & -29 \\ 5 & 2 & -31 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(com\,(A))^t = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 22 \\ 7 & -2 & -29 \\ 5 & 2 & -31 \end{pmatrix}$$

donc $X = A^{-1}B = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 22 \\ 7 & -2 & -29 \\ 5 & 2 & -31 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -2\times 16 + 4\times(-7) + 22\times 6 \\ 7\times 16 + (-2)\times(-7) + (-29)\times 6 \\ 5\times 16 + 2\times(-7) + (-31)\times 6 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 72 \\ -48 \\ -120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

alors $(3, -2, -5)$ est une solution unique de ce système.

4.3.3 Résolution par la méthode de Gauss

Les opérations élémentaires

Définition 4.3.1 *Soit (S) un système linéaire de n équations, p inconnues et à coeffcients dans $\mathbb{R}$.*

Notons $E1, E2, ..., En$ les équations de (S).

On appelle opération élémentaire sur les lignes de (S) l'une des opérations suivantes :

– Multiplier une équation Ei par un scalaire non nul a.

Cette opération est notée : $Ei \to aEi$.

– Ajouter à l'une des équations Ei un multiple d'une autre équation Ej .

Cette opération est notée : $Ei \to Ei$+ßEj.

– Echanger deux équation Ei et Ej : Cette opération est notée : $Ei \rightleftarrows Ej$.

Proposition 4.3.1 *Une opération élémentaire sur les lignes de (S) transforme le système (S) en un système (S$^{'}$) équivalent, c'est-a-dire ayant exactement les mêmes solutions que (S).*

Méthode de Gauss

Par une suite d'opérations élémentaires, on transforme le système (S) en un système (S$'$) équivalent et dont la matrice est triangulaire supérieure.

Exemple 39

$$\begin{cases} x+2y+3z+4t=11 \\ 2x+3y+4z+t=12 \\ 3x+4y+z+2t=13 \\ 4x+y+2z+3t=14 \end{cases}$$

Résoudre le système (S) :

$$\begin{cases} x+2y+3z+4t=11 & \\ 2x+3y+4z+t=12 & E2 \to E2-2E1 \\ -2y-8z-10z=-20 & E3 \to E3-3E1 \\ 4x+y+2z+3t=14 & E4 \to E4-4E1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z+4t=11 & \\ -y-2z-7t=-10 & \\ -2y-8z-10t=-20 & E3 \to E3-2E2 \\ -7y-10z-13t=-30 & E4 \to E4-7E2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z+4t=11 & \\ -y-2z-7t=-10 & \\ -4z+4t=0 & \\ 4z+36t=40 & E4 \to E4+E3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z+4t=11 \\ -y-2z-7t=-10 \\ -4z+4t=0 \\ 40t=40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=1 \\ z=t=1 \\ y=-2z-7t+10=1 \\ x=11-2y+3z+4t=2 \end{cases}$$

Le système (S) posséde donc l'unique solution (2, 1, 1, 1).

Exemple 40

$$\begin{cases} x+3y+5z-2t-7u=3 \\ 3x+y+z-2t-u=1 \\ 2x-y-3z+7t+5u=2 \\ 3x-2y-5z+7t+8u=2 \end{cases}$$

Résoudre (S) $\begin{cases} x+3y+5z-2t-7u=3 & \\ 3x+y+z-2t-u=1 & E2 \to E2-3E1 \\ 2x-y-3z+7t+5u=2 & E3 \to E3-2E \\ 3x-2y-5z+7t+8u=2 & E4 \to E4-3E1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+3y+5z-2t-7u=3 & \\ -8y-14z+4t+20u=-8 & \\ -7y-13z+11t+19u=-3 & E4 \to 8E3-7E2 \\ -11y-20z+13t+29u=-18 & E4 \to 8E4-11E2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y+5z-2t-7u=3 & \\ -8y-14z+4t+20u=-8 & \\ -6z+60t+12u=24 & \\ -6z+60t+12u=32 & E4 \to E4-E3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y+5z-2t-7u=3 \\ -8y-14z+4t+20u=-8 \\ -6z+60t+12u=24 \\ 0=8 \end{cases}$$

alors (S) n'a pas de solution.

Centre Universitaire Ahmed ZABANA Relizane
Algèbe 2 -2017/2018
1 année LMD-Math et Informatiques
Fiche TD 1

Exercice 1 :
• La loi interne " + "
$\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2, (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$.
• La loi externe " $\cdot$ "
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot (x,y) = (\lambda x, \lambda y)$.
Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2 :
Soit E l'ensemble défini par

$$E = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\right\}$$

Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 :
Soit E un ev sur K et F_1et F_2 deux sev de E.
Montrer que $F_1 \cap F_2$ est un sev de E.

Exercice 4 :
$F_1 = \{(x,0,0) / x \in \mathbb{R}\}$et $F_2 = \{(0,y,z) / (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$
Montrer que F_1et F_2 sont sev de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $F_1 \cap F_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Exercice 5 :
1) Montrer que $e_1 = (1,1,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (1,1,1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Montrer que $\{\alpha e_1 + \beta e_2 / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.
3) Montrer que $e_1 = (1,1,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (1,1,1), e_4 = (2,1,4)$ est une famille liées.

Exercice 6 :
Montrer que $e_1 = (1,2), e_2 = (0,1), e_3 = (1,1)$ est une famille génératrice,
est-elle liée ?.

Centre Universitaire Ahmed ZABANA Relizane
Algèbe 2 -2017/2018
1 année LMD-Math et Informatiques
Fiche TD 2

Exercice 1 :
Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ une application définie par :

$$f(x,y,z)=(x-z,2x+y-3z,-x+2z)$$

et (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$
1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Calculer $f(e_1)\,,f(e_2)$ et $f(e_3)\,.$

Exercice 2 :
Soit E l'ensemble défini par

$$\begin{aligned} E &= \left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3/x_1=2x_2=x_3\right\} \\ F &= \left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3/x_1+2x_2+x_3=0\right\} \end{aligned}$$

1) E et F sont des sev de $\mathbb{R}^3$, déterminer une base de E et une base de F.
2) Y a-t-il $E\oplus F=\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 :
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$
dont l'image de la base canonique (e_1,e_2,e_3) est :

$$\begin{aligned} f(e_1)&=-7e_1-6e_2 \\ f(e_2)&=8e_1+7e_2 \\ f(e_3)&=6e_1+6e_2-e_3 \end{aligned}$$

1. Pour tout vecteur $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$
* Calculer $f(x)\,.$
* Déterminer $f\circ f(x)\,.$
2. f est-elle inversible.

Exercice 4 :
Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$

$$u(x)=x_1+x_2+x_3$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer $Im(u)$ et de $ker(u)$ et leur dimensions.

Centre Universitaire Ahmed ZABANA Relizane
Algèbe 2 -2017/2018
1 année LMD-Math et Informatiques
Fiche TD 3

Exercice 1 : Considérons les matrices :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
Calculer les matrices $AB, BA, CD, 2A + B, A - 4B$.
Que remarquez vous(pour AB, BA) .

Exercice 2 : Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et A, B les matrices suivantes
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & \alpha \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$
Calculer le déterminant de A, puis le déterminant de B.

Exercice 3 : Soit f une application linéaire définie par
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + y + 7z \\ -10y + 2z \\ 7x - 12z + y \end{pmatrix}$
Donner la matrice associée a l'application f.

Exercice 4 : Soient A, B les matrices suivantes
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\sqrt{2} \\ 5 & 0.2 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$
Donner l'application linéaire associée à la matrice A.
puis l'application linéaire associée à la matrice B.

Exercice 5 : Soient $E = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ et $F = \{(1, 0, 2), (4, 1, 0), (0, 5, 1)\}$ deux bases de $(\mathbb{R})^3$.
Denner la matrice de passage P_{EF}.

Exercice 6 : On pose $e_1 = (1; 1; 0); e_2 = (0; 1; 1)$et $e_3 = (1; 0; 1)$.
1. Montrer que $B = (e_1; e_2; e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Ecrire la matrice de passage P_{CB} de la base canonique C de $\mathbb{R}^3$ à la base B.