Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou
Faculté de génie électrique et informatique
Département d'informatique

Année universitaire : 2016/2017
2ième année Licence-Informatique
module : Théorie des langages

CORRIGÉ ABREGÉ DE LA SÉRIE D'EXERCICES n° 3 de ThL

par : **M.S. Habet, Y. Yesli, C. Cherifi**

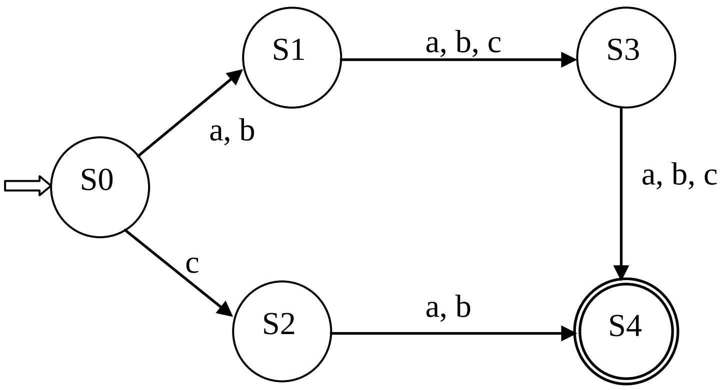
EXERCICE **1** :

L = {a, b}.{a, b, c}^{2} ∪ {c}.{a, b}.

a) L || a = S = ({a, b}.{a, b, c}^{2}) || a ∪ ({c}.{a, b}) || a = {a, b, c}^{2} = S1
L || b = S = ({a, b}.{a, b, c}^{2}) || b ∪ ({c}.{a, b}) || b = {a, b, c}^{2} = S1
L || c = S = ({a, b}.{a, b, c}^{2}) || c ∪ ({c}.{a, b}) || c = {a, b} = S2
S1 || a = {a, b, c} = S3
S1 || b = {a, b, c} = S3
S1 || c = {a, b, c} = S3
S2 || a = ε = S4
S2 || b = ε = S4
S2 || c = Ø
S3 || a = S3 || b = S3 || c = ε = S4
S4 || a = S4 || b = S4 || c = Ø

b) L est régulier car il a un nombre fini de dérivées.

c) Soit S0 = L. Les états de l'automate reconnaissant L sont les états Si, i=0,..,4 ; l'état initial étant S0 ; il y a un seule état final, c'est S4 (car il contient ε).



EXERCICE **2** :

a) Soit S0 = { $a^{2.n}$ / n ≥ 0 } = { ε, aa, aaaa, a^6, ..., $a^{2.n}$, ...}
On a :
S0 || a = { a, aaa, a^5, ..., $a^{2.n-1}$, ...} = { $a^{2.n+1}$ / n ≥ 0 } = S1
S1 || a = { ε, aa, a^4, ..., $a^{2.n-2}$, ...} = { $a^{2.n}$ / n ≥ 0 } = S0
Le langage { $a^{2.n}$ / n ≥ 0 } a un nombre fini de dérivées : S0 || a^k = S0 si k est pair, et = S1 sinon.
Par conséquent il est régulier.

b) Soit S0 = { $a^n.b^m$ / n, m ≥ 1 }.

On a :

S0 || a = { $a^n.b^m$ / n ≥ 0, m ≥ 1 } = S1

S0 || b = Ø

S1 || a = S1

S1 || b = ({ $a^n.b^m$ / n ≥ 1, m ≥ 1 } ∪ { $a^n.b^m$ / n = 0, m ≥ 1 }) || b

= S0 || b ∪ { b^m / m ≥ 1 } || b = Ø ∪ { b^m / m ≥ 0 } = { b^m / m ≥ 0 } = S2

S2 || a = Ø

S2 || b = S2

Après S2, on n'obtient plus de nouveaux états ; donc il y a un nombre fini de dérivées ; par conséquent { $a^n.b^m$ / n, m ≥ 1 } est régulier.

c) Soit S_0 = { $a^n.b^n$ / n ≥ 0 }. Calculons les dérivées de S_0 par rapport aux mots a^k, pour k ≥ 1 ; pour cela on note : $S_k = S_0 \| a^k$ (pour k ≥ 1).

On peut remarquer déjà que $S_k = S_{k-1} \| a$, pour k ≥ 1 ;

on a donc :

$S_1 = S_0 \| a = \{a^{n-1}.b^n / n \geq 1\} = \{a^{n-1}.b^{n-1} / n \geq 1\}.\{b\} = \{a^n.b^n / n \geq 0\}.\{b\} = S_0.\{b\}$

$S_2 = S_1 \| a = (S_0.\{b\}) \| a = (S_0 \| a).\{b\} \cup (\{b\} \| a) = (S_0 \| a).\{b\} = (S_0.\{b\}).\{b\} = S_0.\{bb\}$

$S_3 = S_2 \| a = (S_0.\{bb\}) \| a = (S_0 \| a).\{bb\} = (S_0.\{b\}).\{bb\} = S_0.\{bbb\} = S_0.\{b^3\}$

…

On peut généraliser en démontrant par récurrence que :

$S_k = S_{k-1} \| a = (S_0.\{b^{k-1}\}) \| a = (S_0 \| a).\{b^{k-1}\} = (S_0.\{b\}).\{b^{k-1}\} = S_0.\{b^k\}$, pour tout k ≥ 1.

Pour chaque valeur de k dans ℕ (entiers naturels), on a un langage S_k différent des autres langages S_i (pour i≠k). On peut donc conclure qu'il y a une infinité de langages $(S_k)_{k\geq 1}$, tous différents les uns des autres et par conséquent il y a une infinité de dérivées du langage S_0, donc celui-ci n'est pas régulier.

d) Soit L = { $w.w^R$ / w ∈ $\{a, b\}^*$ }. L n'est pas régulier : si on calcule ses dérivées, on trouve un nombre infini. On peut aussi procéder à une démonstration par l'absurde : On suppose que L est régulier, donc d'après le théorème de Nerode, le nombre de ses dérivées par rapport aux mots sur V ={a, b} est fini. Donc il existe deux mots u et v tels que u ≠ v et L || u = L || v.

Soit α ∈ L, α choisi suffisamment grand (cela est possible car L contient une infinité d'éléments) pour que |α| > 2×max(|u|,|v|).

On a $\alpha \| u = u'.w^R = u'.(u.u')^R = u'.u'^R.u^R \in L \| u$ (ici w = u.u') ; donc (α || u) ∈ L || v, en vertu de l'hypothèse.

Par conséquent v.(α || u) ∈ L ; or $v.(\alpha \| u) = v.u'.u'^R.u^R$: pour que ce mot appartienne à L il faut que $v^R = u^R$, c'est-à-dire v = u : contradiction avec l'hypothèse de départ.

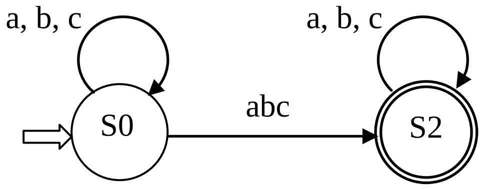
D'où L n'est pas régulier.

EXERCICE **3** :

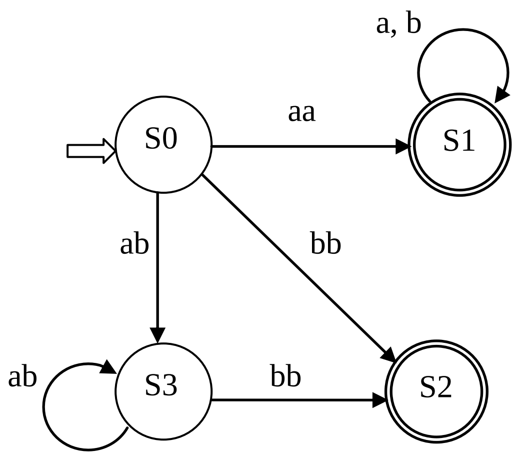
I)

I-1) L'expression régulière : $(a \cup b \cup c)^*.a.b.c.(a \cup b \cup c)^*$ dénote le langages des mots construits sur {a, b, c} et qui contiennent la sous-chaine abc.

Un automate équivalent est le suivant (il est généralisé) :



I-2) automate (généralisé aussi) pour l'expression régulière : $aa.(a \cup b)^* \cup (ab)^*.bb$



II)

II-1) Soit $S0 = (1.1^*.0.0^*.1)^*.0.1^*$; S0 sera un état non final car le langage dénoté par l'expression ne contient pas ε (le plus petit mot du langage est : 0).

Calculons les dérivées de S0, pour cela posons $\alpha = (1.1^*.0.0^*.1)^*$:

$S0 \| 0 = (\alpha \| 0).0.1^* \cup (0.1^*) \| 0 = ((1.1^*.0.0^*.1) \| 0).\alpha.0.1^* \cup 1^* = \emptyset \cup 1^* = 1^* = S1$ (S1 est final car le langage qu'il dénote contient ε)

$S0 \| 1 = (\alpha \| 1).0.1^* \cup (0.1^*) \| 1 = ((1.1^*.0.0^*.1) \| 1).\alpha.0.1^* = (1^*.0.0^*.1).\alpha.0.1^* = S2$ (S2 est non final)

$S1 \| 0 = \emptyset$

$S1 \| 1 = 1^* = S1$

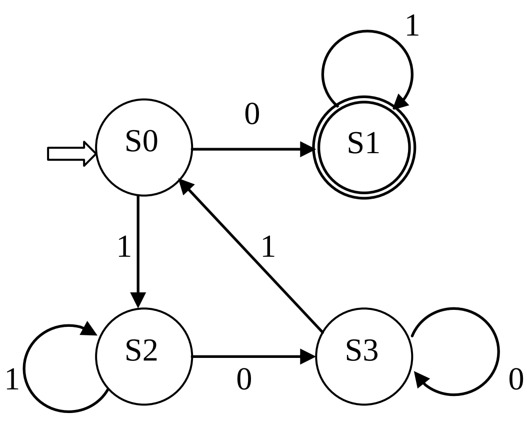
$S2 \| 0 = ((1^*.0.0^*.1) \| 0).\alpha.0.1^* = 0^*.1.\alpha.0.1^* = S3$ (S3 non final)

$S2 \| 1 = ((1^*.0.0^*.1) \| 1).\alpha.0.1^* = 1^*.0.0^*.1.\alpha.0.1^* = S2$

$S3 \| 0 = (0^*.1.\alpha.0.1^*) \| 0 = S3$

$S3 \| 1 = (0^*.1.\alpha.0.1^*) \| 1 = \alpha.0.1^* = S0$

D'où l'automate :



II-2) Soit $S0 = (a \cup ba)^*.bb.b^*.a$; S0 sera un état non final car le langage dénoté par l'expression ne contient pas ε (le plus petit mot du langage est : bba).

Calculons les dérivées de S0, pour cela posons $\alpha = (a \cup ba)^*$:

$S0 \parallel a = (\alpha \parallel a).bb.b^*.a \cup (bb.b^*.a) \parallel a = (\alpha \parallel a).bb.b^*.a = ((a \cup ba) \parallel a).(a \cup ba)^*.bb.b^*.a$

$= \varepsilon.(a \cup ba)^*.bb.b^*.a = \alpha.bb.b^*.a = S1$ (S1 est non final)

$S0 \parallel b = (\alpha \parallel b).bb.b^*.a \cup (bb.b^*.a) \parallel b = ((a \cup ba) \parallel b).(a \cup ba)^*.bb.b^*.a \cup (bb.b^*.a) \parallel b =$

$= a.(a \cup ba)^*.bb.b^*.a \cup (b.b^*.a) = a.\alpha.bb.b^*.a \cup (b.b^*.a) = S2$ (S2 non final)

$S1 \parallel a = (\alpha \parallel a).bb.b^*.a = ((a \cup ba) \parallel a).(a \cup ba)^*.bb.b^*.a = \alpha.bb.b^*.a = S1$

$S1 \parallel b = (\alpha \parallel b).bb.b^*.a \cup (bb.b^*.a) \parallel b = ((a \cup ba) \parallel b).(a \cup ba)^*.bb.b^* \cup (b.b^*.a)$

$= a.\alpha.bb.b^*.a \cup (b.b^*.a) = S2$ (S2 non final)

$S2 \parallel a = ((a.\alpha.bb.b^*.a) \parallel a) \cup ((b.b^*.a) \parallel a) = \alpha.bb.b^*.a = S1$

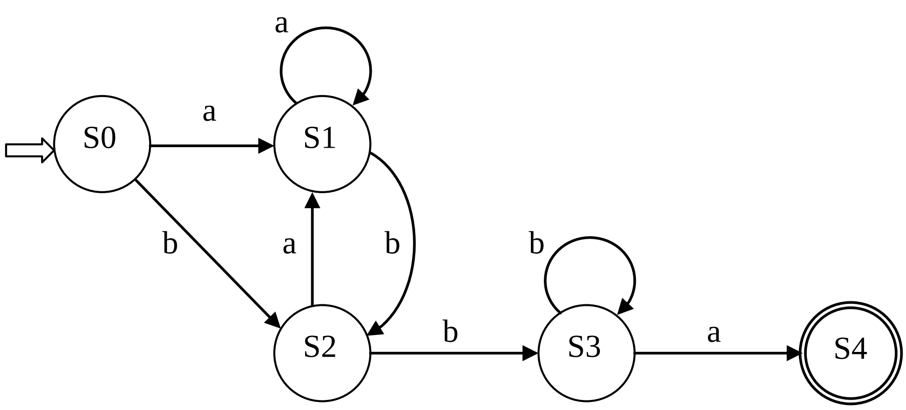
$S2 \parallel b = ((a.\alpha.bb.b^*.a) \parallel b) \cup ((b.b^*.a) \parallel b) = \varnothing \cup b^*.a = b^*.a = S3$ (S3 non final)

$S3 \parallel a = ((b^*) \parallel a).a \cup (a \parallel a) = \varnothing \cup \varepsilon = \varepsilon = S4$ (S4 final)

$S3 \parallel b = b^*.a = S4$

$S4 \parallel a = S4 \parallel b = \varnothing$

D'où l'automate :



EXERCICE **4** :

Le résultat à établir dans cet exercice est connu sous le nom du théorème d'Arden.

1) Montrons que $A^*.B$ est solution de l'équation : $X = A.X \cup B$; pour cela effectuons le remplacement de X par $A^*.B$ dans $A.X \cup B$:

$A.(A^*.B) \cup B = (A.A^*.B) \cup B = A^+.B \cup B = (A^+ \cup \varepsilon).B = A^*.B = X$; d'où la relation.

Montrons que $A^*.B$ est la solution minimale au sens que $A^*.B$ est inclus dans toute autre solution Y de l'équation. Soit $w \in A^*.B$, donc w s'écrit $w = x.y$; où $x \in A^*$ et $y \in B$.

$x \in A^* \Rightarrow \exists\, n \geq 0$ tel que $x \in A^n$; d'où $w \in A^n.B$.

Soit Y une solution quelconque de l'équation, on a :

$Y = A.Y \cup B = A.(A.Y \cup B) \cup B = A^2.Y \cup A.B \cup B = A^2.(A.Y \cup B) \cup A.B \cup B =$

$A^3.Y \cup A^2.B \cup A.B \cup B = \dots = A^{n+1}.Y \cup A^n.B \cup \dots \cup A.B \cup B$

Or $w \in A^n.B$ donc $w \in Y$, où Y est toute solution de l'équation. On a donc $A^*.B \subseteq Y$.

2) Dans cette question, on suppose : $\varepsilon \notin A$. On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe une autre solution différentes X' différente de $A^*.B$.

Soit f le plus petit mot de X' qui n'appartient pas à $A^*.B$.

$f \in X' \Rightarrow f \in A.X'$ ou $f \in B$. On peut écrire que $f \notin B$ car sinon il appartiendrait à $A^*.B$.

Donc $f \in A.X' \Rightarrow f = g.h$ avec $g \in A$ et $h \in X'$. Or $\varepsilon \notin A$, donc $g \neq \varepsilon$ et donc $|h| < |f|$.

Il existe deux cas pour h :

- $h \in A^*.B \Rightarrow gh \in A.A^*.B \Rightarrow f \in A^+.B \Rightarrow f \in A^*.B$ ce qui est faux.
- $h \notin A^*.B$, sachant que $h \in X'$: contradiction car h est plus petit que f qu'on a supposé être le petit élément de X' n'appartenant pas à $A^*.B$.

<u>EXERCICE **5** :</u>

1) On va associer une variable à chaque non terminal de g : X0 (associé à S), X1 (à A) et X2 (à B).

On traduit les règles de productions de P en équations d'expressions régulières :

$$\begin{cases} X0 = a.X1 \cup \varepsilon \\ X1 = b.X1 \cup c.X2 \\ X2 = b.X2 \cup a \end{cases}$$

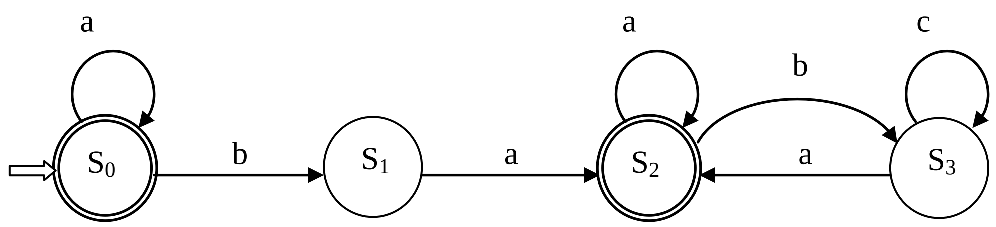
2) En appliquant le théorème d'Arden (voir exo 4) à la 3ième équation, on obtient : $X2 = b^*.a$.

En remplaçant X2 dans la 2ième équation on aura : $X1 = b.X1 \cup c.b^*.a$; puis avec le théorème d'Arden on obtient : $X1 = b^*.c.b^*.a$. On remplace dans la première équation et on aura : $X0 = a.\, b^*.c.b^*.a \cup \varepsilon$ qui dénote le langage engendré par g.

<u>EXERCICE **6** :</u>

a) Pour trouver l'automate simple associé à g, on peut décomposer la règle $S \rightarrow baA$ en deux règles : $S \rightarrow bC$ et $C \rightarrow aA$; ou C est un nouveau non terminal.

On construit l'automate simple $\mathcal{A}$ équivalent en associant un état de l'automate à chaque non-terminal, cet état sera final lorsque le non-terminal associé produit ε. Les transitions de $\mathcal{A}$ seront déduites à partir des règles de productions de g.



b) Le système d'équations régulières associé à $\mathcal{A}$:

$$\begin{cases} X0 = a.X0 \cup b.X1 \cup \varepsilon \\ X1 = a.X2 \\ X2 = a.X2 \cup b.X3 \cup \varepsilon \\ X3 = c.X3 \cup a.X2 \end{cases}$$

c) Pour trouver l'expression régulière qui dénote $L(\mathcal{A})$, on résout le système de la question b) pour trouver la valeur de X0.

De la quatrième équation on a : $X3 = c^*.a.X2$; on remplace dans la troisième :

$X2 = a.X2 \cup b.c^*.a.X2 \cup \varepsilon = (a \cup b.c^*.a).X2 \cup \varepsilon$ qui se résout avec $X2 = (a \cup b.c^*.a)^*$.

On remplace dans la deuxième : $X1 = a.(a \cup b.c^*.a)^*$. Puis dans la première :

$X0 = a.X0 \cup b.a.(a \cup b.c^*.a)^* \cup \varepsilon$. Et on obtient ainsi la solution : $X0 = a^*.(b.a.(a \cup b.c^*.a)^* \cup \varepsilon)$.

Donc $L(\mathcal{A})$ est dénoté par l'expression régulière : $a^*.ba.(a \cup b.c^*.a)^* \cup a^*$.

-------------------------- <u>Fin du corrigé de la série 3 de ThL</u> --------------------------