



## Epreuve de Moyenne Durée

Le : 16/03/2017 – Durée 1h 30mn – Document autorisé : série 2

### Exercice 1 : (6 pts)

Une trousse d'écolier contient quatre stylos. On utilisera des variables  $C_i$  : couleur du stylo  $i$ ,  $i=1, \dots, 4$ .

1) Dans chacun des cas suivants, écrire une formule de logique propositionnelle  $F_i$ ,  $i=1, \dots, 4$  représentant chacune des phrases suivantes : (On utilisera des relations d'égalité/différence binaires entre les  $C_i$ )

1-a)  $F_1$ : « Le 1<sup>er</sup> stylo et le 2<sup>ème</sup> stylo sont de couleurs différentes. » (1 pt)

1-b)  $F_2$ : « Tous les stylos de la trousse sont de couleurs différentes. » (1 pt)

1-c)  $F_3$ : « Il existe au moins deux stylos de couleurs différentes. » (1 pt)

1-d)  $F_4$ : « Si le 1<sup>er</sup> stylo est *bleu* il y a exactement un autre stylo *vert* parmi les trois autres stylos. » (1 pt)

2) A-t-on les conséquences logiques suivantes :

2-a)  $(C_1 = \text{bleu}), F_4 \models F_3$  ? (1 pt)

2-b)  $(C_1 = \text{bleu}), F_4 \models F_2$  ? (1 pt)

### Exercice 2 : (5 pts)

On considère le connecteur ternaire If défini comme :

$\text{If}(A, B, C) = \text{if } A \text{ then } B \text{ else } C$  qui est égal à  $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$ .

Une formule écrite uniquement avec if, then, else, les constantes  $\top$ ,  $\perp$  et les variables est dite if-expression.

1) Montrer que toute formule du calcul propositionnel est équivalente à une if-expression. (1,5 pts)

2) Montrer que les formules  $F$  et  $G$  ci-dessous sont équivalentes : (1,5 pts)

$F \equiv \text{if } (\text{if } A \text{ then } B \text{ else } C) \text{ then } B' \text{ else } C'$

$G \equiv \text{if } A \text{ then } (\text{if } B \text{ then } B' \text{ else } C') \text{ else } (\text{if } C \text{ then } B' \text{ else } C')$

3) On dit qu'une if-expression est simple si la condition (c-à-d la sous-formule écrite entre **if** et **then**) est toujours une variable. Montrer qu'on peut transformer toute if-expression en une if-expression simple. (1 pt)

4) On dit qu'une if-expression est normale si elle est simple et si pour toute sous-expression de la forme (**if**  $X$  **then**  $B$  **else**  $C$ ), la variable  $X$  n'apparaît ni dans  $B$  ni dans  $C$ . Montrer qu'on peut transformer toute if-expression en une if-expression normale équivalente. (1 pt)

### Exercice 3 : (6 pts)

Montrer, en utilisant la méthode axiomatique, que les formules  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  suivantes sont des théorèmes :

1)  $F_1 \equiv (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

2)  $F_2 \equiv (C \rightarrow ((A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow B)) \rightarrow (C \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$

3)  $F_3 \equiv A \rightarrow ((B \rightarrow (A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow C))) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow C))$

### Exercice 4 : (3 pts)

À l'aide de la résolution propositionnelle, montrer que la formule  $F$  est une tautologie :

$F \equiv ((A \rightarrow (B \vee C)) \wedge (C \rightarrow (\neg B \wedge \neg A))) \rightarrow (A \rightarrow ((C \vee A) \rightarrow B))$ .

**Bon courage !**