1 Existence et Unicité

1.1 Minloc-Minglob

Definition 1 *Soient Ω un ensemble de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de $\Omega \to \mathbb{R}$.*

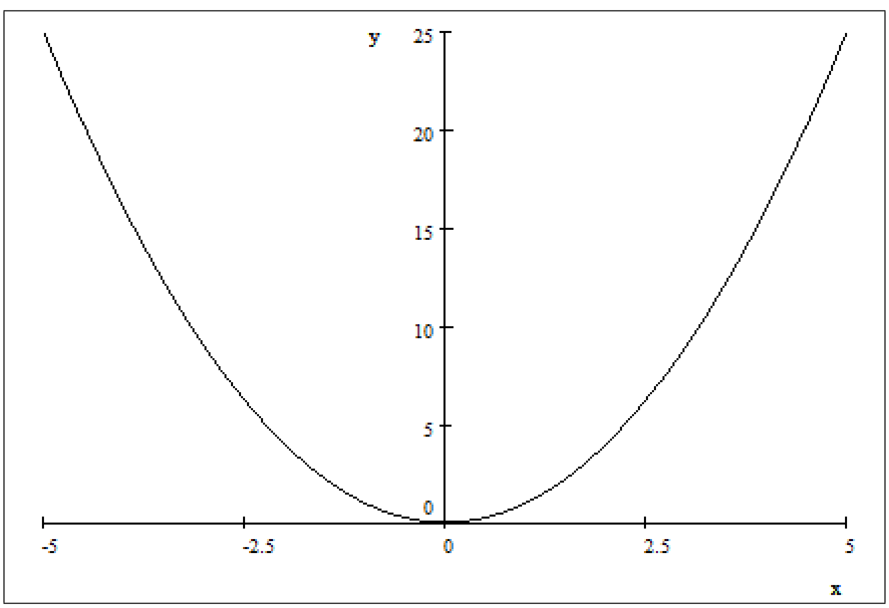
1. *On dit que x^* est* ***un minimum global*** *de f sur Ω si*
$$\forall x \in \Omega, \ f(x^*) \leq f(x). \tag{1}$$

2. *On dit que x^* est* ***un minimum global strict*** *de f sur Ω si*
$$\forall x \in \Omega, \text{ avec } x \neq x^*, \ f(x^*) < f(x). \tag{2}$$

3. *On dit que x^* est* ***un minimum local*** *de f sur Ω, s'il existe $r > 0$ tel que*
$$\forall x \in B(r, x^*) \cap \Omega, \ f(x^*) \leq f(x). \tag{3}$$

4. *On dit que x^* est* ***un minimum local srict*** *de f sur Ω, s'il existe $r > 0$ tel que*
$$\forall x \in B(r, x^*) \cap \Omega \text{ avec } x \neq x^*, \ f(x^*) < f(x). \tag{4}$$

Example 2
$$x \mapsto x^2.$$



$x^* = 0$ est un minimum global.

Example 3

La convexité est une condition suffisante assurant ce qu'on appel la propriété **minloc-minglob,** c-à-d que tout minimum local est aussi global.

Theorem 4 *Soient C un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction convexe de C dans $\mathbb{R}$. Alors, f admet la propriété minloc-minglob.*

Proof. Soit x^* un minimum local, vérifiant la relation (3). Raisonons par absurde et Supposons que x^* n'est pas un minimum global, donc

$$\exists x \in \Omega : f(x) < f(x^*) . \tag{5}$$

On peut donc choisir un λ suffisament petit dans $]0,1[$ tel que $y = x^* + \lambda (x - x^*)$ soit dans $B(r, x^*)$. De la convexité de f on déduit que

$$f(y) = f(x^* + \lambda (x - x^*)) \leq (1-\lambda) f(x^*) + \lambda f(x) ,$$

de la relation (5), on aura

$$f(y) < (1-\lambda) f(x^*) + \lambda f(x^*) = f(x^*) .$$

Ceci étant en contradiction avec le fait que x^* est un minimum local. ■

1.2 Existence

On considère à présent le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \end{cases} . \tag{6}$$

Pour une fonction f et un ensemble Ω quelconques, la solution du problème (6) peut ne pas existée. Cependant, si Ω est un sous ensemble propre de $\mathbb{R}^n$, le théorème classique de Weierstrass ci-dessous donne une condition suffisante assurant l'existence de cette solution.

Theorem 5 (Weierstrass) *Soient Ω un compact de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue alors f atteint ces bornes c.à.d*

$$\exists x^* \in \Omega : \inf_{x \in \Omega} f(x) = \min_{x \in \Omega} f(x) = f(x^*) ,$$

et

$$\exists x^{**} \in \Omega : \sup_{x \in \Omega} f(x) = \max_{x \in \Omega} f(x) = f(x^{**}) .$$

Rappelons que si $\Omega = \mathbb{R}^n$, le problème

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} . \tag{7}$$

est dit problème d'optimisation sans contraintes. Le théorème de Weierstrass ne peut s'appliqué Dans cette situation, vue la non compacité de Ω. La notion de fonction coércive devient primordiale.

Definition 6 (Fonction Coércive) *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, f est dite coércive si*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f = +\infty$$

Example 7 1. *$x \mapsto x^2$, est coércive.*

2. *$(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2$, est coércive.*

3. *$(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 - x_2^2$, n'est pas coércive. En effet, si on considère la suite $\forall n$, $x_n = (0, n)$, on a bien $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = +\infty$, or $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \left(-n^2\right) = -\infty$.*

Theorem 8 (Existance) *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, continue et coercive. Alors le problème (7) admet au moins une solution.*

Proof. On pose

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = d,$$

comme f prend ces valeurs dans $\mathbb{R}$,

$$d < +\infty.$$

On a

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists x(\varepsilon) : f(x) - \varepsilon < d \\ \forall n > 0, \exists x_n : f(x_n) - \frac{1}{n} < d, \end{cases}$$

alors

$$d < f(x_n) < d + \frac{1}{n}.$$

On a construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (appelée suite minimisante) tel que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = d. \tag{8}$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En effet, raisonons par absurde et supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, en déduit que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = +\infty$, la coércivité de f, implique que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$, ceci étant en contradiction avec (7) , la bornétude de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'ensuit. On peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite convergente

$$(x_{n_k})_{n_k} / \lim_{n_k\to\infty} x_{n_k} = x^*,$$

d'où

$$\lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^*) = d.$$

Ainsi, le problème (6) admet une solution. ■

1.3 Unicité

Theorem 9 *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, si le probleme (7) admet une solution et si f est strictement convexe, alors la solution est unique.*

Proof. Raisonons par absurde et supposons qu'ils existent deux solutions pour (7) x_1, x_2 avec $x_1 \neq x_2$. Comme f est strictement convexe et emparticulier pour $\lambda = \frac{1}{2}$, on aura

$$f\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) < \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) = d,$$

ceci étant en contradiction avec le fait que d est la plus petite valeur de f. ■

Definition 10 (Fonction Elliptique) *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $f \in C^1$. On dit que f est **elliptique** de constante $\alpha > 0$ si*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2 .$$

Theorem 11 *Toute fonction **elliptique** et **coércive** est **strictement convexe**, en particulier le problème (7) admet une et une seule solution.*

Exercise 12 *Soit une matrice $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Rappelons qu'e pour la matricr symétrique H il existe une matrice orthogonale O, formée de vecteurs propres de H, tel que*

$$H = O^\top D O$$

où la matrice D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de H.

1. Montrer que si H et en plus définie positive alors il existe une constante $\alpha > 0$ vérifiant:
$$\langle x, Hx \rangle \geq \alpha \|x\|^2$$

2. En déduire que la fonction quadratique
$$f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Hx \rangle + \langle x, b \rangle + c$$
est coércive.