1 Rappels de Calcul Différentiel

1.1 Notations

On se place dans $\mathbb{R}^n$, un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est représenté par la matrice uni-colonne $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^\top$, les scalaires x_i pour $i = 1, ...n$, sont les coordonnées du vecteur x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. L'espace $\mathbb{R}^n$ est menu de la norme Euclidienne,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ est noté

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = x^\top y = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

La norme Eucludienne $\|\cdot\|_2$ est induite du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et on a bien

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x \rangle = \|x\|_2^2.$$

La boule ouverte de centre x_0 et de rayon α est noté $B(x_0, \alpha)$ avec

$$B(x_0, \alpha) = \{x : \|x - x_0\|_2 < \alpha\}.$$

La boule fermée de centre x_0 et de rayon α est noté $\overline{B}(x_0, \alpha)$

$$\overline{B}(x_0, \alpha) = \{x : \|x - x_0\|_2 \leq \alpha\}.$$

Sur $\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} B(0,1) &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1\right\} \\ &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\right\} \\ &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}, \end{aligned}$$

alors que la boule fermée est

$$\begin{aligned} \overline{B}(0,1) &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1\right\} \\ &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\right\}. \end{aligned}$$

Un ensemble U dans $\mathbb{R}^n$, est appelé un ouvert si

$$\forall x \in U \; \exists r > 0 : B(x, r) \subset U.$$

1.2 Différentiel d'ordre un

Bien que nous serons intéressés dans la suite uniquement par des application à valeurs réelles, nous donnons la définition de la différentiabilité dans le cas général d'une fonction vectorielle. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et l'application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, qui à $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^\top \longmapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))^\top$.

Definition 1 (Continuité) *f est dite continue au point x_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon.$$

Definition 2 (Différentiabilité) *On dit que f est différentiable au point x_0 s'il existe une application linéaire notée $f'(x_0)$ tel que*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \|h\| \varepsilon(h), \tag{1}$$

avec $h \mapsto \varepsilon(h)$ une fonction continue tel que $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. $f'(x_0)$ est appelée la différentiel de f au point x_0.

Notation 3 *L'ensemble des application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, est noté généralement par $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, l'application linéaire $f'(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est notée aussi $Df(x_0)$. L'expression $f'(x_0)h$ est dite $f'(x_0)$ appliquée à h.*

Example 4 *Considérons l'application affine $f(x) = Ax + b$, avec $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, et $b \in M_{m,1}(\mathbb{R})$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= A(x_0 + h) + b \\ &= Ax_0 + Ah + b \\ &= f(x_0) + Ah, \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre pour $\varepsilon(\cdot)$ la fonction nulle et $Df(x_0) = A$, l'identité (1) est évidemment vérifier. Donc, toute application affine (en particulier linéaire) est différentiable.

Definition 5 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie de U dans $\mathbb{R}^m$. f est dite différentiable sur U, si f est différentiable sur tout point $x_0 \in U$. L'application*

$$Df : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

est appelée l'application différentiel de f. Il est connu que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est isomorphe à $M_{m,n}(\mathbb{R})$, d'où $\forall x \in U$, $Df(x)$ est représentée par une matrice de $M_{m,n}(\mathbb{R})$, plus précisemment on a la proposition suivante

Proposition 6 *Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ différentiable en a, alors, on peut représenter $Df(x)$ par sa matrice dans la base canonique et on a*

$$[Df(x)]_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \quad i = 1, ...m, \ j = 1, ..., n.$$

La matrice $[Df(x)]_{i,j}$ est appelée la matrice Jacobienne de f au point x, on la note aussi $Jacf(x)$.

Example 7

Proof. Soient $e_1, e_2, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a pour tout i et j

$$f'(x).e_j = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t}.$$

On a alors

$$[f'(x).e_j]_i = \lim_{t \to 0} \frac{f_i(x_1, x_2, \ldots, x_j + t.e_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{t},$$

ainsi

$$[Df(x)]_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \quad i = 1, ...m, \; j = 1, ..., n.$$

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ avec$m = 1$, la matrice Jacobienne en un point x n'est rien d'autre que la transposé du vecteur Gradient. En effet:

$$Jacf(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right],$$

d'où

$$Jacf(x) = \nabla f(x)^T$$

■

L'exemple précédent, nous dit que la différentiel de l'application affine $f(x) = Ax + b$ est l'application constante qui à chaque $x \mapsto Df(x) = A$.

Proposition 8 *Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ différentiable au point a, alors*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} = f'(a)h.$$

Proof. *On a,*

$$f(a + th) = f(a) + f'(a)th + \|th\| \varepsilon(th),$$

$$f(a + th) - f(a) = f'(a)th + |t| \|h\| \varepsilon(th),$$

$$\frac{f(a + th) - f(a)}{t} = f'(a)h \mp \|h\| \varepsilon(th),$$

par le passage à la limite,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} = f'(a)h.$$

■

La proposition précédente est un résultat pratique, elle permet dans le cas d'une fonction différentiable de calculer sa différentiel. Considérons à titre d'exemple le cas d'une fonction quadratique. Soient $A \in M_{(n,n)}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et $b \in M_{(n,1)}(\mathbb{R})$, définissons la fonction quadratique

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x. \tag{2}$$

Calculons sa différentielle au point x, il suffit de calculer

$$f'(x)h = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+th) - f(x)}{t}??$$

or

$$\begin{aligned}
f(x+th) &= \frac{1}{2}(x+th)^T A(x+th) + b^T(x+th) \\
&= \frac{1}{2}\langle x+th, A(x+th)\rangle + \langle b, x+th\rangle \\
&= \frac{1}{2}[\langle x, A(x+th)\rangle + \langle th, A(x+th)\rangle] + \langle b, x\rangle + \langle b, th\rangle \\
&= \frac{1}{2}[\langle x, A(x+th)\rangle + t\langle h, A(x+th)\rangle] + \langle b, x\rangle + t\langle b, h\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left[\langle x, Ax\rangle + t\langle x, Ah\rangle + t\langle h, Ax\rangle + t^2\langle h, Ah\rangle\right] + \langle b, x\rangle + t\langle b, h\rangle \\
&= \overbrace{\frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle + \langle b, x\rangle}^{f(x)} + \frac{1}{2}\left[t\langle x, Ah\rangle + t\langle h, Ax\rangle + t^2\langle h, Ah\rangle\right] + t\langle b, h\rangle \\
&= f(x) + t\langle Ax + b, h\rangle + \frac{1}{2}t^2\langle h, Ah\rangle
\end{aligned}$$

d'où

$$f(x+th) - f(x) = t\langle Ax+b, h\rangle + \frac{1}{2}t^2\langle h, Ah\rangle$$

en dévisant sur t

$$\frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \langle Ax+b, h\rangle + \frac{1}{2}t\langle h, Ah\rangle,$$

et par passage à la limite, on trouve

$$f'(x).h = \langle Ax+b, h\rangle, \forall h \in \mathbb{R}^n$$

alors

$$f'(x) = Ax + b.$$

Exercise 9 *Calculer la différentiel des fonction suivantes*

1. $f(x) = \langle x, Ax\rangle, x \in \mathbb{R}^n$, avec $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$.
2. $f(x,y) = x^2 + y^2, (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. $f(x) = \|x\|_2, x \in \mathbb{R}^n$.

1.3 Différentiel d'Ordre Deux

Definition 10 *Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$. Supposons que f est diffentiable en tout point de U On a $Df : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, et si deplus Df est différentiable en un point $x \in U$, on dira que f est deux fois différentiable en x. La différentielle d'ordre 2 au point x est notée $D^2 f(x)$.*

Considérons à présent le cas $m = 1$. Si f est deux fois différentiable en tout point $x \in U$, l'application différentiel d'ordre deux $D^2 f$ est définie de U dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$, ce dernier espace est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, espace des formes bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Le résultat suivant mais en évidence ceci.

Theorem 11 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie de U dans $\mathbb{R}$. f est deux fois différentiable en un point x, s'il existe une matrice symétrique notée $\nabla^2 f(a)$ et une fonction continue $\varepsilon(\cdot)$ avec $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$, tel que*

$$f(x+h) = f(x) + f'(x).h + \frac{1}{2} h^T \nabla^2 f(x) h + \|h\|^2 \varepsilon(h);$$

La matrice $\nabla^2 f(x)$ est appelée matrice Hessienne de f au point x, elle définit comme suit

$$\left[\nabla^2 f(x)\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(a), i, j = \overline{1, n}.$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Example 12 *Soit la forme qudratique*

$$q(x) = \frac{1}{2} x^T H x + x^T b. \tag{3}$$

On sait déjà que

$$Dq(x) = Hx + b \in M_{(n,1)}(\mathbb{R}) \text{ isomorphe à } \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

On déduit que

$$D^2 q(x) = H \in S_{(n)}(\mathbb{R}) \text{ isomorphe à } \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

Exercise 13 *Soit*

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1 x_2.$$

Mettre f sous la forme canonique suivante d'une forme quadratique c-à-d:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Hx + x^T b$$

où $H \in S_{(n)}(\mathbb{R})$ et $b \in M_{(n,1)}(\mathbb{R})$. Calculer $Df(x)$ et $D^2 f(x)$.

On a

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -4x_1 + 4x_2 + 2 \\ -6x_2 + 4x_1 + 6 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = H = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

En développent le terme $\frac{1}{2}x^T Hx$ on trouve $-2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2$, on déduit que b vaut $(2,6)^\top$, on obtient que

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Hx + x^T b.$$

En déduit que

$$Df(x) = Hx + b$$

et

$$D^2 f(x) = H.$$