Equations différentielles linéaires

Equation linéaire scalaire d'ordre 1

Exercice 1 [00376] [correction]
Résoudre les équations différentielles suivantes :
a) $y' - y = \sin(2x)\,\mathrm{e}^x$
b) $y' + 2xy = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$
c) $y' + y\tan x = \sin 2x$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$

Exercice 2 [00382] [correction]
Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y' - \frac{x}{x^2-1}y = 2x$$

Exercice 3 [00377] [correction]
Déterminer les solutions, s'il en existe, des problèmes de Cauchy suivants :
a) $y' - (x+1)(y+1) = 0$ et $y(0) = 1$
b) $(1+x^2)y' - (x+1)y = 2$ et $y(0) = -1$.

Exercice 4 [00379] [correction]
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = \mathrm{e}^x f(y) + \mathrm{e}^y f(x)$$

Exercice 5 [00380] [correction]
Soit $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et intégrable.
Etablir que les solutions de l'équation différentielle $y' - a(t)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 6 [00381] [correction]
a) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue de limite nulle en $+\infty$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' + y = h$ converge vers 0 en $+\infty$.
b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f + f' \xrightarrow[+\infty]{} \ell$. Montrer que $f \xrightarrow[+\infty]{} \ell$.

Exercice 7 [03109] [correction]
Soient α un complexe de partie réelle strictement positive et une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f' + \alpha f$ tend vers 0 en $+\infty$.
Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 8 [03505] [correction]
On considère l'équation

$$(E) : (1-x)y' - y = g$$

où $g :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ est donnée.
a) Résoudre l'équation homogène associée.
b) On suppose que la fonction g est développable en série entière

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

de rayon de convergence $R \geqslant 1$.
Montrer que (E)admet au moins une solution développable en série entière en 0,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

de rayon de convergence $R' \geqslant 1$ et exprimer les a_n en fonction de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 Mines-Ponts MP [03620] [correction]
a) Montrer que l'équation différentielle

$$y' - y = f$$

avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique admet une unique solution bornée.
b) Est-elle périodique ?
c) Donner ses coefficients de Fourier c_n en fonction de ceux de f et étudier la convergence de la série $\sum c_n$.

Exercice 10 CCP MP [03782] [correction]
Résoudre sur $]-\pi/2, \pi/2[$

$$y'(x) - \tan(x)y + (\cos x)^2 = 0$$

Equation vectorielle linéaire d'ordre 1

Exercice 11 [00384] [correction]
Soient $a, b \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $a \circ b = b \circ a$.
En considérant pour $x_0 \in E$, l'application $t \mapsto (\exp(ta) \circ \exp(tb))x_0$, établir

$$\exp(a+b) = \exp(a) \circ \exp(b)$$

Exercice 12 Mines-Ponts MP [02900] [correction]
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on identifie $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ avec $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) la matrice A est antisymétrique ;
(ii) chaque solution Y du système différentiel $Y' = AY$ est de norme constante.

Exercice 13 [01320] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant

$$A^2 + I_{2n} = O_{2n}$$

Exprimer la solution de l'équation matricielle

$$X'(t) = AX(t)$$

Exercice 14 [03670] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont aucune valeur propre n'est élément de $2i\pi\mathbb{Z}$.
a) Montrer que $\mathrm{e}^A - I_n$ est inversible.
Soit $B : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une fonction continue et 1-périodique.
b) Montrer que l'équation

$$(E) : X' = AX + B(t)$$

d'inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ possède une unique solution 1-périodique.

Systèmes différentiels linéaire d'ordre 1

Exercice 15 [00385] [correction]
Résoudre le système différentiel réel suivant

$$\begin{cases} x' = \cos(t)\,x + \sin(t)\,y \\ y' = -\sin(t)\,x + \cos(t)\,y \end{cases}$$

Exercice 16 [00386] [correction]
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x_1' = (2-t)x_1 + (t-1)x_2 \\ x_2' = 2(1-t)x_1 + (2t-1)x_2 \end{cases}$$

Exercice 17 [00387] [correction]
Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1' = (t+3)x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -4x_1 + (t-3)x_2 \end{cases}$$

Exercice 18 [00388] [correction]
Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' = (1+t)x_1 + tx_2 - \mathrm{e}^t \\ x_2' = -tx_1 + (1-t)x_2 + \mathrm{e}^t \end{cases}$$

Systèmes différentiels linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

Exercice 19 [00389] [correction]
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

Exercice 20 [03490] [correction]
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 + \mathrm{e}^t \\ x_2' = -2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Exercice 21 [00390] [correction]
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = x + 8y + \mathrm{e}^t \\ y' = 2x + y + \mathrm{e}^{-3t} \end{cases}$$

Exercice 22 Mines-Ponts MP [00391] [correction]
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

Exercice 23 [00392] [correction]
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}$$

Exercice 24 [00393] [correction]
Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et u un vecteur unitaire de E.
Résoudre l'équation

$$x' = u \wedge x$$

Exercice 25 Mines-Ponts MP [02902] [correction]
Résoudre le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x' = x - z \\ y' = x + y + z \\ z' = -x - y + z \end{cases}$$

Exercice 26 Centrale MP [02490] [correction]
On considère l'équation

$$x^{(4)} - 2x^{(3)} + 2x^{(2)} - 2x' + x = 0$$

a) Montrer que $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est solution de E si, et seulement si,
$X = {}^t\begin{pmatrix} x & x' & x^{(2)} & x^{(3)} \end{pmatrix}$ est solution de $AX = X'$ avec A à déterminer.
b) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$?
c) Montrer que

$$\mathbb{C}^4 = \ker(A - iI_4) \oplus \ker(A + iI_4) \oplus \ker(A - I_4)^2$$

d) Montrer qu'il existe P inversible telle que $P^{-1}AP = B$ avec B diagonale par blocs et triangulaire supérieure.
e) Déterminer les solutions de l'équation différentielle.

Equation linéaire scalaire d'ordre 2

Exercice 27 [00395] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(t^2 + 1)y'' - 2y = t$$

en commençant par rechercher les polynômes solutions.

Exercice 28 [00396] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(1 + t^2)^2 y''(t) - 2t(1 + t^2)y'(t) + 2(t^2 - 1)y(t) = (1 + t^2)$$

On pourra commencer par rechercher une solution polynomiale de l'équation homogène.

Exercice 29 [00397] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}^{+\star}$ l'équation

$$t^3 y'' + ty' - y = 0$$

Exercice 30 [00398] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}^{+\star}$ l'équation

$$t^2y'' + ty' - y = 1$$

Exercice 31 [00400] [correction]
Résoudre sur $]0,1[$ l'équation

$$x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$$

en commençant par rechercher une solution développable en série entière.

Exercice 32 [00401] [correction]
Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation

$$4(1-t^2)y''(t) - 4ty'(t) + y(t) = 0$$

en recherchant les fonctions développables en série entière.

Exercice 33 [01319] [correction]
Soit l'équation différentielle

$$E : xy'' + 3y' - 4x^3y = 0$$

a) Chercher une solution non nulle y_1 développable en série entière au voisinage de 0 et non nulle.
Préciser le rayon de convergence puis exprimer $y_1(x)$ à l'aide des fonctions usuelles, pour $x \in]0,+\infty[$
b) Trouver une solution y_2 de E sur $]0,+\infty[$ non colinéaire à y_1.
c) Décrire l'ensemble des solutions de E sur $]0,+\infty[$.

Exercice 34 [01016] [correction]
a) Déterminer les séries entières solutions au voisinage de 0 de l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + 2y = 0$$

b) Exprimer parmi celles-ci celles dont la somme est une fonction paire.

Exercice 35 [00404] [correction]
a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(1+t^2)y''(t) + 4t\,y'(t) + 2y(t) = 0$$

en recherchant les séries entières solutions.
b) Résoudre ensuite

$$(1+t^2)y''(t) + 4t\,y'(t) + 2y(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

Exercice 36 Centrale MP [02455] [correction]
a) Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \cos(nt)$$

b) Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente.
Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$$

Exercice 37 Mines-Ponts MP [02891] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(x^2+1)y'' + xy' - y = 0$$

Exercice 38 Mines-Ponts MP [02892] [correction]
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x > 0, f'(x) = f(1/x)$$

Exercice 39 [03240] [correction]
Soit $\alpha > 0$. Résoudre sur $I =]0,+\infty[$ l'équation différentielle

$$E_\alpha : x^2y''(x) + xy'(x) - \alpha^2 y(x) = 0$$

On pourra étudier les fonctions propres de l'application

$$\varphi : y(x) \mapsto xy'(x)$$

Exercice 40 [03504] [correction]
Résoudre sur $]0,1[$ l'équation différentielle

$$x^2(1-x)y''-x(1+x)y'+y=0$$

Exercice 41 [03506] [correction]
Déterminer la dimension de l'espace

$$E=\left\{y\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})/\forall x\in\mathbb{R},y''(x)+y(x)=y(0)\cos(x)\right\}$$

Exercice 42 [03508] [correction]
Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle

$$xy''(x)+2y'(x)-xy(x)=0$$

en posant $y(x)=x^\alpha z(x)$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$ bien choisi.

Exercice 43 CCP MP [03293] [correction]
Résoudre l'équation différentielle

$$(1-x^2)y''-3xy'-y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

On pourra commencer par vérifier que l'application $x\mapsto\left(1-x^2\right)^{-1/2}$ est solution de l'équation homogène associée.

Exercice 44 CCP MP [02573] [correction]
En indiquant les hypothèses nécessaires, effectuer le changement de variable $u=\varphi(t)$ dans l'équation différentielle

$$(1+t^2)x''+tx'+a^2x=0$$

tel qu'elle devienne une équation à coefficients constants et la résoudre.

Exercice 45 CCP MP [02540] [correction]
On veut résoudre

$$(E):(x+1)y''-(3x+4)y'+3y=(3x+2)\mathrm{e}^{3x}$$

Si Δ est l'opérateur de dérivation et $Q(X)=X-3$, on a $Q(\Delta)(y)=y'-3y$.
Montrer l'existence d'un polynôme P de la forme $a(x)X+b(x)$ tel que (E) devienne

$$\left(P(\Delta)\circ Q(\Delta)\right)(y)=(3x+2)\mathrm{e}^{3x}$$

Résoudre l'équation à l'aide du changement de variable $z=Q(\Delta)(y)$.

Exercice 46 CCP MP [02528] [correction]
a) Montrer qu'il existe une solution h de l'équation

$$xy''+y'+y=0$$

développable en série entière et vérifiant $h(0)=1$.
b) Montrer que h ne s'annule qu'une fois sur $]0,2[$.

Etude théorique d'équation d'ordre 2

Exercice 47 [00402] [correction]
Soit $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ une fonction continue non nulle.
Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+p(x)y=0$ s'annule.

Exercice 48 [03779] [correction]
Soient q une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs réelles et f une solution non nulle sur $[a,b]$ de l'équation différentielle

$$(E):y''(x)+q(x)y(x)=0$$

Montrer que f admet un nombre fini de zéros.

Exercice 49 [03110] [correction]
Soient $f\in\mathcal{C}^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ et g une solution non identiquement nulle de

$$E:y''+fy=0$$

a) Montrer que les zéros de g sont isolés.
Dans la suite, x_1 et x_2 sont deux zéros consécutifs de g vérifiant $x_1<x_2$.
b) Montrer, si $x\in[x_1,x_2]$

$$(x_2-x)\int_{x_1}^{x}(t-x_1)f(t)g(t)\,\mathrm{d}t+(x-x_1)\int_{x}^{x_2}(x_2-t)f(t)g(t)\,\mathrm{d}t=(x_2-x_1)g(x)$$

c) En déduire une minoration de

$$\int_{x_1}^{x_2}|f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Exercice 50 [03111] [correction]
Soient $m \in \mathbb{R}^{+\star}$ et $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, q(t) \geqslant m$$

On note E l'équation différentielle $y'' + qy = 0$. Soit f une solution non nulle de E.
a) Montrer qu'il existe $p, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $p > 0$ telles que

$$f = p\cos g \text{ et } f' = p\sin g$$

b) Exprimer g' en fonction de g et q.
c) En déduire que g est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^+$ sur $g(\mathbb{R}^+)$.
d) Montrer que f s'annule une infinité de fois.

Exercice 51 [03499] [correction]
Soient $p, q : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue et l'équation différentielle définie sur $[0, 1]$ suivante

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Montrer que si une solution possède une infinité de racines alors celle-ci est la fonction nulle.

Exercice 52 [03671] [correction]
Soient $q_1, q_2 : I \to \mathbb{R}$ continues vérifiant $q_1 \leqslant q_2$.
On note φ_1 et φ_2 deux solutions sur I respectivement des équations

$$y'' + q_1(x)y = 0 \text{ et } y'' + q_2(x)y = 0$$

On suppose la solution φ_1 non identiquement nulle.
a) Montrer que les zéros de φ_1 sont isolés i.e. que si $x_0 \in I$ annule φ_1 alors

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \varphi(x) = 0 \Rightarrow x = x_0$$

b) Soient $a < b$ deux zéros consécutifs de φ_1. Montrer que φ_2 s'annule sur $[a, b]$.
(indice : étudier $\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1'$)
c) Application : montrer que si φ est une solution non nulle de l'équation
$y'' + \mathrm{e}^x y = 0$ alors

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \exists x \in [a, a + \pi], \varphi(x) = 0$$

Exercice 53 [00436] [correction]
Soit q une fonction continue, intégrable sur $[0, +\infty[$. Soit E l'équation différentielle

$$y'' + qy = 0$$

a) Si f est une solution bornée de E sur $[0, +\infty[$, montrer que sa dérivée f' converge en $+\infty$.
Quelle est la valeur de cette limite ?
b) Soient f et g deux solutions bornées. Etudier le wronskien de f et de g

$$w = f'g - fg'$$

En déduire que f et g sont liées. Que peut-on en conclure ?

Wronskien

Exercice 54 [00394] [correction]
Soient $a, b : I \to \mathbb{C}$ continues et (f_1, f_2) un système fondamental de solutions de l'équation

$$E : y'' + a(t)y'(t) + b(t)y = 0$$

Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par le wronskien

$$w : t \mapsto \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix}$$

Exercice 55 Centrale PC [03100] [correction]
On considère l'équation différentielle

$$E_0 : y'' - \mathrm{e}^x y = 0$$

a) Soit y une solution de E_0 sur $\mathbb{R}$. Etudier la convexité de y^2.
En déduire que si $y(0) = y(1) = 0$ alors y est nulle sur $\mathbb{R}$.
b) Soient y_1 et y_2 deux solutions de E_0 telles que

$$(y_1(0), y_1'(0)) = (0, 1) \text{ et } (y_2(1), y_2'(1)) = (0, 1)$$

Démontrer que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de E_0.
c) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Démontrer que l'équation différentielle

$$E : y'' - \mathrm{e}^x y = f(x)$$

admet une unique solution y telle que

$$y(0) = y(1) = 0$$

Exercice 56 [00383] [correction]
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ muni d'une base $\mathcal{B}$.
Soient $t \mapsto a(t)$ une application continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{L}(E)$ et $t_0 \in \mathbb{R}$.
Montrer que si les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ forment un système fondamental de solutions de l'équation $x' = a(t)x$ alors son wronskien W dans la base $\mathcal{B}$ est déterminé par

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(a(u))\mathrm{d}u$$

Exercice 57 Centrale PC [03387] [correction]
On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + \cos^2(t)y = 0$$

a) Justifier l'existence d'une solution u de (E) telle que $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.
b) Démontrer l'existence de deux réels α, β vérifiant

$$\alpha < 0 < \beta,\ u'(\alpha) > 0 \text{ et } u'(\beta) < 0$$

En déduire que u possède au moins un zéro dans $\mathbb{R}^{-\star}$ et $\mathbb{R}^{+\star}$.
c) Justifier l'existence de réels

$$\gamma = \max\{t < 0/u(t) = 0\} \text{ et } \delta = \min\{t > 0/u(t) = 0\}$$

d) Soit v une solution de (E) linéairement indépendante de u.
En étudiant les variations de

$$W = uv' - u'v$$

montrer que v possède au moins un zéro dans$]\gamma, \delta[$.
e) Soit w une solution non nulle de (E). Démontrer que w admet une infinité de zéros. On pourra introduire pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$w_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto w(t - n\pi)$$

[Enoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Méthode de variation des constantes

Exercice 58 [00405] [correction]
Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{1+t^2}$$

Exercice 59 [00406] [correction]
Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \tan t$$

Exercice 60 [00407] [correction]
Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \tan^2 t$$

Exercice 61 [00408] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' + y = f$$

On exprimera la solution à l'aide d'une intégrale.
b) Déterminer la solution telle que $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 62 [00409] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$f + f'' \geqslant 0$$

Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$$

Exercice 63 Mines-Ponts MP [02893] [correction]
Résoudre sur $]0, \pi[$

$$y'' + y = \mathrm{cotan} x$$

Exercice 64 Mines-Ponts MP [02894] [correction]
a) Résoudre sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par variation des constantes l'équation différentielle

$$y'' + y = 1/x$$

b) En déduire une expression de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

valable pour $x > 0$.
c) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 65 Mines-Ponts MP [02896] [correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 2π-périodique. Existe-t-il $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 2π-périodique et solution de

$$y'' + y = f\,?$$

Exercice 66 Mines-Ponts MP [02895] [correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ monotone ayant une limite finie en $+\infty$.
Montrer que les solutions de l'équation $y'' + y = f$ sont bornées.

Exercice 67 [00417] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y'' + \frac{2t}{t^2+1}y' + \frac{1}{(t^2+1)^2}y = \frac{t}{(t^2+1)^2}$$

en posant $x = \arctan t$.

Résolution avec raccord

Exercice 68 [00419] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E) : x^2y' - y = 0$$

Exercice 69 [00420] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $xy' - y = x$ b) $xy' + y - 1 = 0$
c) $xy' - 2y = x^4$ d) $x(1+x^2)y' - (x^2-1)y + 2x = 0$

Exercice 70 [00421] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante

$$(\mathrm{e}^x - 1)y' + \mathrm{e}^x y = 1$$

Exercice 71 [00422] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $y'\sin x - y\cos x + 1 = 0$ b) $(\sin x)^3\, y' = 2(\cos x)y$

Exercice 72 [00423] [correction]
Déterminer les solutions, s'il en existe, des problèmes de Cauchy suivants :
a) $(\tan x)y' - y = 0$ et $y(0) = 0$
b) $(\tan x)y' - y = 0$ et $y(0) = 1$.

Exercice 73 [00424] [correction]
Résoudre sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$x(x^2-1)y' + 2y = x^2$$

Exercice 74 [00425] [correction]
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$xy' - \alpha y = 0$$

en discutant selon les valeurs de α.

Exercice 75 [00426] [correction]
On considère l'équation différentielle

$$xy'' - y' - x^3y = 0$$

a) Montrer que si y est solution sur I alors $x \mapsto y(-x)$ est solution sur I' symétrique de I par rapport à 0.
b) Résoudre sur $\mathbb{R}^{+\star}$ l'équation via le changement de variable $t = x^2$.
c) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 76 [00427] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(t+1)^2y'' - 2(t+1)y' + 2y = 0$$

en commençant par rechercher les solutions polynomiales.

Exercice 77 [00428] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$E : (t+1)y'' - (t+2)y' + y = 0$$

Exercice 78 [00429] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$E : y' + y = \max(x, 0)$$

Exercice 79 Centrale MP [03061] [correction]
Soient

$$(E) : x(x-4)y' + (x-2)y = -2 \text{ et } (H) : x(x-4)y' + (x-2)y = 0$$

a) Résoudre H, quelles sont les solutions maximales ?
b) Résoudre E sur $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, 4[$ et $I_3 =]4, +\infty[$.
c) En déduire les solutions maximales de E.

Exercice 80 Mines-Ponts MP [02889] [correction]
Résoudre

$$x \ln x \, y' - (3 \ln x + 1)y = 0$$

Exercice 81 Centrale PC [00105] [correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et g une solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de l'équation différentielle

$$xy' - y = f(x)$$

a) Démontrer que g se prolonge par continuité en 0. Déterminer une condition nécessaire sur $f'(0)$pour que la fonction ainsi prolongée soit dérivable en 0. Démontrer que cette condition n'est pas suffisante.
b) f est supposée de classe $\mathcal{C}^2$ et la condition précédente est vérifiée. Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 82 Centrale PC [00506] [correction]
Soit (E) l'équation différentielle

$$(\ln x)y' + \frac{y}{x} = 1$$

a) Résoudre (E) sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
b) Soit g la fonction définie sur $]-1, +\infty[\setminus \{0\}$ par

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Montrer que g se prolonge sur $]-1, +\infty[$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
c) Démontrer que (E) admet une solution de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 83 [03468] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante

$$\mathrm{sh}(x)y' - \mathrm{ch}(x)y = 1$$

Exercice 84 [03501] [correction]
On étudie l'équation différentielle

$$(E) : 4xy'' + 2y' - y = 0$$

a) Déterminer les fonctions développables en série entière solutions
b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et sur $\mathbb{R}^{-\star}$ en posant respectivement $x = t^2$ et $x = -t^2$.
c) Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Problème se ramenant à la résolution d'une équation différentielle

Exercice 85 CCP MP [02419] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - x \text{ (*)}$$

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
b) Trouver toutes les fonctions f vérifiant (*).

Exercice 86 CCP MP [02535] [correction]
Quelles sont les fonctions continues f telles que

$$f(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)f(t)\mathrm{d}t\,?$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) $y(x) = (C + \sin^2 x)\mathrm{e}^x$
b) $y(x) = (x^2 + C)\mathrm{e}^{-x^2}$
c) $y(x) = C\cos x - 2\cos^2 x$

Exercice 2 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre.
Solution homogène : $y_0(x) = C\sqrt{x^2-1}$.
Par variation de la constante, solution particulière $y_1(x) = 2(x^2-1)$.
Solution générale : $y(x) = C\sqrt{x^2-1} + 2(x^2-1)$.

Exercice 3 : [énoncé]
a) Solution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$: $y(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x+1)^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Solution particulière sur $\mathbb{R}$: $y_0(x) = -1$.
Solution générale sur $\mathbb{R}$

$$y(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x+1)^2} - 1 \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

On aura $y(0) = 1$ si, et seulement si, $C = 2/\sqrt{\mathrm{e}}$.
b) Solution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$: $y(x) = C\sqrt{x^2+1}\mathrm{e}^{\arctan x}$ avec $C \in \mathbb{R}$
Solution particulière sur $\mathbb{R}$: $y_0(x) = x - 1$ après recherche de solution de la forme $ax + b$.
Solution générale sur $\mathbb{R}$

$$y(x) = C\sqrt{x^2+1}\mathrm{e}^{\arctan x} + x - 1 \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

On aura $y(0) = -1$ si, et seulement si, $C = 0$.

Exercice 4 : [énoncé]
Soit f une solution.
Pour $x = y = 0$ on obtient $f(0) = 0$.
De plus

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\mathrm{e}^x f(h) + \mathrm{e}^h f(x) - f(x)}{h} = \mathrm{e}^x \frac{f(h) - f(0)}{h} + \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} f(x)$$

donc

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \mathrm{e}^x f'(0) + f(x)$$

Par suite f est dérivable en x et $f'(x) = f'(0)\mathrm{e}^x + f(x)$.
La fonction f est alors solution d'une équation différentielle de la forme $y' = y + C\mathrm{e}^x$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$.
Après résolution, on obtient

$$f(x) = Cx\mathrm{e}^x$$

Inversement, de telles fonctions sont solutions.

Exercice 5 : [énoncé]
La solution générale de l'équation étudiée est $y(t) = \lambda \mathrm{e}^{A(t)}$ avec $A(t) = \int_0^t a(u)\mathrm{d}u$.
Or pour tout $t \geqslant 0$, $|A(t)| \leqslant \int_0^t |a(u)|\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{+\infty} |a(u)|\,\mathrm{d}u$ donc y est bornée.

Exercice 6 : [énoncé]
a) La solution générale de l'équation différentielle $y' + y = h$ est

$$y(x) = \left(\lambda + \int_0^x h(t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-x}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \geqslant A, |h(t)| \leqslant \varepsilon$$

On a alors

$$y(x) = \left(\lambda + \int_0^A h(t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-x} + \int_A^x h(t)\mathrm{e}^{t-x}\mathrm{d}t$$

avec

$$\left|\int_A^x h(t)\mathrm{e}^{t-x}\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon \text{ et } \left(\lambda + \int_0^A h(t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

b) Posons $h = f' + f - \ell$. $f - \ell$ est solution de l'équation différentielle $y' + y = h$ donc $f - \ell \xrightarrow[+\infty]{} 0$ puis $f \xrightarrow[+\infty]{} \ell$.

Exercice 7 : [énoncé]
Posons $g = f' + \alpha f$. La fonction f est solution de l'équation différentielle.

$$y' + \alpha y = g$$

La solution générale de cette équation différentielle est

$$y(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\alpha x} + \int_0^x g(t)\mathrm{e}^{\alpha(t-x)}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, on peut écrire

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\alpha x} + \int_0^x g(t)\mathrm{e}^{\alpha(t-x)}\,\mathrm{d}t$$

Il est immédiat que $\lambda \mathrm{e}^{-\alpha x} \to 0$ quand $x \to +\infty$ car $\mathrm{Re}\alpha > 0$.
Etudions maintenant la limite du terme intégral.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction g tend vers 0 en $+\infty$, il existe $A \geqslant 0$ tel que $\forall t \geqslant A, |g(t)| \leqslant \varepsilon$
On a alors pour tout $x \geqslant A$

$$\int_0^x g(t)\mathrm{e}^{\alpha(t-x)}\,\mathrm{d}t = \int_0^A g(t)\mathrm{e}^{\alpha(t-x)}\,\mathrm{d}t + \int_A^x g(t)\mathrm{e}^{\alpha(t-x)}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\left|\int_A^x g(t)\mathrm{e}^{\alpha(t-x)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_A^x \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\alpha)(t-x)}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\alpha)(t-x)}\right]_A^x \leqslant \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)}$$

et

$$\left|\int_0^A g(t)\mathrm{e}^{\alpha(t-x)}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^A g(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t\right| \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(\alpha)x} = C^{te}\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(\alpha)x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Pour x assez grand on a alors

$$\left|\int_0^x g(t)\mathrm{e}^{\alpha(t-x)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)} + \varepsilon$$

Ainsi $\int_0^x g(t)\mathrm{e}^{\alpha(t-x)}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ puis $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercice 8 : [énoncé]
a) C'est une équation différentielle linéaire. La solution générale homogène est

$$y(x) = \frac{\lambda}{1-x}$$

b) Analyse :
Supposons y somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R' \geqslant 1$ solution sur $]0,1[$ de l'équation (E). Pour $x \in]0,1[$, on a

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

et donc

$$(1-x)y'(x) + y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+1)(a_{n+1}-a_n)\right]x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n + \frac{b_n}{n+1}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{k+1}$$

Synthèse :
Considérons la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ déterminée par $a_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, a_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{k+1}$$

Pour $|x| < 1$, on a

$$|a_n x^n| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{|b_k|\,|x|^n}{k+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}|b_k|\,|x|^k$$

Or la série $\sum b_n x^n$ est absolument convergente (car $R \geqslant 1$) et donc la suite $(a_n x^n)$ est bornée.
On en déduit que le rayon de convergence R' de la série entière $\sum a_n x^n$ vérifie $R' \geqslant 1$ et les calculs qui précède assure que sa somme est solution sur $]-1,1[$ de l'équation étudiée.

Exercice 9 : [énoncé]
a) En appliquant la méthode de variation de la constante, la solution générale de cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 peut s'exprimer

$$y(x) = \left(\lambda + \int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^x \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C}$$

Si cette solution est bornée alors on a nécessairement

$$\lambda + \int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

et donc

$$\lambda = -\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Inversement, l'intégrale précédente converge assurément car

$$\left|f(t)\mathrm{e}^{-t}\right| \leqslant M\mathrm{e}^{-t} \text{ avec } M = \sup_{[0,2\pi]} |f|$$

et la fonction donnée par

$$y(x) = \left(-\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^x$$

est solution de l'équation étudiée. Elle est de plus bornée car

$$|y(x)| \leqslant \left(\int_x^{+\infty} M\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^x = M$$

b) La solution précédente est périodique car

$$y(x+2\pi) = \left(\int_{x+2\pi}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{x+2\pi} = \left(\int_x^{+\infty} f(u+2\pi)\mathrm{e}^{-u-2\pi}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{x+2\pi} = y(x)$$

puisque la fonction f est 2π-périodique.
c) Puisque $y' - y = f$ et que $c_n(y') = inc_n(y)$ on a

$$(in-1)c_n = c_n(f)$$

Puisque la fonction y est de classe $\mathcal{C}^1$, sa série de Fourier converge uniformément vers elle-même et en particulier la série numérique $\sum c_n$ converge avec

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n = y(0) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 10 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire de solution générale homogène

$$y(x) = \frac{\lambda}{\cos x}$$

L'application de la méthode de la variation de la constante amène à déterminer

$$\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x = \int \cos x\,\mathrm{d}x - \int \cos x \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$$

Au final, on obtient la solution générale

$$y(x) = \frac{\frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x + \lambda}{\cos x}$$

Exercice 11 : [énoncé]
$\varphi : t \mapsto \exp(ta)\circ\exp(tb)x_0$ est dérivable et vérifie $\varphi'(t) = (a+b)\varphi(t)$. En effet

$$(\exp(ta)\circ\exp(tb))' = a\circ\exp(ta)\circ\exp(tb) + \exp(ta)\circ b\circ\exp(tb)$$

or $b\circ\exp(ta) = \exp(ta)\circ b$ car a et b commutent donc

$$(\exp(ta)\circ\exp(tb))' = (a+b)\circ\exp(ta)\circ\exp(tb)$$

De plus $\varphi(0) = x_0$ donc $\varphi(t) = \exp(t(a+b))x_0$. Puisque ceci vaut pour tout x_0 :

$$\exp(t(a+b)) = \exp(ta)\circ\exp(tb)$$

et pour $t = 1$ la relation demandée.

Exercice 12 : [énoncé]
Soit Y une solution du système différentiel $Y' = AY$.
La norme de Y s'obtient en calculant ${}^tYY$.
On a

$$({}^tYY)' = {}^tY'Y + {}^tYY' = {}^tY({}^tA + A)Y$$

Ainsi si A est antisymétrique, $({}^tYY)' = 0$ et donc Y est de norme constante.
Inversement, si chaque solution du système différentiel est de norme constante alors pour tout $Y_0 \in \mathbb{R}^n$,

$${}^tY_0({}^tA + A)Y_0 = 0$$

Par suite 0 est la seule valeur propre de l'endomorphisme symétrique ${}^tA + A$ et, puisque celui-ci est diagonalisable, on obtient

$${}^tA + A = 0$$

La matrice A est donc antisymétrique.

Exercice 13 : [énoncé]
L'équation étudiée est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant. Sa solution générale peut être exprimée par une exponentielle

$$X(t) = \exp(tA)X(0)$$

avec

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}A^k$$

Or $A^2 = -I_{2n}$ donc, en séparant les termes d'indices pairs de ceux d'indices impairs de cette série absolument convergente

$$\exp(tA) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} t^{2p} I_{2n} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} t^{2p+1} A = \cos(t) I_{2n} + \sin(t) A$$

Ainsi la solution générale de l'équation étudiée est

$$X(t) = \cos(t)X(0) + \sin(t)AX(0)$$

Exercice 14 : [énoncé]

a) La matrice complexe A est assurément trigonalisable et on peut donc écrire $A = PTP^{-1}$ avec

$$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ et } T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ où } \lambda_k \in \mathrm{Sp} A$$

On a alors

$$P^{-1}(\mathrm{e}^A - I_n)P = \mathrm{e}^T - I_n = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} - 1 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & \mathrm{e}^{\lambda_n} - 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n, \mathrm{e}^{\lambda_k} - 1 \neq 0 \text{ car } \lambda_k \notin 2i\pi\mathbb{Z}$$

On peut donc conclure $\mathrm{e}^A - I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

b) La solution générale de l'équation (E) est de la forme

$$X(t) = \mathrm{e}^{tA} X_0 + \tilde{X}(t)$$

avec $\tilde{X}$ solution particulière et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ colonne quelconque.

Analyse :

Soit X une solution 1-périodique. On a $X(1) = X(0)$ et donc après résolution

$$X_0 = (\mathrm{e}^A - I_n)^{-1}(\tilde{X}(0) - \tilde{X}(1))$$

ce qui détermine entièrement la solution X.

Synthèse :

Considérons la fonction définie comme au terme de l'analyse ci-dessus. Elle est solution de l'équation (E) et vérifie $X(1) = X(0)$.

Considérons alors la fonction donnée par $Y(t) = X(t+1)$.

On vérifie que Y est encore solution de (E) (car la fonction B est périodique) et puisque $Y(0) = X(1) = X(0)$, les fonctions X et Y sont égales car solutions d'un même problème de Cauchy.

Finalement, la fonction X est périodique.

Exercice 15 : [énoncé]

Soit (x, y) solution sur $\mathbb{R}$.

On pose $z = x + iy$, on a $z'(t) = \mathrm{e}^{-it} z(t)$ donc $z(t) = C\mathrm{e}^{i\mathrm{e}^{-it}} = C\mathrm{e}^{i\cos t + \sin t}$ avec $C \in \mathbb{C}$.

En écrivant $C = A + iB$ avec $A, B \in \mathbb{R}$ on peut conclure

$$x(t) = \mathrm{e}^{\sin(t)}(A\cos(\cos(t)) - B\sin(\cos(t)))$$

et

$$y(t) = \mathrm{e}^{\sin(t)}(B\cos(\cos(t)) + A\sin(\cos(t)))$$

Vérification : il suffit de remonter les calculs.

Exercice 16 : [énoncé]

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène défini sur $\mathbb{R}$ d'équation matricielle $X' = A(t)X$ avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$\chi_{A(t)} = X^2 - (t+1)X + t$.

$\mathrm{Sp}(A(t)) = \{1, t\}$.

Si $t \neq 1$,

$$E_1(A(t)) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_t(A(t)) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ indépendant de t, $A(t) = PD(t)P^{-1}$ avec $D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ et cette relation est aussi vraie pour $t = 1$.

En posant $Y = P^{-1}X$,

$$X' = A(t)X \Leftrightarrow Y' = D(t)Y$$

En écrivant

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

on a

$$Y' = D(t)Y \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = ty_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = \lambda e^t \\ y_2(t) = \mu e^{t^2/2} \end{cases} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Puisque

$$X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$X' = A(t)X \Leftrightarrow X(t) = \lambda \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ 2e^{t^2/2} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 17 : [énoncé]

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène défini sur $\mathbb{R}$ d'équation matricielle $X' = A(t)X$ avec

$A(t) = \begin{pmatrix} t+3 & 2 \\ -4 & t-3 \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$.

$\chi_{A(t)} = X^2 - 2tX + (t^2 - 1)$, $\mathrm{Sp}(A) = \{t+1, t-1\}$.

$E_{t+1}(A) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E_{t-1}(A) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ indépendante de t, $A(t) = PD(t)P^{-1}$ avec

$D(t) = \begin{pmatrix} t+1 & 0 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix}$.

En posant $Y = P^{-1}X$, $X' = A(t)X \Leftrightarrow Y' = D(t)Y$.

En écrivant $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$,

$$Y' = D(t)Y \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = (t+1)y_1 \\ y_2' = (t-1)y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \lambda e^{(t^2+2t)/2} \\ y_2 = \mu e^{(t^2-2t)/2} \end{cases} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$$X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$X' = A(t)X \Leftrightarrow X(t) = \lambda \begin{pmatrix} e^{(t^2+2t)/2} \\ -e^{(t^2+2t)/2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e^{(t^2-2t)/2} \\ -2e^{(t^2-2t)/2} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 18 : [énoncé]

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 défini sur $\mathbb{R}$ d'équation matricielle $X' = A(t)X + B(t)$ avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Commençons par résoudre l'équation homogène $X' = A(t)X$.

$\chi_{A(t)} = (X-1)^2$.

$E_1(A(t)) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ indépendante de t, $A(t) = PT(t)P^{-1}$ avec

$T(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En posant $Y = P^{-1}X$,

$$X' = A(t)X \Leftrightarrow Y' = T(t)Y$$

En écrivant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $Y' = T(t)Y \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 + ty_2 \\ y_2' = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \mu e^t + \frac{\lambda}{2} t^2 e^t \\ y_2 = \lambda e^t \end{cases}$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Puisque

$$X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$X' = A(t)X \Leftrightarrow X(t) = \lambda \begin{pmatrix} (t^2/2)e^t \\ (1 - t^2/2)e^t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

La famille (X_1, X_2) forme un système fondamental de solutions de l'équation homogène.

Cherchons une solution particulière.

$X(t) = \lambda(t)X_1(t) + \mu(t)X_2(t)$ avec λ et μ fonctions dérivables.

$$X' = A(t)X + B(t) \Leftrightarrow \lambda'(t) \begin{pmatrix} (t^2/2)e^t \\ (1 - t^2/2)e^t \end{pmatrix} + \mu'(t) \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

$\lambda(t) = 0$ et $\mu(t) = -t$ conviennent

$X(t) = \begin{pmatrix} -te^t \\ te^t \end{pmatrix}$ est solution particulière.

Solution générale :

$$X(t)=\lambda\begin{pmatrix}(t^2/2)\mathrm{e}^t\\(1-t^2/2)\mathrm{e}^t\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t\\-\mathrm{e}^t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-t\mathrm{e}^t\\t\mathrm{e}^t\end{pmatrix}$$

Exercice 19 : [énoncé]
C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle $X'=AX$ avec $A=\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}$ et $X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$.
$\mathrm{Sp}(A)=\{2,3\}$, $E_2(A)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $E_3(A)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.
Pour $P=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$, $A=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$
Pour $Y=P^{-1}X$, $X'=AX\Leftrightarrow Y'=DY$
$Y'=DY\Leftrightarrow Y=\begin{pmatrix}\lambda\mathrm{e}^{2t}\\\mu\mathrm{e}^{3t}\end{pmatrix}$ avec $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$.
$X'=AX\Leftrightarrow X(t)=\lambda\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}\\\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{3t}\\\mathrm{e}^{3t}\end{pmatrix}$ avec $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$.

Exercice 20 : [énoncé]
C'est un système différentiel de taille 2 linéaire à coefficients constant d'équation matricielle $X'=AX+B(t)$ avec

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}-1&3\\-2&4\end{pmatrix}\text{ et }B(t)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t\\0\end{pmatrix}$$

Equation homogène : $X'=AX$.
$\chi_A=(X-1)(X-2)$, $\mathrm{Sp}(A)=\{1,2\}$, $E_1(A)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $E_2(A)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
On a

$$A=PDP^{-1}\text{ avec }P=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}\text{ et }D=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$$

et donc

$$X'=AX\Leftrightarrow X'=PDP^{-1}X\Leftrightarrow P^{-1}X'=DP^{-1}X$$

Posons $Y=P^{-1}X$. On a $Y'=P^{-1}X'$ et donc $X'=AX\Leftrightarrow Y'=DY$.

Posons $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$.

$$Y'=DY\Leftrightarrow\begin{cases}y_1'=y_1\\y_2'=2y_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_1(t)=\lambda_1\mathrm{e}^t\\y_2(t)=\lambda_2\mathrm{e}^{2t}\end{cases}\text{ avec }\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{K}$$

$X=PY=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ donc

$$X'=AX\Leftrightarrow X(t)=\begin{pmatrix}3\lambda_1\mathrm{e}^t+\lambda_2\mathrm{e}^{2t}\\2\lambda_1\mathrm{e}^t+\lambda_2\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}3\mathrm{e}^t\\2\mathrm{e}^t\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}\\\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}$$

$X_1(t)=\begin{pmatrix}3\mathrm{e}^t\\2\mathrm{e}^t\end{pmatrix}$ et $X_2(t)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}\\\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}$ définissent un système fondamental de solutions.
Solution particulière :
$X(t)=\lambda_1(t)X_1(t)+\lambda_2(t)X_2(t)$ avec λ_1,λ_2 fonctions dérivables.

$$X'=AX+B(t)\Leftrightarrow\lambda_1'(t)X_1(t)+\lambda_2'(t)X_2(t)=B(t)$$

donc

$$X'=AX+B(t)\Leftrightarrow\begin{cases}3\lambda_1'(t)\mathrm{e}^t+\lambda_2'(t)\mathrm{e}^{2t}=\mathrm{e}^t\\2\lambda_1'(t)\mathrm{e}^t+\lambda_2'(t)\mathrm{e}^{2t}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1'(t)=1\\\lambda_2'(t)=-2\mathrm{e}^{-t}\end{cases}$$

$\lambda_1(t)=t$ et $\lambda_2(t)=2\mathrm{e}^{-t}$ conviennent
$X(t)=\begin{pmatrix}(3t+2)\mathrm{e}^t\\(2t+2)\mathrm{e}^t\end{pmatrix}$ est solution particulière.
Solution générale :

$$X(t)=\lambda_1\begin{pmatrix}3\mathrm{e}^t\\2\mathrm{e}^t\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}\\\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(3t+2)\mathrm{e}^t\\(2t+2)\mathrm{e}^t\end{pmatrix}\text{ avec }\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$$

i.e.

$$\begin{cases}x_1(t)=3\lambda_1\mathrm{e}^t+\lambda_2\mathrm{e}^{2t}+(3t+2)\mathrm{e}^t\\x_2(t)=2\lambda_1\mathrm{e}^t+\lambda_2\mathrm{e}^{2t}+(2t+2)\mathrm{e}^t\end{cases}\text{ avec }\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$$

Exercice 21 : [énoncé]
C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 d'équation matricielle
$X' = AX + B(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Sp}(A) = \{5, -3\}$, $E_5(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Pour $Y = P^{-1}X$ est solution de $Y' = DY + C(t)$ avec

$$C(t) = P^{-1}B(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{-3t} \\ -\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}$$

Après résolution, on obtient

$$Y' = DY + C(t) \Leftrightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{e}^{5t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^t - \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-3t} \\ \mu \mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}$$

puis

$$X' = AX + B(t) \Leftrightarrow X(t) = \lambda\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{5t} \\ \mathrm{e}^{5t} \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{-3t} \\ \mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3t} \\ -\frac{1}{8}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}$$

On peut aussi procéder par variation des constantes après résolution séparée de l'équation homogène.

Exercice 22 : [énoncé]
C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle
$X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2, 0\}$,

$$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ E_0(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En posant $Y = P^{-1}X$, on obtient

$$X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$$

or

$$Y' = DY \Leftrightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{e}^{-t} \\ \mu \mathrm{e}^{2t} \\ \nu \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$

donc

$$X' = AX \Leftrightarrow X(t) = \lambda\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{2t} \\ 3\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$

Exercice 23 : [énoncé]
C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle
$X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$\chi_A(X) = -X^2(X+1)$.
Après triangularisation, on a $A = PTP^{-1}$ pour

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $Y = P^{-1}X$, $X' = AX \Leftrightarrow Y' = TY$.

$$Y' = TY \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} \lambda e^{-t} \\ \mu t + \nu \\ \mu \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$

La solution générale du système est donc

$$X(t) = \lambda \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$

Exercice 24 : [énoncé]
On complète u en une base orthonormée directe : (u, v, w). En notant a, b, c les composantes de x dans cette base on parvient au système

$$\begin{cases} a' = 0 \\ b' = -c \\ c' = b \end{cases}$$

qui équivaut encore à

$$\begin{cases} a' = 0 \\ c = -b' \\ c'' + c = 0 \end{cases}$$

On conclut

$$\begin{cases} a(t) = \nu \\ b(t) = \mu \cos t - \lambda \sin t \\ c(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t \end{cases}$$

Exercice 25 : [énoncé]
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_A = -(X-2)(X^2 - X + 1)$.
La résolution complexe est alors facile puisque la matrice A est diagonalisable.
La résolution réelle est en revanche plus délicate à obtenir, détaillons-la :
$X_1 = {}^t(1, 0, -1)$ est vecteur propre de A, complétons-le avec deux vecteurs d'un plan stable.
Les plans stables s'obtiennent en étudiant les éléments propres de ${}^tA$.
$\mathrm{Sp}({}^tA) = \mathrm{Sp}A = \{2\}$ et $E_2({}^tA) = \mathrm{Vect}^t(2, 1, -1)$. Ainsi le plan d'équation $2x + y - z = 0$ est stable par ${}^tA$.
Prenons $X_2 = {}^t(0, 1, 1)$ et $X_3 = AX_2 = {}^t(-1, 2, 0)$. On vérifie $AX_3 = X_3 - X_2$.
Ainsi pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B$.
Pour $X = {}^t(x, y, z)$ et $Y = {}^t(y_1, y_2, y_3) = P^{-1}X$, on a $X' = AX \Leftrightarrow Y' = BY$.
Ceci nous conduit à la résolution suivante :

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_3' = y_2 + y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_2'' - y_2' + y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = \alpha e^{2t} \\ y_2(t) = e^{\frac{1}{2}t}(\lambda \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \mu \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ y_3(t) = -y_2'(t) \end{cases}$$

Et on peut conclure via $X = PY$.

Exercice 26 : [énoncé]
a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

convient.
b) On définit la matrice par :
```
A:=matrix(4, 4, [0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 2, -2, 2]);
```
On obtient son polynôme caractéristique factorisé par
```
factor(charpoly(A, X));
```
et ses éléments propres par
```
eigenvects(A);
```
On constate que 1 est valeur propre double mais que le sous-espace propre associé est de dimension 1. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.
c) Puisque $\chi_A = (X-1)^2(X-i)(X+i)$ est annulateur de A, il suffit d'appliquer le lemme de décomposition des noyaux.
d) Par l'étude des éléments propres précédents, on prend
$C_1 = {}^t\begin{pmatrix} -1 & -i & 1 & i \end{pmatrix}$, $C_2 = {}^t\begin{pmatrix} -1 & i & 1 & -i \end{pmatrix}$ et $C_3 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ vecteurs propres associées aux valeurs propres $i, -i$ et 1.
On détermine enfin une colonne C_4 vérifiant $AC_4 = C_4 + C_3$.
```
linsolve(A-diag(1, 1, 1, 1), vector([1, 1, 1, 1]));
```
On choisit parmi les solutions $C_4 = {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Finalement pour

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -i & i & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ i & -i & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier l'exactitude

```
P:=matrix(4, 4, [-1, -1, 1, 0, -I, I, 1, 1, 1, 1, 1, 2, I, -I, 1,
3]);
B:=evalm(inverse(P)&*A&*P);
```

e) Les solutions de l'équation $X' = AX$ sont les fonctions $X(t) = \exp(tA)X(0)$.
$\exp(tA) = P^{-1}\exp(tB)P$ permet le calcul de$\exp(tA)$.
Sachant

$$B^n = \begin{pmatrix} i^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a

$$\exp(tB) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{itb} & 0 & 0 & \\ 0 & \mathrm{e}^{-itb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

On achève le calcul de $\exp(tA)$ avec Maple

```
evalm(P&*matrix(4, 4, [exp(I*t), 0, 0, 0, 0, exp(-I*t), 0, 0, 0, 0,
exp(t), t*exp(t), 0, 0, 0, exp(t)])&*P^(-1));
```

Puis on détermine X

```
X:=evalm(%&*vector([x(0), D(x)(0), D(D(x))(0), (D@@3)(x)(0)]));
```

et enfin $x(t)$

```
X[1];
```

Exercice 27 : [énoncé]
$(t^2+1)y'' - 2y = 0$. $y_1(t) = t^2 + 1$ est solution sur $\mathbb{R}$.
Méthode de Lagrange : Cherchons une solution $y_2(t) = \lambda(t)y_1(t)$.
On obtient $\lambda''(t) + \frac{4t}{t^2+1}\lambda'(t) = 0$ qui donne $\lambda'(t) = \frac{C}{(t^2+1)^2}$.
$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\arctan t + \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + C$ et $\lambda(t) = \arctan t + \frac{t}{t^2+1}$ convient ce qui donne $y_2(t) = (t^2+1)\arctan t + t$.
Ainsi $\mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto \lambda(t^2+1) + \mu((t^2+1)\arctan t + t)/\lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$.
$y(t) = -\frac{1}{2}t$ est solution particulière donc
$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto \lambda(t^2+1) + \mu((t^2+1)\arctan t + t) - \frac{1}{2}t/\lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$

Exercice 28 : [énoncé]
Si y est un polynôme unitaire de degré n solution de l'équation homogène, le coefficient de t^{n+2} dans le premier membre de l'équation est :

$$n(n-1) - 2n + 2 = n^2 - 3n + 2 = (n-2)(n-1)$$

et donc nécessairement $n \leqslant 2$.
Pour $y(t) = at^2 + bt + c$, le premier membre de l'équation devient :

$$2a(1+t^2)^2 - 2t(2at+b)(1+t^2) + 2(t^2-1)(at^2+bt+c) = (2c-2a)t^2 - 4bt + (2a-2c)$$

d'où $a = c$ et $b = 0$
Finalement $y_1(t) = t^2 + 1$ est solution particulière.
En vertu de la méthode de Lagrange, résolvons l'équation complète en procédant au changement de fonction inconnue

$$y(t) = \lambda(t)y_1(t)$$

Soient $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\lambda(t) = \frac{y(t)}{1+t^2}$$

de sorte que $y(t) = \lambda(t)y_1(t)$. La fonction λ est deux fois dérivable.
Après calculs, on obtient que y est solution de l'équation différentielle étudiée si, et seulement si,

$$(1+t^2)^3\lambda''(t) + t(1+t^2)^2\lambda'(t) = (1+t^2)$$

Après résolution de cette équation d'ordre 1 en l'inconnue λ', on obtient

$$\lambda'(t) = \frac{\lambda + \arctan t}{(1+t^2)}$$

puis

$$\lambda(t) = \mu + \lambda\arctan t + \frac{1}{2}(\arctan t)^2$$

Finalement la solution générale de l'équation étudiée est

$$y(t) = \lambda(1+t^2)\arctan t + \mu(1+t^2) + \frac{1}{2}(1+t^2)(\arctan t)^2$$

Exercice 29 : [énoncé]
En recherchant les fonctions polynomiales solutions on obtient : $y(t) = t$ solution particulière.
On pose $y(t) = tz(t)$ et on parvient à l'équation

$$t^4 z'' + t^2(2t+1)z' = 0$$

$z(t) = \mathrm{e}^{1/t}$ puis $y(t) = t\mathrm{e}^{1/t}$ conviennent.
Solution générale

$$y(t) = \lambda t\mathrm{e}^{1/t} + \mu t$$

Exercice 30 : [énoncé]
Solution particulière $y(t) = -1$.
Résolvons l'équation homogène $t^2y'' + ty' - y = 0$.
En recherchant les fonctions polynomiales solutions on obtient : $y(t) = t$ solution particulière.
On pose $y(t) = tz(t)$ et on parvient à l'équation $t^3z'' + 3t^2z' = 0$.
$z(t) = \frac{1}{t^2}$ puis $y(t) = \frac{1}{t}$ conviennent.
Solution générale homogène : $y(t) = \frac{\lambda}{t} + \mu t$
Solution générale : $y(t) = \frac{\lambda}{t} + \mu t - 1$

Exercice 31 : [énoncé]
Soit y la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R supposé > 0.

$$x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2(a_{n+1} - a_n)x^n$$

On en déduit $y(x) = \frac{1}{1-x}$ solution de l'équation étudiée.
On pose ensuite $y(x) = \frac{z(x)}{1-x}$ avec z deux fois dérivable.
On obtient

$$xz'' + z' = 0$$

$z(x) = \ln(x)$ puis $y(x) = \frac{\ln x}{1-x}$ conviennent.
Solution générale sur $]0,1[$

$$y(x) = \frac{\lambda \ln(x) + \mu}{1-x}$$

Exercice 32 : [énoncé]
Soit y la somme de la série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence R supposé > 0.
$4(1-t^2)y''(t) - 4ty'(t) + y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(4(n+2)(n+1)a_{n+2} - (4n^2-1)a_n\right) t^n$ donc y est solution de l'équation étudiée si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{(n-1/2)(n+1/2)}{(n+1)(n+2)} a_n$$

donc $a_{2p} = \binom{1/2}{2p} a_0$ et $a_{2p+1} = \binom{1/2}{2p+1} a_1$.
Or personne, oh non personne, n'ignore que

$$\sqrt{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} t^n \text{ et } \sqrt{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n} t^n$$

avec un rayon de convergence égal à 1.
En prenant $a_0 = a_1 = 1$, on obtient la fonction $t \mapsto \sqrt{1+t}$.
En prenant $a_0 = 1$ et $a_1 = -1$, on obtient $t \mapsto \sqrt{1-t}$.
Ces deux fonctions sont solutions de l'équation étudiée (car $R = 1$) et, étant indépendantes, elles constituent un système fondamental de solutions. La solution générale s'exprime

$$y(t) = \lambda\sqrt{1+t} + \mu\sqrt{1-t}$$

Exercice 33 : [énoncé]
a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme y_1 sur $]-R,R[$.
Pour tout $x \in]-R,R[$, on a

$$xy''(x) + 3y'(x) - 4x^3y(x) = 3a_1 + 8a_2x + 21a_3x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \left((n+1)(n+3)a_{n+1} - 4a_{n-3}\right) x^n$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on peut affirmer que y est solution de E sur $]-R,R[$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = 0 \\ \forall n \geqslant 3, a_{n+1} = \dfrac{4}{(n+1)(n+3)} a_{n-3} \end{cases}$$

Posons $a_0 = 1$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $a_{4p} = \frac{1}{2p(2p+1)} a_{4(p-1)}$, les autres a_n nuls.

Ainsi

$$a_{4p} = \frac{1}{(2p+1)!}, a_{4p+1} = a_{4p+2} = a_{4p+3} = 0$$

La série entière correspondante est de rayon de convergence $R = +\infty$ et sa somme

$$y_1 : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4p}}{(2p+1)!}$$

est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle E en vertu des calculs qui précèdent.
Pour $x \neq 0$,

$$y_1(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^{2p+1}}{(2p+1)!} = \frac{\mathrm{sh}(x^2)}{x^2}$$

b) En vertu de la méthode de Lagrange, on recherche y_2 de la forme

$$y_2(x) = \lambda(x) y_1(x)$$

avec λ fonction deux fois dérivable non constante.
Par calculs, on obtient que y_2 est solution de l'équation différentielle E si, et seulement si,

$$\lambda''(x) = \left(\frac{1}{x} - 4x\frac{\mathrm{ch}(x^2)}{\mathrm{sh}(x^2)}\right)\lambda'(x)$$

Après résolution

$$\lambda'(x) = \frac{x}{\mathrm{sh}^2(x^2)} \text{ convient}$$

puis

$$\lambda(x) = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{ch}(x^2)}{\mathrm{sh}(x^2)} \text{ convient}$$

Finalement

$$y_2(x) = -\frac{\mathrm{ch}(x^2)}{2x^2}$$

est aussi une solution de E sur $]0,+\infty[$ et celle-ci n'est pas colinéaire à la précédente.
En jouant avec les facteurs multiplicatifs, on peut aussi prendre, et c'est plus élégant,

$$y_2(x) = \frac{\mathrm{ch}(x^2)}{x^2}$$

c) E est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène résolue en y'' sur $]0,+\infty[$.
Les solutions indépendantes y_1 et y_2 forment donc un système fondamental de solutions permettant d'exprimer la solution générale de E

$$y(x) = \frac{\lambda_1 \mathrm{sh}(x^2) + \lambda_2 \mathrm{ch}(x^2)}{x^2}$$

Exercice 34 : [énoncé]
a) Analyse : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S.
La fonction S est solution sur $]-R,R[$ de l'équation différentielle
Sur $]-R,R[$,

$$S''(x) + 2xS'(x) + 2S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(n+1)a_n)x^n$$

Par conséquent, S est solution de l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + 2y = 0$$

si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{-2}{n+2} a_n$$

ce qui donne

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{p!} a_0 \text{ et } a_{2p+1} = \frac{(-1)^p 2^p}{(2p+1)\dots 3} a_1 = \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!} a_1$$

Synthèse : Soit $\sum a_n x^n$ la série entière déterminée par les coefficients précédemment proposés.
Une telle série entière est de rayon de convergence $R = +\infty$ car $a_{2p} = O(1/p!)$ et $a_{2p+1} = O(4^p/p!)$.
De plus par les calculs ci-dessus elle est solution de l'équation différentielle proposée sur $\mathbb{R}$.
b) Les solutions paires sont obtenue pour $a_{2p+1} = 0$. Cela donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = a_0 \mathrm{e}^{-x^2}$$

Exercice 35 : [énoncé]
a) Soit $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ une série entière solution de rayon de convergence $R > 0$.

Sur $]-R,R[$, la fonction y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n,\ y'(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}na_nt^{n-1} \text{ et } y''(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}$$

de sorte que

$$(1+t^2)y''(t)+4t\,y'(t)+2y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)(a_{n+2}+a_n)t^n$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction y est solution de l'équation étudiée sur $]-R,R[$ si, et seulement si,

$$\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+2}=-a_n$$

ce qui donne

$$\forall p\in\mathbb{N}, a_{2p}=(-1)^pa_0 \text{ et } a_{2p+1}=(-1)^pa_1$$

et on obtient

$$y(t)=a_0\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^pt^{2p}+a_1\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^pt^{2p+1}=\frac{a_0+a_1t}{1+t^2}$$

Puisque la série entière écrite est de rayon de convergence $R\geqslant 1$, on peut assurer que les fonctions proposées sont solutions sur $]-1,1[$ à l'équation étudiée. Cela fournit un système fondamental de solutions sur $]-1,1[$ qu'il suffit de réinjecter dans l'équation pour affirmer que ces fonctions forment aussi un système fondamental de solution sur $\mathbb{R}$.
Puisque l'espace des solutions de cette équation homogène est de dimension 2, on peut conclure que la solution générale est

$$y(t)=\frac{\lambda+\mu t}{1+t^2}$$

b) La méthode de variation des constantes nous amène à recherche une solution particulière

$$y(t)=\frac{\lambda(t)+\mu(t)t}{1+t^2}$$

avec λ et μ fonctions dérivables solution du système

$$\begin{cases}\dfrac{\lambda'(t)}{1+t^2}+\dfrac{\mu'(t)t}{1+t^2}=0\\ -\dfrac{2t\lambda'(t)}{(1+t^2)^2}+\dfrac{\mu'(t)(1-t^2)}{(1+t^2)^2}=\dfrac{1}{(1+t^2)^2}\end{cases}$$

On obtient $\lambda'(t)=-\frac{t}{1+t^2}$ et $\mu'(t)=\frac{1}{1+t^2}$ puis

$$y(t)=\frac{t\arctan t-\ln\sqrt{1+t^2}}{1+t^2}$$

Cette solution particulière permet ensuite d'exprimer la solution générale.

Exercice 36 : [énoncé]
a) Si $n=1$ alors l'équation a pour solution générale

$$y(t)=A\cos t+B\sin t+\frac{1}{2}t\sin t$$

Si $n\neq 1$ alors l'équation a pour solution générale

$$y(t)=A\cos t+B\sin t+\frac{1}{1-n^2}\cos(nt)$$

b) Soit

$$f(t)=a_0+\frac{a_1}{2}t\sin t+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{a_n}{1-n^2}\cos(nt)$$

Sans difficultés, on peut dériver deux fois sous le signe somme car il y a convergence normale de la série des dérivées secondes et convergence simple intermédiaire. On peut alors conclure que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et solution de l'équation différentielle étudiée. La solution générale de celle-ci est alors

$$y(t)=A\cos t+B\sin t+f(t)$$

Exercice 37 : [énoncé]
L'espace des solutions est de dimension 2. $y(x)=x$ est solution immédiate. Par la méthode de Lagrange (et quelques déterminations de primitives non triviales) on obtient aussi $y(x)=\sqrt{x^2+1}$ ce qui fournit un système fondamental de solutions

Exercice 38 : [énoncé]
Soit f une fonction solution. f est dérivable et

$$f'(x)=f(1/x)$$

donc f' est encore dérivable. La fonction f est donc deux fois dérivable avec

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}f'(1/x)=-\frac{1}{x^2}f(x)$$

La fonction f apparaît alors comme étant solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de l'équation différentielle
$$E : x^2y'' + y = 0$$
E est une équation différentielle d'Euler. Réalisons le changement de variable $t = \ln x$.
Soient $y : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$z(t) = y(\mathrm{e}^t)$$
z est deux fois dérivable et
$$y(x) = z(\ln x)$$
$$y'(x) = \frac{1}{x}z'(\ln x)$$
$$y''(x) = -\frac{1}{x^2}z'(\ln x) + \frac{1}{x^2}z''(\ln x)$$
y est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de E si, et seulement si, z est solution sur $\mathbb{R}$ de
$$F : z'' - z' + z = 0$$
F est un équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants homogène de solution générale
$$z(x) = \left(\lambda \cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + \mu \sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\mathrm{e}^{x/2}$$
La solution générale de E sur $\mathbb{R}^{+\star}$ est donc
$$y(x) = \sqrt{x}\left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}\ln x}{2} + \mu\sin\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)$$
Revenons à la fonction f. Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que
$$f(x) = \sqrt{x}\left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}\ln x}{2} + \mu\sin\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)$$
On a alors
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left((\lambda + \mu\sqrt{3})\cos\frac{\sqrt{3}\ln x}{2} + (\mu - \lambda\sqrt{3})\sin\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)$$
et donc
$$f'(x) = f(1/x) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu\sqrt{3} = 2\lambda \\ \lambda\sqrt{3} - \mu = 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu\sqrt{3}$$
Finalement, les solutions sont les fonctions f données par
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Exercice 39 : [énoncé]
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En résolvant sur I l'équation différentielle
$$xy'(x) = \lambda y(x)$$
on obtient que $x \mapsto x^\lambda$ est une fonction propre de l'application φ. Pour une telle fonction, on a
$$xy'(x) = \lambda y(x)$$
donc en dérivant
$$xy''(x) + y'(x) - \lambda y'(x) = 0$$
puis
$$x^2y''(x) + xy'(x) - \lambda^2 y(x) = 0$$
On en déduit que les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto x^{-\alpha}$ sont solutions sur I de l'équation différentielle E_α. Or cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène résolue en y'', son ensemble solution est donc un plan vectoriel. Puisque les deux précédentes fonctions sont des solutions indépendantes, elles constituent une base de ce plan vectoriel.
La solution générale de E_α est donc
$$y(x) = \lambda x^\alpha + \mu x^{-\alpha} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 40 : [énoncé]
Soit $\sum a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme y sur $]-R, R[$
Pour tout $x \in]-R, R[$, on a
$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} n^2(a_{n+1} - a_n)x^n$$
La fonction y est donc solution de l'équation différentielle étudiée si, et seulement si,
$$a_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^\star, a_{n+1} = a_n$$
Inversement, en considérant la fonction $y : x \mapsto \frac{x}{1-x}$, on obtient une fonction développable en série entière avec un rayon de convergence $R = 1$ et les calculs qui précèdent assure que y est solution sur $]-1, 1[$ de l'équation étudiée.

Déterminons ensuire une solution linéairement indépendante de la forme

$$z(x) = \frac{x\lambda(x)}{1-x} \text{ avec } \lambda \text{ fonction deux fois dérivable}$$

Après calculs, la fonction z est solution de l'équation étudiée si, et seulement si,

$$x\lambda''(x) + \lambda'(x) = 0$$

$\lambda'(x) = 1/x$ puis $\lambda(x) = \ln x$ conviennent.
Ainsi $x \mapsto \frac{x\ln x}{1-x}$ est une solution linéairement indépendante de la précédente.
Enfin puisque l'équation étudiée est linéaire d'ordre 2 et que le facteur devant y'' ne s'annule pas, on dispose d'un système fondamental de solution permettant d'exprimer la solution générale :

$$y(x) = \frac{(\lambda + \mu\ln x)x}{1-x}$$

Exercice 41 : [énoncé]
Les éléments de E sont les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + y = \alpha\cos(x) \text{ vérifiant } y(0) = \alpha$$

L'équation différentielle est linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
La fonction $x \mapsto \frac{\alpha}{2}x\sin x$ est solution particulière et la solution générale est

$$y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \frac{\alpha}{2}x\sin x$$

Les solutions vérifiant la condition $y(0) = \alpha$ sont les fonctions données par

$$y(x) = \alpha\left(\cos x + \frac{1}{2}x\sin x\right) + \mu\sin x$$

On en déduit que l'espace E est de dimension 2.

Exercice 42 : [énoncé]
Soit $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $z :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$z(x) = x^{-\alpha}y(x)$$

La fonction z est deux fois dérivable et

$$y'(x) = x^\alpha z'(x) + \alpha x^{\alpha-1}z(x),\ y''(x) = x^\alpha z''(x) + 2\alpha x^{\alpha-1}z'(x) + \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}z(x)$$

donc

$$xy''(x)+2y'(x)-xy(x) = x^{\alpha+1}z''(x)+2(\alpha+1)x^\alpha z'(x)+\left(\alpha(\alpha+1)x^{\alpha-1} - x^{\alpha+1}\right)z(x)$$

Pour $\alpha = -1$, on obtient

$$xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = z''(x) - z(x)$$

et donc y est solution de l'équation étudiée si, et seulement si,

$$z(x) = \lambda\mathrm{ch}x + \mu\mathrm{sh}x$$

ce qui donne la solution générale

$$y(x) = \frac{\lambda\mathrm{ch}x + \mu\mathrm{sh}x}{x}$$

Exercice 43 : [énoncé]
L'équation étudiée est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 définie sur $]-1, 1[$ d'équation homogène

$$(1-x^2)y'' - 3xy' - y = 0$$

On vérifie par le calcul que la fonction

$$\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

est solution de cette équation homogène avec

$$\varphi'(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} \text{ et } \varphi''(x) = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}}$$

Puisque la fonction φ ne s'annule pas, on est invité à mettre en place la méthode de Lagrange. On réalise donc le changement de fonction inconnue $y(x) = \varphi(x)z(x)$.
Soit y une fonction deux fois dérivable définie sur $]-1, 1[$ et z la fonction définie sur $]-1, 1[$ de sorte que $y = \varphi z$. La fonction z est deux fois dérivable et

$$y' = \varphi' z + \varphi z',\ y'' = \varphi'' z + 2\varphi' z' + \varphi z''$$

Puisque la fonction φ est solution de l'équation homogène, la fonction y est solution de l'équation étudiée si, et seulement si,

$$(1-x^2)\varphi(x)z'' + \left(2(1-x^2)\varphi'(x) - 3x\varphi(x)\right)z' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ceci donne l'équation
$$(1-x^2)z''-xz'(x)=x$$
En intégrant une première fois, on obtient la solution
$$z'(x)=\frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}-1$$
puis en intégrant à nouveau
$$z(x)=\lambda\arcsin x+\mu-x$$
Finalement, la solution générale de l'équation étudiée est
$$y(x)=\frac{\lambda\arcsin x+\mu-x}{\sqrt{1-x^2}}\text{ avec }\lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

Exercice 44 : [énoncé]
Soient $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un $\mathcal{C}^2$ difféomorphisme.
Posons $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie de sorte que $y(u)=x(t)$ i.e. $y(u)=x(\varphi^{-1}(u))$.
La fonction y est deux fois dérivable et pour tout $t\in\mathbb{R}$, $x(t)=y(\varphi(t))$.
On a alors $x'(t)=\varphi'(t)y'(\varphi(t))$ et $x''(t)=(\varphi'(t))^2y''(\varphi(t))+\varphi''(t)y'(\varphi(t))$.
Par suite
$$(1+t^2)x''(t)+tx'(t)+a^2x(t)=(1+t^2)\varphi'(t)^2y''(\varphi(t))+\left((1+t^2)\varphi''(t)+t\varphi'(t)\right)y'(\varphi(t))+a^2y(\varphi(t))$$
Pour $\varphi(t)=\operatorname{argsh}t$, $\varphi'(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $(1+t^2)\varphi''(t)+t\varphi'(t)=0$ de sorte que
$$(1+t^2)x''(t)+tx'(t)+a^2x(t)=0\Leftrightarrow y''(\varphi(t))+a^2y(\varphi(t))=0$$
Cela nous amène à résoudre l'équation
$$y''(u)+a^2y(u)=0$$
Si $a\neq 0$, la solution générale de $y''(u)+a^2y(u)=0$ est
$y(u)=\lambda\cos(au)+\mu\sin(au)$ et la solution générale de $(1+t^2)x''+tx'+a^2x=0$ est
$$x(t)=\lambda\cos(a\operatorname{argsh}t)+\mu\sin(a\operatorname{argsh}t)\text{ avec }\lambda,\mu\in\mathbb{R}$$
Si $a=0$, on parvient à
$$x(t)=\lambda+\mu\operatorname{argsh}t\text{ avec }\lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

Exercice 45 : [énoncé]
$P=(x+1)X-1$ convient.
$$(E)\Leftrightarrow(x+1)z'-z=(3x+2)\mathrm{e}^{3x}$$
Après résolution avec recollement la solution générale de cette dernière équation est $z(x)=\lambda(x+1)+\mathrm{e}^{3x}$.
$$(E)\Leftrightarrow y'-3y=\lambda(x+1)+\mathrm{e}^{3x}$$
La solution générale est
$$y(x)=\lambda'(3x+4)+\mu\mathrm{e}^{3x}+x\mathrm{e}^{3x}$$

Exercice 46 : [énoncé]
a) Par analyse synthèse, on obtient
$$h(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}x^n$$
de rayon de convergence $R=+\infty$.
b) $h(0)=1$ et par application du critère spécial des séries alternées à la série
$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}2^n$$
on obtient
$$-2<\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}2^n<-1$$
et donc $h(2)<0$. On en déduit que h s'annule sur $]0,2[$.
La fonction h est dérivable et
$$h'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n-1)!}x^{n-1}$$
On peut à nouveau appliquer le critère spécial des séries alternées à cette série pour tout $x\in]0,2[$ et on en déduit $h'(x)<0$.

Exercice 47 : [énoncé]
Par l'absurde :
S'il existe y une solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + p(x)y = 0$ qui ne s'annule pas.
Deux cas sont possibles : y est positive ou y est négative.
Si y est positive alors $y'' \leqslant 0$.
La fonction y est donc concave et sa courbe représentative est en dessous de chacune de ses tangentes.
Si y possède une tangente de pente non nulle, y prend des valeurs négatives, exclu.
Par suite y est nécessairement constante et alors $y'' = 0$ puis $p(x)y(x) = 0$ implique que y est constante égale à 0. Absurde.
Si y est négative, le même raisonnement permet de conclure.

Exercice 48 : [énoncé]
Par l'absurde, si f admet une infinité de zéros, on peut construire une suite (x_n) formée de zéros de f deux à deux distincts. Puisque $[a, b]$ est compact, on peut extraire de cette suite (x_n), une suite convergente que nous noterons encore (x_n).
Soit c la limite de (x_n). Par continuité, on a $f(c) = 0$.
En appliquant le théorème de Rolle à f entre x_n et x_{n+1}, on détermine c_n compris entre x_n etx_{n+1} tel que $f'(c_n) = 0$. Par encadrement, $c_n \to c$ et par continuité $f'(c) = 0$.
Le problème de Cauchy linéaire formé par l'équation (E) et les conditions initiales

$$y(c) = 0 \text{ et } y'(c) = 0$$

possède une unique solution qui est la fonction nulle.
La fonction f est donc nulle : c'est absurde.

Exercice 49 : [énoncé]
a) Par l'absurde supposons que g possède un zéro non isolé a. Il existe alors une suite (x_n) de zéros de g distincts de a convergeant vers a. Puisque $g(x_n) = 0$, à la limite $g(a) = 0$. Puisque

$$g'(a) = \lim_{x \to a, x \neq a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

on a aussi

$$g'(a) = \lim_{n \to +\infty} \frac{g(x_n) - g(a)}{x_n - a} = 0$$

Ainsi $g(a) = g'(a) = 0$ et donc g est la fonction nulle car cette dernière est l'unique solution de l'équation linéaire d'ordre 2 E vérifiant les conditions initiales $y(a) = y'(a) = 0$.

b) Posons

$$\varphi(x) = (x_2 - x)\int_{x_1}^{x} (t - x_1)f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + (x - x_1)\int_{x}^{x_2} (x_2 - t)f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction φ est dérivable et

$$\varphi'(x) = -\int_{x_1}^{x} (t - x_1)f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{x_2} (x_2 - t)f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction φ est donc deux fois dérivable et

$$\varphi''(x) = (x_1 - x_2)f(x)g(x)$$

Puisque g est solution de l'équation E, on obtient

$$\varphi''(x) = (x_2 - x_1)g''(x)$$

et donc

$$\varphi(x) = (x_2 - x_1)g(x) + \alpha x + \beta$$

Or les fonctions φ et g s'annulent toutes deux en x_1 etx_2 donc $\alpha = \beta = 0$ puis

$$\varphi(x) = (x_2 - x_1)g(x)$$

c) Soit $\alpha = \max\limits_{[x_1, x_2]} |g| \neq 0$. Pour x tel que $|g(x)| = \alpha$, la relation précédente donne

$$\alpha(x_2 - x_1) \leqslant (x_2 - x)\left|\int_{x_1}^{x} (t - x_1)f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| + (x - x_1)\left|\int_{x}^{x_2} (x_2 - t)f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

puis

$$\alpha(x_2 - x_1) \leqslant \alpha(x_2 - x)(x - x_1)\int_{x_1}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \alpha(x_2 - x)(x - x_1)\int_{x}^{x_2} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \alpha(x_2 - x)(x - x_1$$

On en déduit

$$\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{4}{x_2 - x_1}$$

car

$$(x_2 - x)(x - x_1) \leqslant \frac{(x_2 - x_1)^2}{4}$$

Exercice 50 : [énoncé]
a) Puisque f n'est pas la fonction nulle, on peut affirmer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

$$(f(t), f'(t)) \neq (0,0)$$

En effet, seule la fonction nulle est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y(t_0) = y'(t_0) = 0 \\ y'' + qy = 0 \end{cases}$$

Posons alors $p(t) = \sqrt{f(t)^2 + f'(t)^2}$ ce qui définit une fonction $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs strictement positives.
Puisque $t \mapsto \left(\frac{f(t)}{p(t)}, \frac{f'(t)}{p(t)}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et prend ses valeurs dans le cercle unité, on peut alors affirmer par le théorème de relèvement qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\frac{f(t)}{p(t)} = \cos g(t) \text{ et } \frac{f'(t)}{p(t)} = \sin g(t)$$

b) D'une part $f' = p \sin g$ et d'autre part $f' = (p \cos g)' = p' \cos g - g' p \sin g$.
De même $f'' = p' \sin g + g' p \cos g$ et $f'' = -qf = -qp \cos g$.
On en déduit le système

$$\begin{cases} p' \cos g - g' p \sin g = p \sin g \\ p' \sin g + g' p \cos g = -qp \cos g \end{cases}$$

Par combinaison d'équations, on obtient

$$g'p = -qp \cos^2 g - p \sin^2 g$$

puis

$$g' = -q \cos^2 g - \sin^2 g$$

c) Puisque la dérivée de g est strictement négative, on peut affirmer que g réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme décroissant de $\mathbb{R}^+$ vers $g(\mathbb{R}^+)$.
d) Puisque $q(t) \geqslant m$, on a

$$-g'(t) \geqslant m \cos^2 g + \sin^2 g \geqslant \min(m, 1) = \mu$$

puis

$$g(t) \leqslant -\mu t + g(0)$$

On en déduit que g tend vers $-\infty$ quand t croît vers $+\infty$ et par suite

$$g(\mathbb{R}^+) = \left]-\infty, g(0)\right]$$

Il existe donc une infinité de valeurs de t telles que

$$g(t) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

et pour ses valeurs $f(t) = 0$.

Exercice 51 : [énoncé]
Soit y une solution de l'équation étudiée possédant une infinité de racines.
Nous allons montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ vérifiant $y(a) = y'(a) = 0$.
Il est possible de former une suite (x_n) de racines deux à deux distinctes de la fonction y. Puisque la suite (x_n) est une suite d'éléments du compact $[0,1]$, elle possède une suite extraite convergente que nous noterons encore (x_n). Ainsi on obtient une suite d'éléments deux à deux distincts de $[0,1]$ vérifiant

$$x_n \to a \in [0,1]\,, \forall n \in \mathbb{N}, y(x_n) = 0$$

Par continuité de la fonction y, on obtient $y(a) = 0$.
Par application du théorème de Rolle entre x_n et x_{n+1} (qui sont distincts) il existe c_n compris entre x_n et x_{n+1} vérifiant $y'(c_n) = 0$. Par encadrement $c_n \to a$ et par continuité de y', on obtient $y'(a) = 0$.
Finalement y apparaît comme solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(a) = y'(a) = 0 \end{cases}$$

Or la fonction nulle est aussi évidemment solution.
Par unicité de la solution sur $[0,1]$ à ce problème de Cauchy, on peut conclure que y est la fonction nulle.

Exercice 52 : [énoncé]
a) Si φ_1 possède une solution non isolée x_0 alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de zéros de φ_1 deux à deux distincts convergeant vers x_0. En appliquant le théorème de Rolle entre les deux termes distincts x_n et x_{n+1}, on détermine une suite (c_n) convergeant vers x_0 formée de zéros de φ_1'. En passant la relation $\varphi'(c_n) = 0$ à la limite on obtient $\varphi'(x_0) = 0$. Ainsi φ_1 se comprend comme la solution du problème de Cauchy constitué de l'équation différentielle $y'' + q_1(x) = 0$ et des conditions initiales $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Or ce problème de Cauchy possède une solution unique et celle-ci est la fonction nulle, cas que l'énoncé exclut.
b) On suppose les zéros de a et b consécutifs donc φ_1 est de signe constant sur $[a, b]$.

Quitte à considérer $-\varphi_1$ on peut supposer $\varphi_1 \geqslant 0$ sur $[a,b]$ et, sachant $\varphi_1'(a), \varphi_1'(b) \neq 0$ car φ_1 est non identiquement nulle, on a $\varphi_1'(a) > 0$ et $\varphi_1'(b) < 0$.
Si φ_2 n'est pas de signe constant sur $[a,b]$ alors, par le théorème de valeurs intermédiaires, φ_2 s'annule sur $]a,b[$.
Si en revanche φ_2 est de signe constant sur $[a,b]$ alors, quitte à considérer $-\varphi_2$, on peut supposer $\varphi_2 \geqslant 0$ sur $[a,b]$ afin de fixer les idées. Considérons alors la fonction donnée par

$$w(t) = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_2(t)\varphi_1'(t)$$

La fonction w est décroissante car

$$w'(t) = \varphi_1(t)\varphi_2''(t) - \varphi_2(t)\varphi_1''(t) = (q_1(t) - q_2(t))\varphi_1(t)\varphi_2(t) \leqslant 0$$

Or $w(a) = -\varphi_2(a)\varphi_1'(a) \leqslant 0$ et $w(b) = -\varphi_2(b)\varphi_1'(b) \geqslant 0$ donc nécessairement $\varphi_2(a) = \varphi_2(b) = 0$.
c) Il suffit d'appliquer ce qui précède à $q_1(x) = 1$ et $q_2(x) = \mathrm{e}^x$ sur $I = \mathbb{R}^+$ sachant que $\varphi_1(x) = \sin(x-a)$ est solution de l'équation $y'' + y = 0$ et s'annule en a et $a + \pi$.

Exercice 53 : [énoncé]
a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t = f'(0) - \int_0^x q(t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque la fonction q est intégrable sur $[0,+\infty[$ et puisque f est bornée, on peut affirmer que la fonction qf est intégrable sur $[0,+\infty[$. Par suite l'intégrale de l'expression précédente de $f'(x)$ converge quand $x \to +\infty$. On en déduit que f' converge en $+\infty$.
Posons ℓ sa limite.
Si $\ell > 0$ alors il existe A assez grand tel que pour tout $x \geqslant A$ on a $f'(x) \geqslant \ell/2$.
On a alors

$$f(x) = f(A) + \int_A^x f'(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(A) + \frac{\ell}{2}(x - A) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

ce qui contredit l'hypothèse f bornée.
De même, $\ell < 0$ est absurde et il reste donc $\ell = 0$.
b) En dérivant

$$w' = f''g + f'g' - f'g' - f''g = 0$$

car f et g sont solutions de E.
On en déduit que le wronskien w est constant et puisque les fonctions f et g sont bornées, leurs dérivées f' et g' convergent vers 0 en $+\infty$ et donc $w \xrightarrow[+\infty]{} 0$.
Ainsi le wronskien w est constant égal à 0 et donc les fonctions f et g sont liées.
On en déduit que l'équation différentielle E possède une solution non bornée.

Exercice 54 : [énoncé]
Par dérivation d'un déterminant

$$w'(t) = \begin{vmatrix} f_1'(t) & f_2'(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1''(t) & f_2''(t) \end{vmatrix}$$

donc

$$w'(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ -a(t)f_1'(t) - b(t)f_1(t) & -a(t)f_2'(t) - b(t)f_2(t) \end{vmatrix}$$

puis

$$w'(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ -a(t)f_1'(t) & -a(t)f_2'(t) \end{vmatrix} = -a(t)\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix}$$

Ainsi w est solution de l'équation différentielle

$$w' + a(t)w = 0$$

Exercice 55 : [énoncé]
L'équation E_0 est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène.
a) y^2 est deux fois dérivable et

$$(y^2)''(x) = 2y(x)y''(x) + 2\left(y'(x)\right)^2 = 2\mathrm{e}^x\left(y(x)\right)^2 + 2\left(y'(x)\right)^2 \geqslant 0$$

Par suite la fonction y^2 est convexe.
Si $y(0) = y(1) = 0$ alors, sachant que y^2 est convexe, le graphe de y^2 est en dessous de chacune de ses cordes et donc y^2 est nulle sur $[0,1]$. On en déduit que y est nulle sur $[0,1]$ et en particulier $y(0) = y'(0) = 0$. Or la fonction nulle est la seule solution de l'équation différentielle E_0 vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$. On en déduit que la fonction y est nulle sur $\mathbb{R}$.
b) Le wronskien en 0 des solutions y_1, y_2 est

$$w(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = y_2(0)$$

Si $y_2(0) = 0$ alors, sachant $y_2(1) = 0$, le résultat qui précède entraîne $y_2 = \tilde{0}$. Or $y_2'(1) = 1 \neq 0$. C'est impossible et donc $w(0) = y_2(0) \neq 0$.
On en déduit que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de E_0.
Notons que l'on démontre par le même argument que $y_1(1) \neq 0$.
c) Soit $\tilde{y}$ une solution particulière de l'équation E.

La solution générale de E est de la forme $y(x) = \tilde{y}(x) + \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$.
Cette solution vérifie $y(0) = y(1) = 0$ si, et seulement si,

$$\tilde{y}(0) + \lambda_2 y_2(0) = 0 \text{ et } \tilde{y}(1) + \lambda_1 y_1(1) = 0$$

Ces deux équations déterminent λ_1 et λ_2 de façon unique puisque $y_1(1), y_2(0) \neq 0$.

Exercice 56 : [énoncé]
$W(t) = \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ donc par dérivation d'une application multilinéaire

$$W'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_i'(t), \dots, \varphi_n(t))$$

puis

$$W'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \dots, a(t)\varphi_i(t), \dots, \varphi_n(t))$$

Introduisons

$$M(t) = \text{Mat}_{(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))}(a(t)) = (m_{i,j}(t))$$

On a

$$W'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \dots, \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}(t)\varphi_j(t), \dots, \varphi_n(t))$$

puis par le caractère multilinéaire alterné du déterminant

$$W'(t) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}(t) \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_i(t), \dots, \varphi_n(t)) = \text{tr}(a(t))W(t)$$

$t \mapsto W(t)$ est ainsi solution d'une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 1 dont la résolution conduit à l'expression proposée.

Exercice 57 : [énoncé]
a) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 définie sur $\mathbb{R}$. Les conditions initiales proposées déterminent alors une solution unique définie sur $\mathbb{R}$.
b) Puisque la fonction u est continue et $u(0) = 1$, la fonction u est strictement positive au voisinage de 0 et par la satisfaction de l'équation différentielle, on peut affirmer que u'' est strictement négative au voisinage de 0. La fonction u' étant alors strictement décroissante au voisinage de 0 et vérifiant $u'(0) = 0$, les existences de α et β sont assurées.
Par l'absurde, supposons que la fonction u ne s'annule par sur $\mathbb{R}^+$.
La fonction u est alors positive et u'' est négative sur $\mathbb{R}^+$. La fonction u' étant donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$\forall t \geqslant \beta, u'(t) \leqslant u'(\beta)$$

En intégrant

$$\forall x \geqslant \beta, u(x) - u(\beta) \leqslant u'(\beta)(x - \beta)$$

Or cette affirmation est incompatible avec un passage à la limite quand $x \to +\infty$.
On en déduit que u s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^+$ (et cette annulation est nécessairement sur $\mathbb{R}^{+\star}$)
De même, on justifie que u s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^{-\star}$ (et on peut même montrer que la fonction u est paire...)
c) Considérons l'ensemble

$$A = \{t > 0 / u(t) = 0\}$$

C'est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne inférieure δ.
Par la caractérisation séquentielle d'une borne inférieure, il existe une suite $(t_n) \in A^{\mathbb{N}}$, telle que

$$t_n \to \delta$$

Puisque $u(t_n) = 0$, on obtient à la limite $u(\delta) = 0$. Evidemment $\delta \geqslant 0$ et $\delta \neq 0$ donc $\delta \in A$ et ainsi δ est un minimum de A.
De même on obtient γ.
d) Grâce à l'équation différentielle

$$W' = u''v - uv'' = 0$$

Le wronskien W est donc constant mais peu importe... puisque les solutions u et v sont indépendantes, le wronskien ne s'annule pas et il est donc de signe constant.
Or

$$W(\gamma) = u'(\gamma)v(\gamma) \text{ et } W(\delta) = u'(\delta)v(\delta)$$

Puisque u est strictement positive sur $]\gamma, \delta[$, u'' est strictement négative et u' strictement décroissante sur ce même intervalle. On en déduit

$$u'(\gamma) > 0 \text{ et } u'(\delta) < 0$$

ce qui entraîne que $v(\gamma)$ et $v(\delta)$ sont de signes stricts contraires. On en déduit que v s'annule sur $]\gamma, \delta[$.
e) Plus généralement, qu'une solution de (E) soit colinéaire à u ou non, on peut affirmer que celle-ci possède un zéro dans $[\gamma, \delta]$. Or on vérifie que les fonctions w_n sont solutions de (E) et donc chacune possède au moins un zéro dans $[\gamma, \delta]$. On en déduit que la fonction w possède au moins un zéro dans chaque intervalle $[\gamma + n\pi, \delta + n\pi]$ ce qui assure l'existence d'une infinité de zéros.

Exercice 58 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 de solution homogène :
$y(t) = (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^{-2t}$.
Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme $y(t) = \lambda(t)t\mathrm{e}^{-2t} + \mu(t)\mathrm{e}^{-2t}$ avec λ, μ fonctions dérivables.

$$\begin{cases} \lambda'(t)t\mathrm{e}^{-2t} + \mu'(t)\mathrm{e}^{-2t} = 0 \\ \lambda'(t)(1-2t)\mathrm{e}^{-2t} - 2\mu'(t)\mathrm{e}^{-2t} = \dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{1+t^2} \end{cases}$$

donne

$$\begin{cases} \lambda'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \\ \mu'(t) = \dfrac{-t}{1+t^2} \end{cases}$$

$\lambda(t) = \arctan t$ et $\mu(t) = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$ conviennent.
Finalement la solution générale des l'équation étudiée est :

$$y(t) = t\arctan(t)\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\mathrm{e}^{-2t} + (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^{-2t}$$

Exercice 59 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 de solution homogène :
$y = \lambda\cos t + \mu\sin t$.
Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme $y(t) = \lambda(t)\cos(t) + \mu(t)\sin(t)$ avec λ, μ fonctions dérivables.
$\begin{cases} \lambda'(t)\cos t + \mu'(t)\sin t = 0 \\ -\lambda'(t)\sin t + \mu'(t)\cos t = \tan t \end{cases}$, $\begin{cases} \lambda'(t) = -\sin^2 t/\cos t \\ \mu'(t) = \sin t \end{cases}$,
$\lambda(t) = \int \frac{\cos^2 t - 1}{\cos t}\mathrm{d}t = \sin t - \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}$ et $\mu(t) = -\cos t$ conviennent car
$\int \frac{1}{\cos t}\mathrm{d}t = \int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}$.
Finalement la solution générale de l'équation étudiée est :
$y(t) = -\frac{1}{2}\cos t\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + \lambda\cos t + \mu\sin t$ sur $I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.

Exercice 60 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 de solution homogène :
$y = \lambda\cos t + \mu\sin t$.
Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme $y(t) = \lambda(t)\cos(t) + \mu(t)\sin(t)$ avec λ, μ fonctions dérivables.
$\begin{cases} \lambda'(t)\cos t + \mu'(t)\sin t = 0 \\ -\lambda'(t)\sin t + \mu'(t)\cos t = \tan^2 t \end{cases}$, $\begin{cases} \lambda'(t) = -\sin^3 t/\cos^2 t \\ \mu'(t) = \sin^2 t/\cos t \end{cases}$,
$\lambda(t) = -\frac{1}{\cos t} - \cos t$ et $\mu(t) = \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} - \sin t$ conviennent car
$\int \frac{1}{\cos t}\mathrm{d}t = \int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}$.
Finalement la solution générale de l'équation étudiée est :
$y(t) = -2 + \frac{1}{2}\sin t\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + \lambda\cos t + \mu\sin t$ sur $I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.

Exercice 61 : [énoncé]
a) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 de solution homogène :
$y = \lambda\cos t + \mu\sin t$.
Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme $y(t) = \lambda(t)\cos(t) + \mu(t)\sin(t)$ avec λ, μ fonctions dérivables.
$\begin{cases} \lambda'(t)\cos t + \mu'(t)\sin t = 0 \\ -\lambda'(t)\sin t + \mu'(t)\cos t = f(t) \end{cases}$,
$\cos t \times (1) - \sin t \times (2)$ donne $\lambda'(t) = -f(t)\sin t$.
$\sin t \times (1) + \cos(t) \times (2)$ donne $\mu'(t) = f(t)\cos t$.
Choisissons $\lambda(t) = \int_0^t -f(u)\sin u\,\mathrm{d}u$ et $\mu(t) = \int_0^t f(u)\cos u\,\mathrm{d}u$
ce qui donne la solution particulière :
$y(t) = \int_0^t f(u)(\sin t\cos u - \sin u\cos t)\,\mathrm{d}u = \int_0^t f(u)\sin(t-u)\,\mathrm{d}u$.
La solution générale de l'équation est
$y(t) = \int_0^t f(u)\sin(t-u)\mathrm{d}u + \lambda\cos(t) + \mu\sin(t)$.
b) $y(0) = 0$ donne $\lambda = 0$.
Avec les notations précédentes :
$y'(t) = -\lambda(t)\sin t + \mu(t)\cos t - \lambda\sin t + \mu\cos t$
donc $y'(0) = \mu(0) + \mu = \mu$ puis $\mu = 0$.
Finalement : $y(t) = \int_0^t f(u)\sin(t-u)\,\mathrm{d}u$.

Exercice 62 : [énoncé]
Posons $g = f + f''$. f est évidemment solution de l'équation différentielle

$$y'' + y = g$$

Après application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de cette équation est

$$y(x) = a\cos x + b\sin x + \int_0^x g(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Pour une telle solution,

$$y(x+\pi) + y(x) = \int_x^{x+\pi} g(t)\sin(x+\pi-t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

Ainsi f vérifie

$$f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$$

Exercice 63 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 de solution homogène :
$y = A\cos x + B\sin x$.
Méthode de variation des constantes

$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = \text{cotan} x \end{cases}$$

Après résolution et intégration

$$y(x) = -\frac{1}{2}\sin x \ln \frac{1+\cos x}{1-\cos x} + A\cos x + B\sin x$$

Exercice 64 : [énoncé]
a) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 à coefficients constants de solution homogène

$$y = A\cos x + B\sin x$$

La méthode de variation des constantes propose une solution particulière de la forme

$$y(x) = A(x)\cos x + B(x)\sin x$$

avec A et B fonctions dérivables solutions du système

$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = 1/x \end{cases}$$

En faisant $\cos(x)\times(1) - \sin(x)\times(2)$, on détermine $A'(x)$ et $B'(x)$ s'obtient de façon analogue

$$\begin{cases} A'(x) = -\sin x/x \\ B'(x) = \cos x/x \end{cases}$$

On peut alors proposer

$$A(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ et } B(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

où les intégrales introduites ont le bon goût de converger...
La solution générale de l'équation différentielle est alors

$$y(x) = A\cos x + B\sin x + \cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

b) Posons $u(x,t) = \mathrm{e}^{-tx}/(1+t^2)$ définie sur $\mathbb{R}^+\times[0,+\infty[$.
$x\mapsto u(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ pour chaque $t\in[0,+\infty[$
$t\mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ pour chaque $x\in\mathbb{R}^+$ et

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$. Par domination f est définie et continue sur $[0,+\infty[$.
De plus, $x\mapsto u(x,t)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$ pour chaque $t\in[0,+\infty[$ avec

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{-t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}$$

Pour $i=1$ ou 2,
$x\mapsto \frac{\partial^i u}{\partial x^i}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ pour chaque $t\in[0,+\infty[$
$t\mapsto \frac{\partial^i u}{\partial x^i}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ pour chaque $x\in\mathbb{R}^+$.
Soit $a>0$. Pour $x\geqslant a$, on a

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t\mathrm{e}^{-at}}{1+t^2} = \varphi_1(t) \text{ et } \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right| = \frac{t^2\mathrm{e}^{-at}}{1+t^2} = \varphi_2(t)$$

avec φ_1 et φ_2 intégrables. Par domination, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,+\infty[$. Puisque ceci vaut pour tout $a>0$, on a encore f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et de plus

$$f''(x) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

On vérifie alors

$$f''(x) + f'(x) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

de sorte que f est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

Ainsi, il existe $A,B\in\mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = A\cos x + B\sin x + \cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

On observe

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

donc par encadrement $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$ ce qui entraîne $A=B=0$.

Ainsi

$$\forall x > 0, f(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Séparément, on calcule $f(0)$

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

c) Par convergence de l'intégrale, quand $x \to 0^+$

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \to \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

De plus

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = C^{te} + \int_x^1 \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\left|\int_x^1 \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln x$$

donc

$$\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \to 0$$

Ainsi en passant à la limite en 0 l'expression précédente de $f(x)$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = f(0) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 65 : [énoncé]
Les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = f$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ car f l'est.
Par application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de l'équation $y'' + y = f$ est

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Cette solution est 2π-périodique si, et seulement si,

$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$$

i.e. $\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En développant le sinus et en exploitant la liberté de la famille $(\sin, \cos)$ ainsi que la 2π-périodicité de f, cela équivaut à la condition

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 66 : [énoncé]
Par application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de l'équation $y'' + y = f$ est

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Pour conclure, il suffit de justifier que $x \mapsto \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$ est bornée.
Par intégration par parties,

$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(0)\cos x - \int_0^x f'(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Quitte à passer à l'opposé, on peut supposer f croissante et donc $f'(t) \geqslant 0$.
Puisque $-1 \leqslant \cos(x-t) \leqslant 1$,

$$f(0) - f(x) \leqslant \int_0^x f'(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) - f(0)$$

puis

$$f(0)(1-\cos x) \leqslant \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t \leqslant 2f(x) - f(0)(1+\cos x)$$

La fonction f étant bornée (car convergente en $+\infty$), il en est de même de $x \mapsto \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 67 : [énoncé]
Soient y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z : I = \left]-\pi/2, \pi/2\right[\to \mathbb{R}$ définie par $z(x) = y(\tan x)$.
z est deux fois dérivable et $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = z(\arctan t)$.
$y'(t) = \frac{z'(\arctan t)}{1+t^2}$ et $y''(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}z'(\arctan t) + \frac{1}{(1+t^2)^2}z''(\arctan t)$.
y est solution si, et seulement si,

$$z''(\arctan t) + z(\arctan t) = t$$

soit $z''(x) + z(x) = \tan x$ sur I.

$z'' + z = 0$ donc $z = \lambda\cos x + \mu\sin x$.
Méthode de la variation des constantes : $\lambda'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$ et $\mu'(x) = \sin x$.

$$\int -\frac{\sin^2 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x \underset{u=\sin x}{=} \int \frac{u^2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = u + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \sin x + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x} + C$$

Prenons $\lambda(x) = \sin x + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$ et $\mu(x) = -\cos x$.
On obtient : $z(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\cos x$ solution particulière.
Finalement

$$y(t) = \frac{\lambda+\mu t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}\ln\frac{\sqrt{1+t^2}-t}{\sqrt{1+t^2}+t}$$

Exercice 68 : [énoncé]
Sur $\mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$,

$$E \Leftrightarrow y' = \frac{1}{x^2}y$$

Solution générale : $y(x) = C\mathrm{e}^{-1/x}$.
Soit y une solution sur $\mathbb{R}$.
y est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$ donc il existe $C^+, C^- \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x > 0, y(x) = C^+\mathrm{e}^{-1/x} \text{ et } \forall x < 0, y(x) = C^-\mathrm{e}^{-1/x}$$

Continuité en 0

$$y(x) \xrightarrow[x\to 0+]{} 0 \text{ et } y(x) \xrightarrow[x\to 0-]{} \begin{cases} \pm\infty \text{ si } C^- \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Nécessairement $y(0) = 0$ et $C^- = 0$.
Dérivabilité en 0

$$y'(x) = \frac{C^+}{x^2}\mathrm{e}^{-1/x} \xrightarrow[x\to 0+]{} 0 \text{ et } y'(x) \xrightarrow[x\to 0-]{} 0 \text{ donc } y'(0) = 0$$

Equation différentielle en 0 : $0^2 y'(0) - y(0) = 0$: ok.
Finalement

$$\exists C \in \mathbb{R},\ y(x) = \begin{cases} C\mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Inversement une telle fonction est solution.

Exercice 69 : [énoncé]
a) Solution générale sur $\mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$:

$$y(x) = x\ln|x| + Cx \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Pas de recollement possible en 0.
b) Solution générale sur $\mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$:

$$y(x) = 1 + \frac{C}{x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Après recollement en 0, solution générale sur $\mathbb{R}$: $y(x) = 1$.
c) Solution générale sur $\mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$:

$$y(x) = \frac{1}{2}x^4 + Cx^2 \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Après recollement en 0, solution générale sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = \begin{cases} C^+x^2 + \frac{1}{4}x^4 \text{ si } x \geqslant 0 \\ C^-x^2 + \frac{1}{4}x^4 \text{ si } x < 0 \end{cases} \text{ avec } C^+, C^- \in \mathbb{R}$$

d) Solution générale sur $\mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$:

$$y(x) = \frac{1}{x} + C\frac{x^2+1}{x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Via

$$\frac{x^2-1}{x(1+x^2)} = \frac{2x^2-(1+x^2)}{x(1+x^2)} = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{x}$$

Après recollement en 0, solution générale sur $\mathbb{R}$: $y(x) = -x$.

Exercice 70 : [énoncé]
Solution générale sur $\mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$

$$y(x) = \frac{C+x}{\mathrm{e}^x - 1}$$

Après recollement en 0, solution générale sur $\mathbb{R}$

$$y(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x-1} \text{ prolongée par continuité avec } y(0) = 1$$

Exercice 71 : [énoncé]
a) Solution générale sur $I_k =]k\pi, (k+1)\pi[\,, k \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = \cos x + C \sin x \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Après recollement en chaque $k\pi$, solution générale sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = \cos x + C \sin x \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

b)) Solution générale sur $I_k =]k\pi, (k+1)\pi[\,, k \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = C\mathrm{e}^{1/\sin^2 x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Après recollement en chaque $k\pi$, solution générale sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = \begin{cases} C_k \mathrm{e}^{1/\sin^2 x} \text{ si } x \in I_k \\ 0 \text{ si } x = k\pi \end{cases} \text{ avec } (C_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$$

Exercice 72 : [énoncé]
a) Soit $I =]-\pi/2, \pi/2[$ le plus grand intervalle contenant où l'équation différentielle a un sens.
Posons $I^+ =]0, \pi/2[$ et $I^- =]-\pi/2, 0[$.
Solution générale sur I^+ : $y(x) = C^+ \sin x$.
Solution générale sur I^- : $y(x) = C^- \sin x$.
Cherchons les solutions définies sur I.
Analyse : Soit y une solution sur I, s'il en existe.
y est a fortiori solution sur I^+ et I^- donc :
$\exists C^+, C^- \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = C^+ \sin x$ sur I^+ et $y(x) = C^- \sin x$ sur I^-.
Comme y doit être continue en 0, $\lim\limits_{x \to 0+} y(x) = \lim\limits_{x \to 0-} y(x) = y(0) = 0$. Pas d'informations sur C^+ ni C^-.
Comme y doit être dérivable en 0,
$\lim\limits_{x \to 0+} \frac{y(x)-y(0)}{x} = C^+ = y'(0) = \lim\limits_{x \to 0-} \frac{y(x)-y(0)}{x} = C^-$.
Donc $C^+ = C^-$. Finalement $y(x) = C^+ \sin x$ sur I entier.
Synthèse : $y(x) = C \sin(x)$ avec $C \in \mathbb{R}$ est bien solution sur I.
On aura $y(0) = 0 \Leftrightarrow C.\sin(0) = 0$ ce qui est toujours vraie.
Il y a ici une infinité de solutions au problème de Cauchy.
b) On aura $y(0) = 1 \Leftrightarrow C.\sin(0) = 1$ ce qui est impossible.
Il n'y a ici aucune solution au problème de Cauchy.

Exercice 73 : [énoncé]
Soit $I =]-\infty, -1[\,,]-1, 0[\,,]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$.
Sur I, l'équation différentielle devient : $y' + \frac{2}{x(x^2-1)} y = \frac{x}{x^2-1}$.
La solution générale sur I est $\frac{x^2(\ln|x|+C)}{x^2-1}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Après recollement en 1, 0 et -1 on conclut, pour tout intervalle I :
Si $1, 0, -1 \notin I, y(x) = \frac{x^2(\ln|x|+C)}{x^2-1}$ avec $C \in \mathbb{R}$
Si $1, -1 \notin I$ et $0 \in I$, $y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \ln|x| + C^+ x^2}{x^2-1} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{x^2 \ln|x| + C^- x^2}{x^2-1} \text{ si } x < 0 \end{cases}$ avec $C^+, C^- \in \mathbb{R}$.
Si $1 \in I$ ou $-1 \in I$, $y(x) = \frac{x^2 \ln|x|}{x^2-1}$.

Exercice 74 : [énoncé]
Sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$: $y(x) = C\,|x|^\alpha$.
Soit y une solution sur $\mathbb{R}$.
On a $y(x) = C^+ x^\alpha$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $y(x) = C^-\,|x|^\alpha$ sur $\mathbb{R}^{-\star}$.
Si $\alpha < 0$, la limite en 0 implique $C^+ = C^- = 0$ donc $y = 0$. Inversement ok.
Si $\alpha = 0$, la limite en 0 donne $C^+ = C^-$ et on conclut que y est constante. Inversement ok.
Si $\alpha > 0$, la limite en 0 donne $y(0) = 0$.
On a $y'(x) = \alpha C^+ x^{\alpha-1}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $y(x) = -\alpha C^-\,|x|^\alpha$ sur $\mathbb{R}^{-\star}$.
Si $\alpha < 1$, la limite en 0 implique $C^+ = C^- = 0$ donc $y = 0$. Inversement ok.
Si $\alpha = 1$, la limite en 0 implique $C^+ = -C^-$ et on conclut que y est linéaire. Inversement ok.
Si $\alpha > 1$, la limite en 0 existe et est nulle ce qui permet d'affirmer $y'(0) = 0$
L'équation différentielle est bien vérifiée en 0.
Inversement, lorsque $\alpha > 1$, la fonction définie par $y(x) = \begin{cases} C^+ x^\alpha \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ C^-(-x)^\alpha \text{ si } x < 0 \end{cases}$ est solution.

Exercice 75 : [énoncé]
a) $z : x \mapsto y(-x)$ est deux fois dérivable sur I' et vérifie bien l'équation.
b) Soient y une fonction deux fois dérivable définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et z définie par $z(t) = y(\sqrt{t})$ de sorte que $y(x) = z(x^2)$. z est deux fois dérivable.
On a $y'(x) = 2xz'(x^2)$ et $y''(x) = 2z'(x^2) + 4x^2 z''(x^2)$.

y est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ si, et seulement si,

$$4z'' - z = 0$$

Cela donne

$$y(x) = \lambda e^{\frac{x^2}{2}} + \mu e^{-\frac{x^2}{2}}$$

c) Soit y une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée.
Puisque y est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$ on peut écrire :

$$\forall x > 0, y(x) = \lambda_1 e^{\frac{x^2}{2}} + \mu_1 e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ et } \forall x < 0, y(x) = \lambda_2 e^{\frac{x^2}{2}} + \mu_2 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Puisque y est continue en 0

$$\lambda_1 + \mu_1 = \lambda_2 + \mu_2$$

y' est continue en 0 ne donne rien de plus

$$y''(x) \underset{x\to 0+}{\to} \lambda_1 - \mu_1 \text{ et } y''(x) \underset{x\to 0-}{\to} \lambda_2 - \mu_2$$

Donc $y''(0) = \lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2$ d'où $\lambda_1 = \mu_1$ et $\lambda_2 = \mu_2$.
Finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda_1 e^{\frac{x^2}{2}} + \mu_1 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Inversement, une telle fonction est solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 76 : [énoncé]
Sur $I =]-\infty, -1[$ ou $]-1, +\infty[$ l'espace des solutions de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 est un plan vectoriel. En recherchant ses solutions polynomiale on obtient les fonctions $y(t) = a(t^2-1) + b(t+1)$. Les deux fonctions polynomiales $t \mapsto t^2 - 1$ et $t \mapsto t+1$ sont solutions et indépendantes, elles constituent un système fondamental de solution de l'équation sur I. Reste à recoller celles-ci en -1.
Si y est solution sur $\mathbb{R}$, elle est a fortiori solution sur $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$ donc il existe $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t > -1, y(t) = a_1(t^2-1) + b_1(t+1)$ et
$\forall t < -1, y(t) = a_2(t^2-1) + b_2(t+1)$.
Recherchons parmi les fonctions de la forme précédente celles pouvant être prolongée en une fonction deux fois dérivable en -1
Limite en -1 : $\lim\limits_{t\to -1^+} y(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to -1^-} y(t) = 0$. On peut prolonger y en -1 en posant $y(-1) = 0$.
$\forall t > -1, y'(t) = 2a_1 t + b_1$ et $\forall t > -1, y'(t) = 2a_2 t + b_2$.
Limite en -1 : $\lim\limits_{t\to -1^+} y'(t) = -2a_1 + b_1$ et $\lim\limits_{t\to -1^-} y(t) = -2a_2 + b_2$. La fonction y est dérivable en -1 si, et seulement si, $-2a_1 + b_1 = -2a_2 + b_2$. Si tel est le cas :
$\forall t > -1, y''(t) = 2a_1$ et $\forall t < -1, y''(t) = 2a_2$.
Limite en -1 : $\lim\limits_{t\to -1^+} y''(t) = 2a_1$ et $\lim\limits_{t\to -1^-} y''(t) = 2a_2$. La fonction y est deux fois dérivable en -1 si, et seulement si, $2a_1 = 2a_2$.
Au final y peut être prolongée en une fonction deux fois dérivable si, et seulement si, $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.
La fonction y est alors donnée par $y(t) = a_1(t^2-1) + b_1(t+1)$ sur $\mathbb{R}$ et elle bien solution de l'équation.
Finalement les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont les fonctions

$$y(t) = a(t^2-1) + b(t+1) \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}$$

Exercice 77 : [énoncé]
On remarque $(t+1)y'' - (t+2)y' + y = 0 \Leftrightarrow (t+1)(y'-y)' - (y'-y) = 0$.
Les fonctions $y(t) = e^t$ et $y(t) = t+2$ sont solutions sur $\mathbb{R}$.
Par suite, sur $I =]-\infty, -1[$ ou $]-1, +\infty[$, la solution générale est
$y(t) = \lambda e^t + \mu(t+2)$ car on sait que l'espace des solutions est de dimension 2.
Après recollement en -1, la solution générale sur $\mathbb{R}$ est $y(t) = \lambda e^t + \mu(t+2)$.

Exercice 78 : [énoncé]
Sur $\mathbb{R}^+$, $E \Leftrightarrow y' + y = x$ de solution générale $y(x) = Ce^{-x} + x - 1$.
Sur $\mathbb{R}^-$, $E \Leftrightarrow y' + y = 0$ de solution générale $y(x) = Ce^{-x}$.
Soit y solution de E sur $\mathbb{R}$.
Comme y est solution sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$, il existe $C^+, C^- \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \geqslant 0, y(x) = C^+ e^{-x} + x - 1 \text{ et } \forall x \leqslant 0, y(x) = C^- e^{-x}$$

Définition en 0 : $y(0) = C^+ - 1 = C^-$ donc $C^+ = C^- + 1$.
Dérivabilité en 0 : $y'(x) \xrightarrow[x\to 0+]{} -C^+ + 1$ et $y'(x) \xrightarrow[x\to 0-]{} -C^-$
donc $y'(0) = -C^+ + 1 = -C^-$.
Equation différentielle en 0 : $-C^+ + 1 + C^+ - 1 = \max(0,0)$: ok
Finalement, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$y(x) = \begin{cases} Ce^{-x} + x - 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ (C-1)e^{-x} \text{ sinon} \end{cases}$$

Inversement : ok

Exercice 79 : [énoncé]
a) Sur I_1, I_2 ou I_3, l'équation H est équivalente à l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène

$$y' + \frac{x-2}{x(x-4)}y = 0$$

On peut résoudre cette équation avec Maple
`dsolve(x*(x-4)*D(y)(x)+(x-2)*y(x)=0, y(x));`
La solution obtenue s'interprète en fonction du signe du contenu de la racine pour affirmer que la solution de H est

$$y_1(x) = \frac{\lambda_1}{\sqrt{-x(4-x)}} \text{ sur } I_1,\ y_2(x) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{x(4-x)}} \text{ sur } I_2 \text{ et } y_3(x) = \frac{\lambda_3}{\sqrt{x(x-4)}} \text{ sur } I_3$$

Pour raccorder deux solutions y_1 et y_2 en 0, la seule possibilité est que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ car sinon il y a divergence en 0. De même, pour raccorder y_2 et y_3 en 4, la seule possibilité est $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Au final, en dehors de la fonction nulle qui est solution sur $\mathbb{R}$, les fonctions y_1, y_2, y_3 définies pour $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$ sont les solutions maximales de E.
b) La mise en place de la méthode la variation constante invite aux déterminations des primitives de

$$\frac{1}{\sqrt{-x(4-x)}} \text{ sur } I_1,\ \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}} \text{ sur } I_2 \text{ et } \frac{1}{\sqrt{x(x-4)}} \text{ sur } I_3$$

On obtient celles-ci par les commandes

```
int(1/sqrt(-x*(4-x)), x);
int(1/sqrt(x*(4-x)), x);
int(1/sqrt(x*(x-4)), x);
```

La première expression obtenue est un logarithme d'un contenu négatif, on pourra y préférer une expression à l'aide de la fonction argch...
On obtient comme solution générale à l'équation E :

$$y_1(x) = \frac{2\operatorname{argch}\left(\frac{2-x}{2}\right) + \lambda_1}{\sqrt{-x(4-x)}} \text{ sur } I_1,\ y_2(x) = \frac{2\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) + \lambda_2}{\sqrt{x(4-x)}} \text{ sur } I_2$$

$$\text{et } y_3(x) = \frac{-2\operatorname{argch}\left(\frac{x-2}{2}\right) + \lambda_3}{\sqrt{x(x-4)}} \text{ sur } I_3$$

c) Pour raccorder une solution y_1 et une solution y_2 en 0, il est nécessaire que $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \pi$.
La fonction ainsi obtenue est alors dérivable en 0 et solution de l'équation différentielle E comme on peut le vérifier en procédant à un développement limité

```
series((2*arccosh((2-x)/2))/sqrt(-x*(4-x)), x=0);
series((2*arcsin((x-2)/2)+Pi)/sqrt(x*(4-x)), x=0);
```

Pour raccorder une solution y_2 et une solution y_3 en 4, il est nécessaire que $\lambda_2 = -\pi$ et $\lambda_3 = 0$.
La fonction ainsi obtenue est alors dérivable en 4 et solution de l'équation différentielle E.
Résumons :
Les deux fonctions précédemment proposées sont solutions maximales de E sur respectivement $]-\infty, 4[$ et $]0, +\infty[$. En dehors de celles-ci, les solutions maximales sont les fonctions y_1, y_2, y_3 proposées ci-dessus pour $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq \pm\pi$ et $\lambda_3 \neq 0$.

Exercice 80 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur $]0, +\infty[$.
Sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$,

$$\int \frac{3\ln x + 1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x = 3\ln x + \ln|\ln x| + C^{te}$$

Solution générale sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$

$$y(x) = \lambda x^3 |\ln x|$$

Solution sur $]0, +\infty[$.
Soient $y :]0, 1[\cup]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ solution de l'équation sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifiant $y(x) = \lambda x^3 \ln x$ sur $]0, 1[$ et $y(x) = \mu x^3 \ln x$ sur $]1, +\infty[$.
La continuité en 1 donne $y(1) = 0$ sans conditions sur λ et μ.
La dérivabilité en 1 donne $\lambda = \mu$.
Ainsi $y(x) = \lambda x^3 \ln x$ sur $]0, +\infty[$ qui est évidement solution.

Exercice 81 : [énoncé]
a) On résout l'équation différentielle linéaire étudiée et, par la méthode de variation de la constante, on obtient la solution générale suivante

$$g(x) = \lambda x + x\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Par une intégration par parties, on peut écrire

$$g(x) = \lambda x - f(x) + xf(1) + x\int_1^x \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Quand $x \to 0^+$, on a

$$\left|x\int_1^x \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|f'\|_{\infty,[0,1]}\, x\,|\ln x|$$

et on obtient

$$g(x) \to -f(0)$$

Quand $x \to 0^+$

$$\frac{1}{x}(g(x) - g(0)) = \lambda - \frac{f(x) - f(0)}{x} + f(1) + \int_1^x \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Le terme $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ converge vers $f'(0)$.
Si $f'(0) \neq 0$ alors l'intégrale $\int_{]0,1]} \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge et donc le terme $\int_1^x \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge. On en déduit qu'alors g n'est pas dérivable en 0.
L'égalité $f'(0) = 0$ est une condition nécessaire à la dérivabilité de g en 0. Cette condition n'est pas suffisante. En effet considérons une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\ln x}$$

L'intégrale $\int_{]0,1]} \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ demeure divergente alors que $f'(0) = 0$.
b) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $f'(0) = 0$ on peut écrire

$$f(x) = f(0) + x^2\varphi(x) \text{ pour tout } x > 0$$

avec $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et convergeant vers $f''(0)/2$ en 0^+.
On a alors pour tout $x > 0$

$$g(x) = \lambda x + xf(0) - f(0) + x\int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

g est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0, +\infty[$ car φ y est de classe $\mathcal{C}^2$.
On prolonge g par continuité en 0 en posant $g(0) = -f(0)$

$$g'(x) = \lambda + f(0) + x\varphi(x) + \int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Quand $x \to 0^+$, g' converge et donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

$$g''(x) = 2\varphi(x) + x\varphi'(x)$$

Or

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)}{x^2} - 2\frac{f(x) - f(0)}{x^3}$$

donc

$$g''(x) = \frac{f'(x)}{x} = \frac{f'(x) - f'(0)}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} f''(0)$$

On en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$

Exercice 82 : [énoncé]
a) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Après résolution via variation de la constante, on obtient la solution générale

$$y(x) = \frac{x + \lambda}{\ln x}$$

b) Par opérations, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1/2, +\infty[$.
Pour $x \in]-1, 1[$ on a le développement en série entière

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

et si $x \neq 0$, on obtient

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$$

Si l'on pose $g(0) = 1$, la relation précédente reste valable pour $x = 0$ et ainsi on a prolongé g en une fonction développable en série entière sur $]-1, 1[$.
Ce prolongement est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ puis sur $]-1, +\infty[$.
c) La fonction g est à valeurs strictement positives et on peut donc introduire la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{g(x-1)}$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$

$$f(x) = \frac{x - 1}{\ln x}$$

Ainsi f est solution de (E) sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ et enfin on vérifie aisément que l'équation différentielle (E) est aussi vérifiée quand $x = 1$.

Exercice 83 : [énoncé]
Solution générale sur $\mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$
$y(x) = C\,\mathrm{sh}\,x - \mathrm{ch}\,x$
Après recollement en 0, solution générale sur $\mathbb{R}$
$y(x) = C\,\mathrm{sh}\,x - \mathrm{ch}\,x$ avec $C \in \mathbb{R}$

Exercice 84 : [énoncé]
a) Soit $\sum a_n x^n$une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Sur $]-R, R[$, la fonction $x \mapsto y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \text{ et } y'' = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)na_{n+1}x^{n-1}$$

On a alors

$$4xy'' + 2y' - y = \sum_{n=0}^{+\infty} (2(2n+1)(n+1)a_{n+1} - a_n)\, x^n$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction y est solution de l'équation (E) si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}$$

Ce qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{(2n)!}a_0$$

Inversement, la série entière donnée par $\sum \frac{a_0}{(2n)!}x^n$ est de rayon de convergence $+\infty$ et en vertu des calculs qui précèdent, sa somme est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).
b) Considérons $I = \mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$ et posons $x = \varepsilon t^2$ avec $\varepsilon = \pm 1$.
Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $z : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ définie par $z(t) = y(\varepsilon t^2)$.
La fonction z est deux fois dérivable et

$$z(t) = y(\varepsilon t^2),\ z''(t) = 2\varepsilon t y'(\varepsilon t^2) \text{ et } z''(t) = 4t^2 y''(\varepsilon t^2) + 2\varepsilon y'(\varepsilon t^2)$$

de sorte que

$$z''(t) - z(t) = 4xy''(x) + 2y'(x) - y(x)$$

Ainsi y est solution de (E) sur I si, et seulement si, z est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants $z'' - z = 0$. La solution générale de cette dernière est $z(t) = \lambda \mathrm{ch} t + \mu \mathrm{sh} t$ et la solution générale de (E) sur I est donc

$$y(x) = \lambda \mathrm{ch}\left(\sqrt{|x|}\right) + \mu \mathrm{sh}\left(\sqrt{|x|}\right)$$

c) Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$. On peut écrire

$$\forall x > 0, y(x) = \lambda \mathrm{ch}\left(\sqrt{|x|}\right) + \mu \mathrm{sh}\left(\sqrt{|x|}\right) \text{ et } \forall x < 0, y(x) = \lambda' \mathrm{ch}\left(\sqrt{|x|}\right) + \mu' \mathrm{sh}\left(\sqrt{|x|}\right)$$

Le raccord par continuité exige $\lambda = \lambda'$.
La dérivabilité du raccord exige $\mu = \mu' = 0$.
La fonction ainsi obtenue correspond alors au développement en série entière initiale qu'on sait être solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 85 : [énoncé]
a) On peut écrire

$$f(x) = 1 - x - x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$$

Par opération sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$.
b) Soit f solution. f est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x) = -1 - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$f''(x) + f(x) = 0$$

Ainsi la fonction f est de la forme

$$f(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$$

De plus, on observe $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$ ce qui détermine λ et μ :

$$\lambda = 1 \text{ et } \mu = -1$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que la fonction $x \mapsto \cos x - \sin x$ est solution, soit en remontant les calculs (ce qui est possible) soit en refaisant ceux-ci.

Exercice 86 : [énoncé]
Supposons f solution.

$$f(x) = -1 - 2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

On a $f(0) = -1$ et f dérivable avec

$$f'(x) = -2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - 2xf(x) + xf(x)$$

Par suite $y : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est solution de l'équation différentielle

$$y'' + xy' + 2y = 0$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$. Ceci détermine y et donc f de manière unique.
En recherchant les solutions développables en séries entières, on obtient
$y(x) = -x\mathrm{e}^{-x^2/2}$ puis

$$f(x) = (x^2 - 1)\mathrm{e}^{-x^2/2}$$