

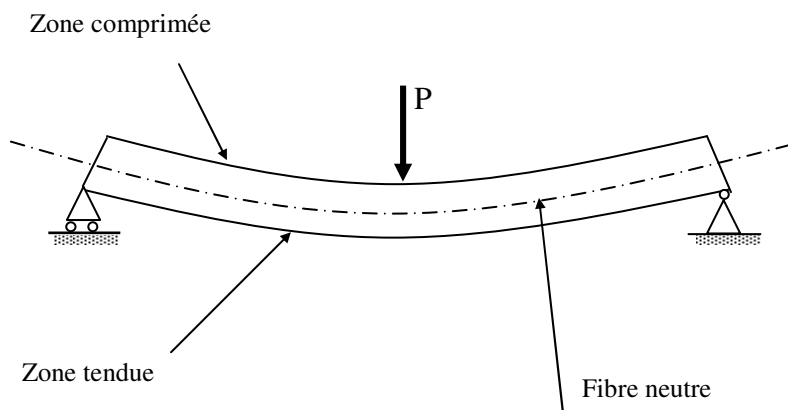
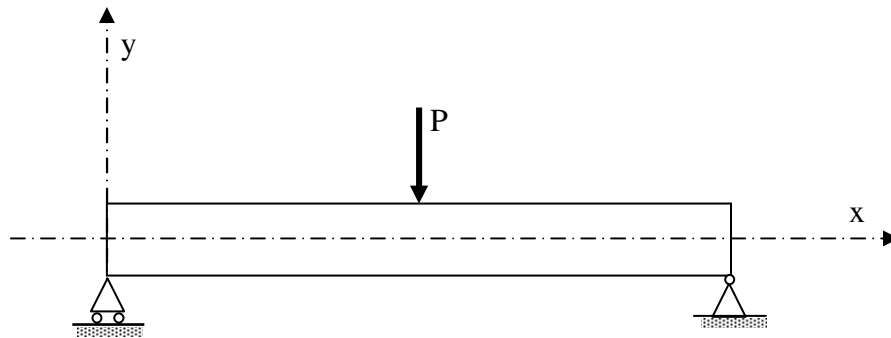
FLEXION SIMPLE

1) Introduction expérimentale :

considérons une poutre reposant sur deux appuis soumise à une charge concentrée verticale.

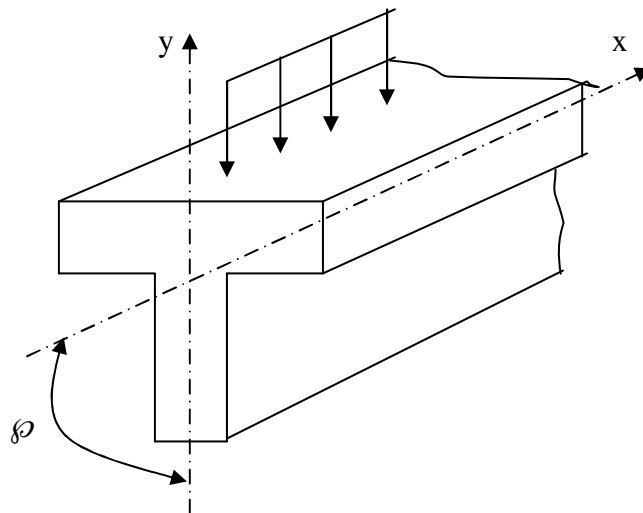
Après déformation, cette poutre accuse un flèche (déplacement vertical des différents points, d'où le nom de flexion) et on constate que les fibres situées en partie supérieure sont sollicitées en compression tandis que celles qui sont situées en partie inférieure sont sollicitées en traction.

Entre ces deux régions, il existe une fibre qui n'est ni tendue ni comprimée : c'est la fibre neutre.



Hypothèses :

On considèrera dans cette étude des poutres à plan moyen, c'est-à-dire pour lesquelles y est axe de symétrie de la section droite. En outre, toutes les forces sont appliquées dans le plan (xoy). (les couples et moments sont portés par z).



Les matériaux sont supposés homogènes. La fibre neutre est donc confondue avec la ligne moyenne (c'est-à-dire que la fibre neutre passe par le centre de gravité de toutes les sections droites).

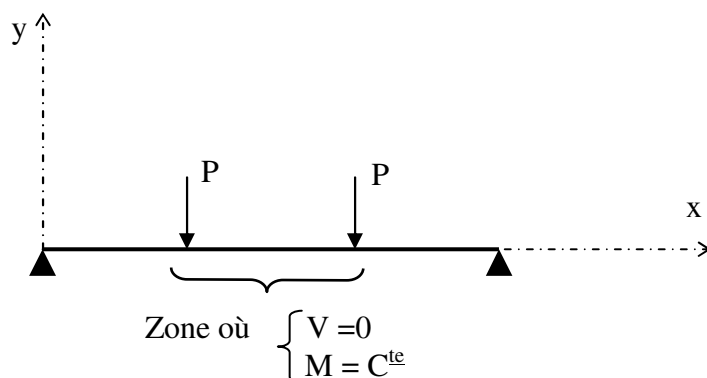
2) Différents types de flexion plane :

1-2) Flexion pure :

Cette flexion correspond au cas où les sollicitations dans une section quelconque se réduisent au seul moment fléchissant (pas d'effort tranchant).

Remarquons que ce cas, bien que très intéressant d'un point de vue théorique car il permet de dissocier les effets du moment fléchissant de ceux de l'effort tranchant, n'apparaît pratiquement jamais dans la réalité.

Expérimentalement, on observe un comportement de flexion pure dans un cas comme celui-ci :



1-2) Flexion simple :

C'est le cas où les sollicitations dans une section s'expriment sous la forme du torseur :

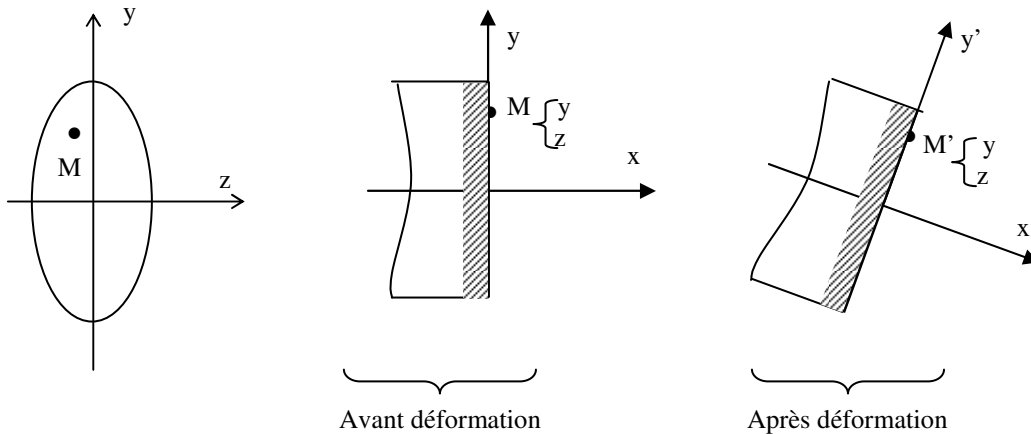
$$\begin{Bmatrix} V(x) \\ M(x) \end{Bmatrix}$$

Dans ce cas, on mettra en évidence par le calcul l'effet de l'effort tranchant associé à celui du moment fléchissant.

3) Etude de la flexion simple :

3-1) Contrainte normale due au moment fléchissant :

Considérons une poutre sur deux appuis soumise à une charge quelconque. Nous allons examiner le comportement d'une section $\Sigma (x_0)$ et reprendre l'hypothèse de Navier-Bernoulli :



Pour que l'hypothèse de Navier-Bernoulli soit vérifiée, il est nécessaire que l'allongement relatif de la fibre sur laquelle est située le point M soit une fonction linéaire des coordonnées du point M dans la section $\Sigma (x)$. D'après la loi de Hooke, il en est de même pour la contrainte, que nous écrirons :

$$\sigma = a + b.y + c.z$$

comme nous l'avons vu à la fin du chapitre 3, les sollicitations s'écrivent :

$$N(x_0) = \iint_{\Sigma(x_0)} \sigma(y,z) dS \quad (1)$$

$$M(x_0) = \iint_{\Sigma(x_0)} y.\sigma(y,z) dS \quad (2)$$

Développons l'expression (1) en remarquant que l'effort normal est nul :

$$\iint_{\Sigma(x_0)} a.dS + \iint_{\Sigma(x_0)} b.y.dS + \iint_{\Sigma(x_0)} c.z.dS = 0$$

les axes y et z passant par le centre de gravité G de la section, on a (d'après la définition du centre de gravité) :

$$\iint_{\Sigma(x_0)} y.dS = \iint_{\Sigma(x_0)} z.dS = 0$$

on en déduit donc :

$$a = 0$$

développons de même l'expression (2) :

$$\iint_{\Sigma(x_0)} a.y.dS + \iint_{\Sigma(x_0)} b.y^2.dS + \iint_{\Sigma(x_0)} c.y.z.dS = M(x_0)$$

le troisième terme du premier membre est nul : $\iint_{\Sigma(x_0)} y.z.dS$ étant le produit d'inertie d'une section symétrique par rapport à l'axe y.

on reconnaît en outre la quantité $\iint_{\Sigma(x_0)} y^2.dS$ qui est le moment quadratique de la section $\Sigma(x_0)$ par rapport à l'axe z.

on déduit de cette équation l'expression de la constante b :

$$b = \frac{M(x_0)}{I_z}$$

en exprimant la nullité du moment fléchissant porté par y (problème plan) on déduit très aisément :

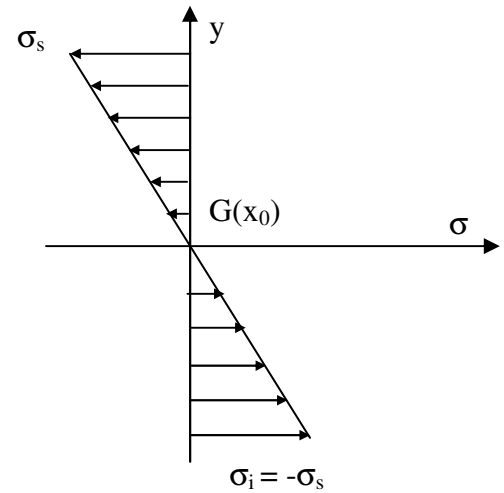
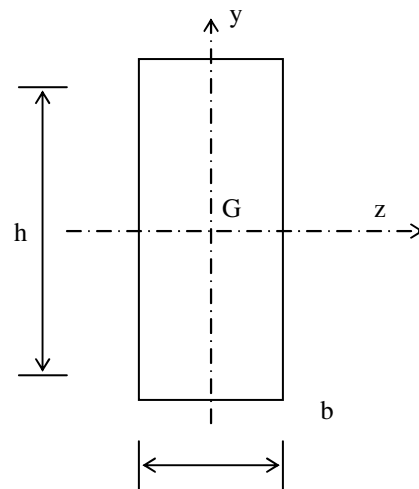
$$c = 0$$

d'où l'expression de la contrainte normale en un point M(y,z) de la section $\Sigma(x_0)$:

$$\boxed{\sigma(x_0, y) = - \frac{M(x_0)}{I_z} \cdot y}$$

Exemple : Variation de la contrainte normale dans une section rectangulaire.

Considérons la section suivante $\Sigma(x_0)$ d'une poutre droite :



Le moment quadratique par rapport à l'axe z s'écrit : $I_z = \frac{bh^3}{12}$

faisons varier y de $-\frac{h}{2}$ à $+\frac{h}{2}$. Les contraintes en fibres supérieure et inférieure s'écrivent :

$$\sigma_s = -\frac{6.M(x_0)}{bh^2}$$

$$\sigma_i = +\frac{6.M(x_0)}{bh^2}$$

le diagramme de répartition des contraintes normales dans la section $\Sigma(x_0)$ est donc :

4) Déformations :

Nous allons dans ce paragraphe établir des relations entre la déformation de la poutre et le moment fléchissant qui la sollicite.

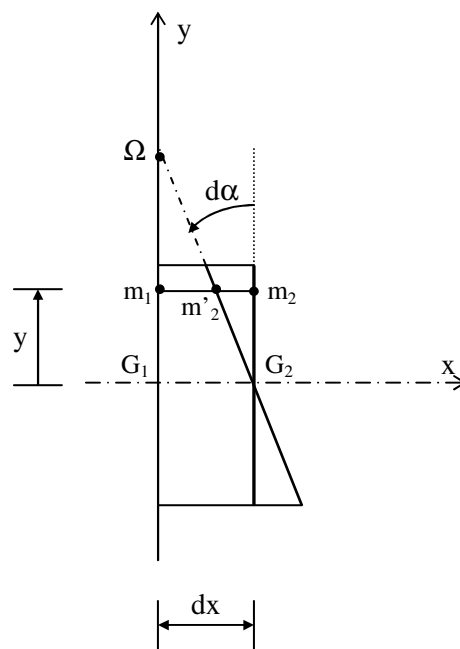
Considérons un tronçon de longueur dx d'une poutre avant et après déformation.

Considérons une fibre m_1m_2 située à la distance y de la fibre neutre.

Après déformation cette fibre est représentée par $m_1m'_2$.

La déformation relative s'écrit :

$$\varepsilon = \frac{m'_2m_2}{m_1m_2}$$



les déformations étant petites, on peut écrire :

$$m'_2m_2 = y \cdot d\alpha$$

en outre : $m_1m_2 = dx$

la déformation s'écrit donc :

$$\varepsilon = y \cdot \frac{d\alpha}{dx}$$

et d'après la loi de Hooke, la contrainte a pour expression :

$$\sigma = E \cdot y \cdot \frac{d\alpha}{dx}$$

exprimons à présent le rayon de courbure de la fibre neutre :

$$R = \Omega \cdot G_2 \approx \frac{dx}{d\alpha}$$

en remplaçant dans l'expression de la contrainte, il vient : $\sigma = \frac{E}{R} \cdot y$

puis en égalant à la valeur de la contrainte normale en flexion pure, on obtient une relation entre la courbure χ (qui est l'inverse du rayon de courbure) et le moment fléchissant :

$$\chi = \frac{1}{R} = \frac{M(x)}{E \cdot I_z}$$

le terme $\frac{1}{E \cdot I_z}$ est appelé « flexibilité » de la poutre, inverse de la rigidité en flexion : $E I_z$.

Nota : la courbure représente en outre la rotation de la section :

$$\chi = \frac{d\alpha}{dx}$$

détermination de la configuration déformée de la poutre :

on démontre, en géométrie analytique, que le rayon de courbure d'une courbe d'équation $y = f(x)$ s'écrit :

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

et, les déformations étant faibles, y'^2 est négligeable devant 1 . on peut donc exprimer R sous la forme :

$$R = \frac{1}{y''}$$

Si $y = f(x)$ est l'équation de l'allure déformée de la poutre, nous pouvons écrire :

$$y'' = \frac{M(x)}{E \cdot I_z}$$

c'est l'équation différentielle de la « déformée ».

* *Processus d'intégration :*

En intégrant une première fois l'équation (1), on obtient la pente ou la rotation de la déformée à l'abscisse x qui est égale a :

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta = \theta \text{ [rd]} \quad (2) \quad (\text{ car } \theta \text{ est petit })$$

de l'équation (2) on peut écrire :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

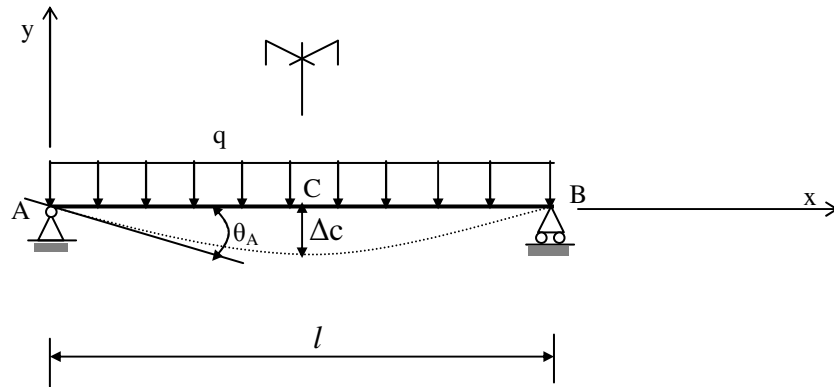
d'où

$$d\theta = \frac{M}{EI} \cdot dx$$

en intégrant une deuxième fois l'équation (1), on obtient la flèche y de la déformée à l'abscisse x

Exemple :

* On considère une poutre droite qui repose sur deux appuis simples et soumise à une charge uniformément répartie q :



* Déterminer les équations de la déformée et sa pente, puis calculer la rotation θ_A de la déformée à l'appui A et la valeur de la flèche Δ_c à mi-portée de la poutre . (on suppose que EI est constante).

Solution :

On a

$$R_A = R_B = ql/2$$

Et

$$Mf(x) = (ql/2) \cdot x - (q/2) \cdot x^2$$

De l'équation (1) on a :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q}{2} \cdot x^2 \right)$$

En intégrant une première fois, on a : $EI \frac{dy}{dx} = EI\theta = \frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} + C_1$

En intégrant une deuxième fois, on aura : $EI.y = \frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} + C_1.x + C_2$

On détermine les constantes d'intégration par les conditions aux limites (C.A.L), aux appuis A et B.

- en A , pour $x = 0$, $y_A = y(0) = 0$ donc, $C_2 = 0$
 - en B, pour $x = l$, $y_B = y(l) = 0$, d'où, en remplaçant ces valeurs dans l'équation (1), on aura

$$\frac{ql^4}{12} - \frac{ql^4}{24} + C_1.l = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{ql^3}{24}$$

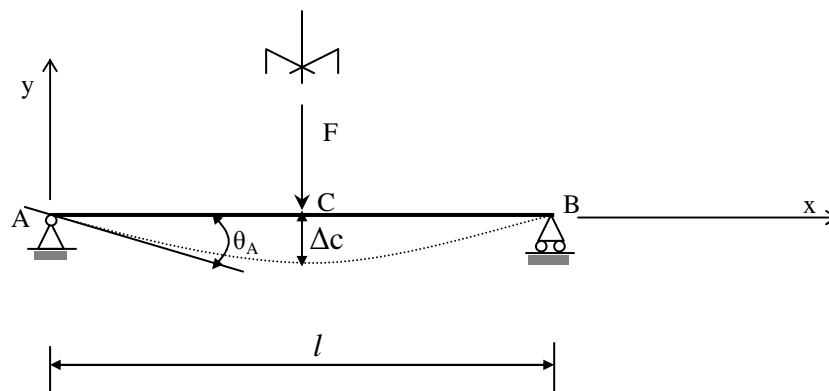
d'où on trouve :

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{q.l.x^2}{4EI} - \frac{q.x^3}{6EI} - \frac{q.l^3}{24EI}$$

$$y(x) = \frac{q.l.x^3}{12EI} - \frac{q.x^4}{24EI} - \frac{q.l^3.x}{24EI}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{pour } x = 0 & \rightarrow \theta_A = -\frac{q.l^3}{24EI} \\ \text{pour } x = l/2 & \rightarrow \Delta c = y(l/2) = -\frac{5ql^4}{384EI} \end{cases}$$

Exemple 2 :



* Déterminer les équations de la déformée et sa pente, puis calculer la rotation θ_A de la déformée à l'appui A et la valeur de la flèche Δc à mi-portée de la poutre . (on suppose que EI est constante).

Solution :

On a

$$R_A = R_B = F/2$$

Et

$$\text{Pour } 0 \leq x \leq l/2 : M_f(x) = R_A \cdot x = (F/2) \cdot x$$

$$\text{Pour } l/2 \leq x \leq l : M_f(x) = R_B \cdot (l-x) = (F/2) \cdot (l-x)$$

De l'équation (1) on a :

$$\text{Pour } 0 \leq x \leq l/2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{F}{2} \cdot x \right)$$

$$\text{En intégrant une première fois, on a : } EI \cdot \frac{dy}{dx} = EI \cdot \theta = \frac{F \cdot x^2}{4} + C_1 \quad (1)$$

$$\text{En intégrant une deuxième fois, on aura : } EI \cdot y = \frac{F \cdot x^3}{12} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (2)$$

On détermine les constantes d'intégration par les conditions aux limites (C.A.L), aux appuis A et B.

- en A , pour $x = 0$, $y_A = y(0) = 0$ donc, $\boxed{C_2 = 0}$
 - en C, pour $x = l/2$, $\theta_B = \theta(l/2) = 0$, d'où, en remplaçant ces valeurs dans l'équation (1), on aura

$$\frac{F}{4} \left(\frac{l}{2} \right)^2 + C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_1 = -\frac{F \cdot l^2}{16}}$$

d'où on trouve :

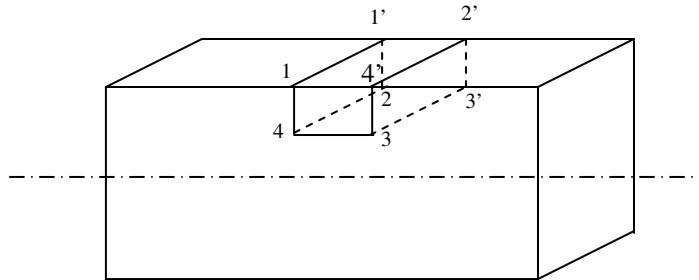
$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left(\frac{F}{4} x^2 - \frac{F l^2}{16} \right)$$

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{F}{12} \cdot x^3 - \frac{F \cdot l^2}{16} \cdot x \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{pour } x = 0 & \rightarrow \theta_A = -\frac{F \cdot l^2}{16 \cdot EI} \\ \text{pour } x = l/2 & \rightarrow \Delta c = y(l/2) = -\frac{F \cdot l^3}{48 EI} \end{cases}$$

5) Expression de la contrainte tangentielle :

Considérons une poutre droite dans laquelle nous allons isoler un parallélépipède, pris en partie supérieure de la poutre :



Bilan des efforts sur toutes les faces :

- face 121'2' : pas d'efforts (bord libre de la poutre)
- face 343'4' : contrainte longitudinale $\vec{\tau}$, s'appliquant sur une surface $b \cdot dx$
- face 141'4' : * contrainte normale $\sigma_1 = \frac{M(x)}{I_z} \cdot y_0$ donnant lieu à une résultante

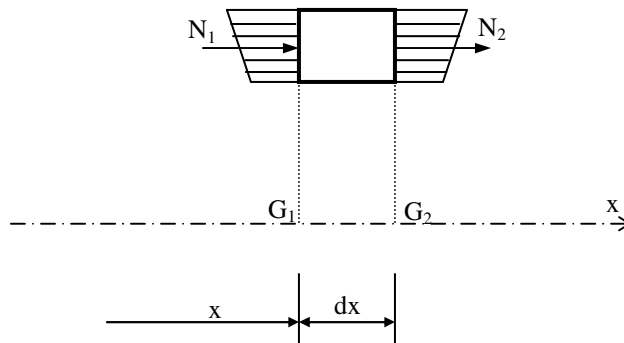
$$N_1 = \frac{M}{I_z} \iint_S y_0 \cdot ds$$

* contrainte tangentielle τ dont on ne connaît pas la répartition.

- face 232'3' : * contrainte normale $\sigma_2 = \frac{M(x+dx)}{I_z} \cdot y_0$ donnant lieu à une résultante

$$N_2 = \frac{M(x+dx)}{I_z} \iint_S y_0 \cdot ds$$

* constante tangentielle dont on ne connaît pas la répartition.



Ecrivons l'équation d'équilibre en projection sur l'axe x du parallélépipède :

$$b \cdot dx \cdot \tau - \frac{M(x)}{I_z} \iint_S y_o \cdot ds + \frac{M(x+dx)}{I_z} \iint_S y_o \cdot ds = 0$$

la quantité $\iint_S y_o \cdot ds$ n'est autre que le moment statique de la face 141'4' soit $m(S_o)$.

Donc :
$$\tau = - \frac{m(S_o)}{b \cdot I_z} \cdot \left(\frac{M(x+dx) - M(x)}{dx} \right)$$

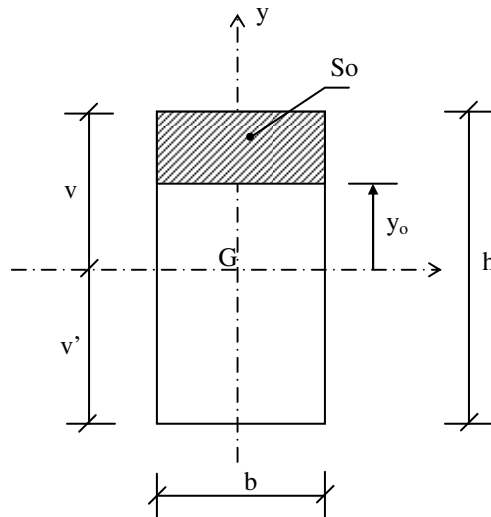
La quantité entre parenthèses est la dérivée du moment fléchissant par rapport à x , soit encore l'inverse de l'effort tranchant.

Il vient donc :

$$\tau = \frac{V \cdot m(S_o)}{b \cdot I_z}$$

Application Cas d'une section rectangulaire :

Considérons la section rectangulaire suivante :



Exprimons la contrainte τ à l'aide de la formule que nous venons d'établir :

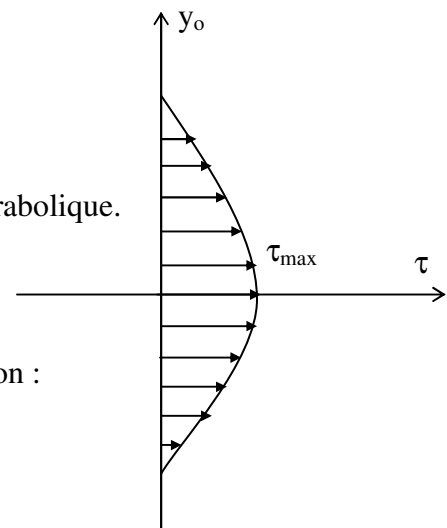
$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$m(S_o) = y_{Go} \cdot S_o = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y_o \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y_o \right)$$

$$\text{d'où } \tau = \frac{6V}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y_o^2 \right)$$

on constate que la variation de τ en fonction de y_o est parabolique.

Cette variation a pour allure :

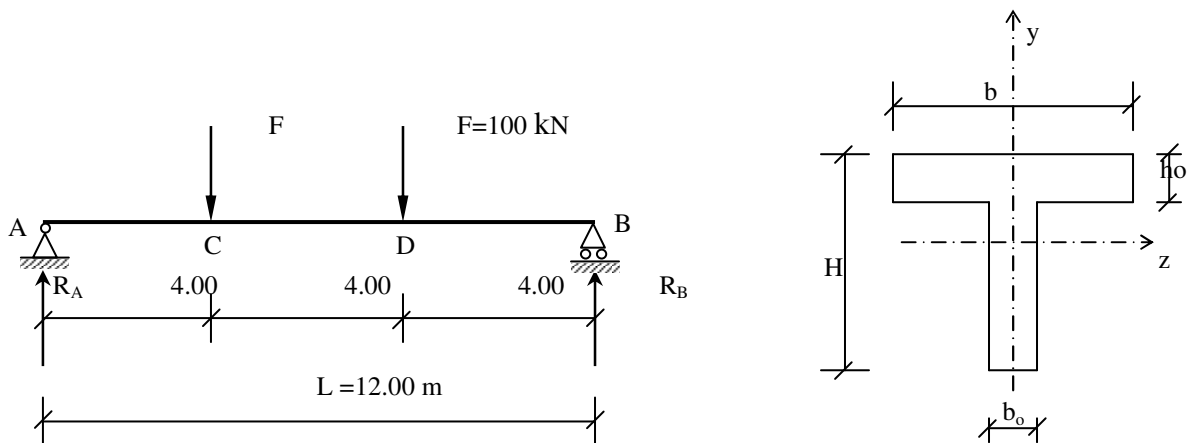


Remarquons que la contrainte maximale a pour expression :

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{bh}$$

6) Applications :

On donne la poutre simplement appuyée qui supporte des charges concentrées (voir figure ci-après).



- Déterminer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissant le long de la poutre ;
- Tracer le diagramme de la contrainte normale σ , au niveau de la section la plus sollicitée ;
- Tracer l'allure du diagramme de la contrainte tangentielle au niveau de la section C et calculer τ_{\max} .

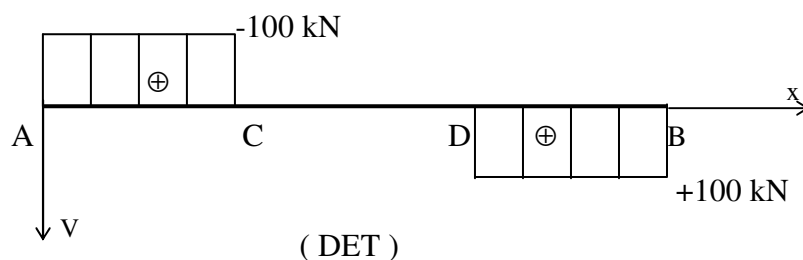
On donne : $H=80$ cm, $b=100$ cm, $h_o=20$ cm et $b_o=30$ cm

Solution :

On a $R_A = R_B = 100$ kN (par raison de symétrie) ;

a-1) détermination du diagramme des efforts tranchants :

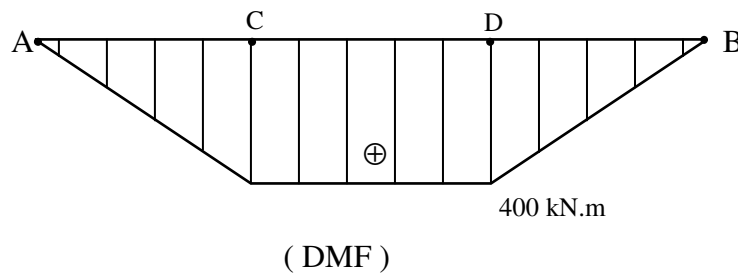
pour	$0 \leq x \leq 4\text{m},$	$V = - R_A = -100$ kN
pour	$4 \leq x \leq 8\text{m},$	$V = -R_A + F = -100 + 100 = 0$
pour	$8 \leq x \leq 12\text{m},$	$V = - R_A + F + F$ $= -100 + 100 + 100 = +100$ kN



a-2) détermination du diagramme des moments fléchissant :

pour $0 \leq x \leq 4\text{m}$, $M = R_A \cdot x = 100 \cdot x \longrightarrow \begin{cases} x = 0, & M = 0 ; \\ x = 4, & M = 400 \text{ kN} \end{cases}$

pour $4 \leq x \leq 8\text{m}$, $M = R_A \cdot x - F \cdot (x - 4) \longrightarrow \begin{cases} x = 4, & M = 400 \text{ kN.m} ; \\ x = 6, & M = 400 \text{ kN.m} ; \\ x = 8, & M = 400 \text{ kN.m} . \end{cases}$



b-1) Caractéristiques géométriques de la section :

- surface : $S = 3800 \text{ cm}^2$
- position de G : $v = 28.95 \text{ cm}$;
 $v' = 51.05 \text{ cm}$.

* inertie : $I_{GZ} = 2122456.17 \text{ cm}^4$

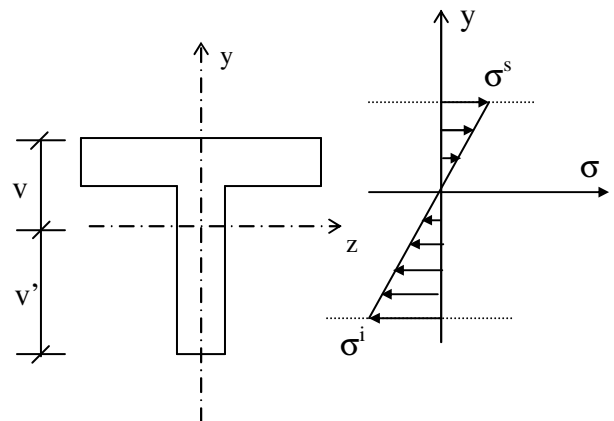
b-2) contrainte normale : $\sigma = \frac{M_{fz} \cdot y}{I_{GZ}}$

avec $M_{fz} = 400 \text{ kN.m}$

(la section la plus sollicitée)

d'où $\sigma = \frac{400 \cdot 10^6}{2122456.17 \cdot 10^4} \cdot y = 0.019 \cdot y$

$\Rightarrow \begin{cases} \sigma(v) = \sigma^s = \sigma(289.5) = 5.5 \text{ Mpa} \\ \text{et } \sigma(-v') = \sigma^i = \sigma(-510.5) = -9.7 \text{ Mpa} \end{cases}$



c) contrainte tangentielle : $\tau = \frac{V \cdot m_{(so)}}{b \cdot I_z}$

en C, l'effort tranchant $V = 100 \text{ kN}$

pour	$y_o = v = 289.5 \text{ mm} \rightarrow m_{so} = 0$	$\rightarrow \tau(289.5) = 0$
	$y_o = 89.5 \text{ mm} \rightarrow m_{so} = 379.10^6 \text{ mm}^3$	$\rightarrow \tau(89.5) = 5.95 \text{ Mpa (pour } b = 300 \text{ mm)}$ $\rightarrow \tau(89.5) = 1.785 \text{ Mpa (pour } b = 1000 \text{ mm)}$
	$y_o = 0 \rightarrow m_{so} = 499.10^6 \text{ mm}^3$	$\rightarrow \tau(0) = 7.84 \text{ Mpa}$

d'où l'allure suivant du diagramme de la contrainte tangentielle :

