

UNIVERSITE DOCTOR MOLAY TAHAR SAIDA
DEPERTEMENT DE MATHEMATIQUE
3eme année LMD

EXAMEN FINAL 1

EXERCICE N°1 :

1. Soit f définie sur \mathbb{R} , dérivable deux fois sur \mathbb{R} telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)^2 - f(x)^2 = 1$$

$$f'(0) = 1$$

Déterminer f .

Même question si on enlève la condition $f'(0) = 1$.

Plus dur : Montrer que l'on peut simplement supposer f de classe C^1

2. Déterminer les fonctions réelles f dérivables en 0 telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$$

EXERCICE N°2 : Résoudre les équations différentielles :

1. $\ln(x) y' + \frac{y}{x} = 1$

2. $x^2 y' + (1-x)y = 1$

3. $y'' - 2ay' + (a^2 + 1)y = \sin x + xe^{ax}$

EXERCICE N°3 : Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$(1) \begin{cases} x' = y \\ y' = x + z \\ z' = y \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x' = 0 \\ y' = z \\ z' = -y \end{cases}$$

Bonne chance