Correction de l'examen final I : Equations différentielles

3ème Année LMD

Exercice N° 1 : (4 pts)

1) On a $f(0)=0$ immédiatement, ensuite $f'(x)=1+f(x)^2 \neq 0$

En dérivant l'égalité $f'(x)^2 - f(x)^2$ il vient (01 pt)

$$2f''f' - 2ff' = 0$$ ce qui après division par f' (qui n'est jamais nul)

donne : $f'' = f$

Ainsi f est de la forme $A\,ch + B\,sh$.

Les conditions initiales $f(0)=0$ et $f'(0)=1$ donnent

alors : $\boxed{f = sh}$.

2) Si on enlève la condition $f'(0)=1$ et donc $f(0)=0$)

on a alors : $f'^2 - f^2 = (A\,sh - B\,ch)^2 - (A\,ch + B\,sh)^2$

$$= (A(sh - ch) + B(ch - sh))(A(sh+ch) + B(ch+sh))$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$: $ch\,x + sh\,x = e^{x}$ et $ch\,x - sh\,x = sh\,x$

donc, $f'(x)^2 - f(x)^2 = \left[(B-A)e^{-x}\right]\cdot\left[(B+A)e^{x}\right] = B^2 - A^2$.

donc, $f(x) = A\,ch + B\,sh$ où $B^2 - A^2 = 1$. (01 pt)

ceci incite à poser. $B = \varepsilon\, sh\,a$ et $A = sh\,a$.

les solution sont toutes les fonctions de la forme

$$\boxed{sh(x+a)} \quad a \in \mathbb{R}.$$

3) On suppose f simplement C^1, en effet :

$$f'(x) = \pm\sqrt{1+f(x)^2}$$

01pt

4) On remplace x et y par "0" pour obtenir $f(0)=0$

l'équation s'écrit aussi :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^x f(h) + e^h f(x) - f(x)}{h}$$

$$= f(x)\,\frac{e^h-1}{h} + \frac{f(h)}{h}e^x$$

On : $\dfrac{e^h-1}{h} = \dfrac{e^h-e^0}{h-0} \xrightarrow{h\to 0} 1$

01pt

$$\frac{f(h)}{h} \xrightarrow{h\to 0} f'(0)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f(x) + f'(0)e^x$$

Alors, on résout l'équation différentielle $y'-y=\lambda e^x$

Les solution sont donc : $y(x) = \lambda x e^x$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

2

Exercice N° 2 : 06 pts

1) $\ln(x)\, y' - \frac{y}{x} = 1$.

Les solutions de l'équation sans second membre sont donc

$$y(x) = \frac{K}{\ln x} \qquad K \in \mathbb{R}.$$

02 pts

la solution particulière : $y_p(x) = x$.

La solution générale est : $\boxed{y(x) = \frac{x+K}{\ln x}},\ K \in \mathbb{R}$

2) $x^2 y' + (1-x) y = 1$

Les solution de l'équation sans second ~~membre~~ sont

donc, $y(x) = K x e^{\frac{1}{x}}$ 02 pts

La solution particulière : $y_p(x) = x+1$.

La solution générale est : $y(x) = K x e^{\frac{1}{x}} + x + 1$.

3) $y'' - 2a y' + (a^2+1) y = \sin x + x e^{ax}$

L'équation caractéristique $r^2 - 2ar + (a^2+1)$.

les racines : $r_1 = a+i$ et $r_2 = a-i$. 02 pts

les solutions de l'équation homogène : $y(x) = (\lambda \cos x + \mu \sin x) e^{ax}$

on applique le principe de superposition, on cherche une solution particulière de $y'' - 2a y' + (a^2+1) y = e^{ax}$.

$$\boxed{y(x) = x e^{ax}}$$

on cherche une solution particulière de $y'' - 2a y + (a^2+1) y = \sin$

Pour cela on considère $y'' - 2ay' + (a^2+1)y = e^{ix}$

1) si $a \neq 0$: $y(x) = \frac{1}{a(a^2+4)}(a\sin x + 2\cos x)$

2) si $a = 0$: $y(x) = -\frac{1}{2} x \cos x$.

Exercice N°3 :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x + z \\ z' = y \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_\lambda(A) = (-\lambda)\left[\lambda^2 - 2\right] \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -\sqrt{2} \\ \lambda_3 = \sqrt{2} \end{cases}$$ 01 pt les valeurs propres.

les vecteurs propres :

$V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 0,5 pt $\quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ 0,5 pt $\quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ 0,5 pt

La matrice de passage : $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 0,5 pt

La matrice diagonale : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ 0,5 pt

$$DY \Rightarrow \begin{cases} y_1 = K_1 \\ y_2 = K_2 e^{-\sqrt{2}x} \\ y_3 = K_3 e^{\sqrt{2}x} \end{cases}$$ 01 pt

$$X = PY \Rightarrow X = \begin{cases} -K_1 - K_2 e^{-\sqrt{2}x} + K_3 e^{\sqrt{2}x} \\ \sqrt{2} K_2 e^{-\sqrt{2}x} + \sqrt{2} K_3 e^{\sqrt{2}x} \\ K_1 - K_2 e^{-\sqrt{2}x} + K_3 e^{\sqrt{2}x} \end{cases}$$ 01 pt

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = z \\ z' = -y \end{cases} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_\lambda(B) = (-\lambda)[\lambda^2 + 1] \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -i \\ \lambda_3 = i \end{cases}$$ les valeurs propres

les vecteurs propres:

$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 0,5 pt $\quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$ 0,5 pt $\quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$ 0,5 pt

La matrice de passage: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \end{pmatrix}$ 0,5 pt

La matrice diagonale: $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ 0,5 pt

$$y' = Dy \Rightarrow \begin{cases} y_1 = K_1 \\ y_2 = K_2 e^{-ix} \\ y_3 = K_3 e^{ix} \end{cases}$$ 1 pt

$$x = Py \Rightarrow x = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 e^{-ix} + K_3 e^{ix} \\ -i K_2 e^{-ix} + i K_3 e^{ix} \end{pmatrix}$$ 1 pt