Université **Dr. Moulay Tahar** de Saïda
Faculté: Des sciences,
Troisièma année Licence en Mathématique

Le 24/01/2018
Département: De Mathématiques
Matière: Optimisation sans contrainte

Corrigé de l'examen Final

Exercice 1. *: **(07 points)***

1. *Montrer que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ possède un minimum, alors celui-ci est unique.*
   Supposons que m_1 et m_2 soient deux minima de f. Il existe alors deux réels x_1 et x_2 pour lesquels m_1 et m_2 sont atteints, respectivement. Comme m_1 est un minimum, alors $m_1 = f(x_1) \leq f(x)$ pour tout x. ***(0,5 points)***
   En prenant $x = x_2$, on d´eduit que $f(x_1) \leq f(x_2) \Longrightarrow m_1 \leq m_2$. ***(0,5 points)***
   De manière analogue, on montre que $m_2 \leq m_1$, si bien que $m_1 = m_2$. ***(0,5 points)***

2. *En Suppose maintenant que f est strictementconvexe. Pour montrer que f atteint son minimum en un unique point,*
   considérons $\overline{x}$ et x^* tels que:

$$f(\overline{x}) = f(x^*) = \min f = m \qquad (\mathbf{0,5points})$$

   on note alors $x = \frac{\overline{x}+x^*}{2}$ et on applique l'inégalité de stricte convexité pour $t = \frac{1}{2}$. $(\mathbf{0,5points})$
   On obtient:

$$f(x) < \frac{1}{2}f(\overline{x}) + \frac{1}{2}f(x^*) = m \qquad (\mathbf{0,5points})$$

   ce qui contredit le fait que m est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

3. (a) i. *On écrit*

$$f(x^*) \leq f(x^* + \epsilon h) = f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), \epsilon h\rangle + |\epsilon h|\,\varphi(\epsilon h), \text{ avec } \varphi(\epsilon h) \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

   On divise alors par $\epsilon > 0$ puis en fait tendre ϵ vers 0^+. En fin , en choisissant dans le développement précédent $\pm h$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, la conclusion s'ensuit. $(\mathbf{1,5points})$

   (a) ii *On utilise en développement de Taylor-Young à l'ordre 2 et on utilise les memes notations que précédemment. On a:*

$$\begin{aligned} f(x^* + h) &= f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), h\rangle + \frac{1}{2}\langle Hess\ f(x^*)\,h, h\rangle + \|h\|^2 \varphi(h) \\ &= f(x^*) + \frac{1}{2}\langle Hess\ f(x^*)\,h, h\rangle + \|h\|^2 \varphi(h) \end{aligned}$$

   Comme précédemment, on remplace h par ϵh, h quelconque, ϵ petit, puis en divise par ϵ^2 et en fait tendre ϵ vers $0.(\mathbf{1,5points})$

4. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et stricte croissante, étudier la convexité de $f^{-} : f(I) \to I$*
Soit $y_1, y_2 \in f(I)$ et $x_1, x_2 \in I$ tels que : $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ soit aussi $t \in [0,1]$. alors

$$f^{-}(ty_1 + (1-t)y_2) = f^{-}(tf(x_1) + (1-t)f(x_2)) \qquad (\mathbf{0,5\ points})$$

par convexité de f

$$\begin{aligned} f^{-}(ty_1 + (1-t)y_2) &\geq f^{-}(f(tx_1 + (1-t)x_2)) = tx_1 + (1-t)x_2 \\ &= t\ f^{-}(y_1) + (1-t)f^{-}(y_2) \quad (\mathbf{0,5\ points}) \end{aligned}$$

Ainsi f^{-} est concave.

Exercice 2. :(**06 points**)

$$f(x,y) = xye^{(x^2+y^2)}$$

(a) *Les poits critiques de f sont des solutions du systhème*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1+2x^2)e^{(x^2+y^2)} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(1+2y^2)e^{(x^2+y^2)} = 0 \end{cases} \quad (\mathbf{01\ point})$$

l'unique solution est $x = y = 0$ (**01 point**).

(b)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2yx(3+2x^2)e^{(x^2+y^2)} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (1+2x^2)(1+2y^2)e^{(x^2+y^2)} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2xy(3+2y^2)e^{(x^2+y^2)}. \end{cases} \quad (\mathbf{01\ point})$$

Au point $(x,y) = (0,0)$ la matrice hessienne $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ comme $\det H_f(0,0) = -1$, $H_f(0,0)$ a des valeurs propres non nulles et de signes opposés, le point $(0,0)$ est un point selle. (**01 point**)

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,1) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x^2} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,1) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x^2} = -\infty$ *donc f admet des valeurs arbitrairement petites vers $(-\infty)$*.(**01 point**)
Elle n'admet pas donc ni maximum ni minimum global sur $\mathbb{R}^2$. (**01 point**)

Exercice 3. (**06 points**)

(a) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2ax \\ 2by \end{pmatrix}$ (**0,5 points**) *et* $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$ (**0,5 points**)
Le seul point critique est donc $(0,0)$et on doit distinguer selon les signes de a et b pour étudier la matrice hessienne. On écarte les cas où a ou b est nul, dont l'analyse est immédiate. (**01 point**)
− si $a > 0$ et $b > 0$, alors la Hessienne est d´efinie positive, donc f admet en $(0,0)$un minimum local (en fait global). (**0.5 points**)
- si $a < 0$et $b < 0$, alors la Hessienne est définie négative, donc f admet en $(0,0)$ un maximum local (en fait global). (**0.25 points**)
– si a et b sont de signe contraire, alors f admet en $(0,0)$un point selle. (**0.25 points**)

(b) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^2 + 2x + 2ay \\ 2x^2y + 2y + 2ax \end{pmatrix}$ (**0.5 points**) *et* $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2+2 & 4xy+2a \\ 4xy+2a & 2x^2+2 \end{pmatrix}$ (**0, 5 points**)
Les points critiques satisfont $x(1+y^2)+ay=0$ *et*$(y(1+x^2)+ax=0$. *Si* $a=0$, *alors le seul point critique est* $(0,0)$. (**0, 5 points**)

Résumons :
– *si* $a=0$*: un seul point critique* $(0,0)$.(**0, 25 points**)
– *si* $0<a<1$ *: pas de point critique.* (**0, 25 points**)
– *si* $a \geq 1$*: deux points critiques* $(\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1})$ *et* $-(-\sqrt{a-1}, \sqrt{a-1})$ *(confondus avec l'origine pour* $a=1$*).* (**0, 25 points**)

Pour $a=0$, *il suffit d'´etudier le Hessienne en* $(0,0)$*:*

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donc il s'agit d'un minimum local. (**0, 25 points**)
Pour $a \geq 1$,
$\nabla^2 f(\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1}) = \nabla^2 f(-\sqrt{a-1}, \sqrt{a-1}) = 2 \begin{pmatrix} a & 2-a \\ 2-a & a \end{pmatrix}$
Le déterminant de cette matrice vaut $16(a-1) > 0$ *et la trace* $4a > 0$, *donc les deux valeurs propres sont strictement positives. On conclut que* f *admet en les deux points critiques des minima relatifs.*(**0, 5 points**)