**Université de Saida Dr. Moulay Tahar**

**Faculté des Sciences – Département de Mathématiques**

**Première Année LMD Mathématiques et Informatique – Module Algèbre 1 (2017/2018).**

**Examen Final du premier semestre – Durée : Deux heures.**

**Exercice 01 : (07 points)**

1. Soit $f : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ une application. Pour toutes parties $\mathbf{A}$ de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ de $\mathbf{F}$, montrer que :
   - Si $f$ est injective alors $f^{-1}(f(\mathrm{A})) = \mathbf{A}$. **(01,5 points)**
   - Si $f$ est surjective alors $f\left(f^{-1}(\mathrm{B})\right) = \mathbf{B}$. **(01,5 points)**
   - Montrer que $f\left(f^{-1}(\mathrm{B})\right) = \mathrm{B} \cap f(E)$. Etudier le cas où $f$ est surjective. **(02 points)**
2. Montrer que la fonction $f$ définie de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ est bijective, et donner sa fonction réciproque $f^{-1}$. **(02 points)**

**Exercice 02 : (03 points)**

Soit $E$ un ensemble et soit $A$ une partie de $E$. On définit dans $P(E)$ la relation suivante :

$$X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y, \text{ pour tout couple } (X, Y) \text{ de parties de } E.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. **(01,5 points)**
2. Expliciter les classes d'équivalence des parties suivantes $\emptyset, A, E$. **(01,5 points)**

**Exercice 03 : (06 points)**

1. Sur $\mathbf{E} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on définit sur $\mathbf{E}$ une loi interne $*$ par : $x * y = x + y - xy, \quad \forall x, y \in \mathbf{E}$. Montrer que $(\mathbf{E}, *)$ est un groupe abélien. **(03 points)**
2. Montrer que la loi de composition interne $*$ définie sur $\mathbb{R}$ par $a * b = \ln\left(e^a + e^b\right)$ ne possède pas un élément neutre. **(01 point)**
3. Soit $(\mathbf{G}, \cdot)$ un groupe dont l'élément neutre est noté $e$ tel que $x^2 = x \cdot x = e, \forall x \in \mathbf{G}$. Montrer que $(\mathbf{G}, \cdot)$ est commutatif. **(01 point)**
4. Soit $(\mathbf{G}, \cdot)$ un groupe commutatif. Montrer que l'application $\varphi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}$ définie par $\varphi(x) = x^{-1}$ est un homomorphisme ( $x^{-1}$ est le symétrique de $x$). **(01 point)**

**Exercice 04 : (04 points)**

1. Rechercher l'ensemble des solutions complexes de l'équation : $z^6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$. **(02 points)**
2. Soit $z$ un nombre complexe non nul vérifiant $z^5 = \frac{64i}{\bar{z}}$. Déterminer $|z|$. **(01 point)**
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 3z - 9 + 7i = 0$. **(01 points)**

**Indication :** Vous devez bien lire le sujet avant de commencer, et de rédiger vos réponses le plus clairement possible.

**Bon Courage, Les enseignants du module.**