Université de Saida Dr. Moulay Tahar

Faculté des Sciences – Département de Mathématiques

Première Année LMD Mathématiques et Informatique

Corrigé de l'examen Final – Matière : Algèbre 1 (2017/2018).

Exercice 01 : (07 pts) Soit $f : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ une application. $\mathbf{A}$ une partie de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ une partie de $\mathbf{F}$.

1.

Supposons que f est injective et montrons que $f^{-1}(f(A)) = A$.

- Soit $x \in A \Longrightarrow f(x) \in f(A) \Longrightarrow x \in f^{-1}(f(A)) \Longrightarrow A \subset f^{-1}(f(A))$. $(0,75 \text{ pt})$.
- Soit $x \in f^{-1}(f(A)) \Longrightarrow f(x) \in f(A) \Longrightarrow \exists x_1 \in \mathrm{A}$ tel que $f(x) = f(x_1)$. Comme f est injective, on déduit que $x = x_1$, donc $x \in A$ car $x = x_1 \in A$, alors $f^{-1}(f(A)) \subset A$. $(0,75 \text{ pt})$
  D'où l'égalité $f^{-1}(f(A)) = A$.

Supposons que f est surjective et montrons que $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

- Soit $y \in f\left(f^{-1}(B)\right) \Longrightarrow \exists x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Or $x \in f^{-1}(B) \Longrightarrow f(x) \in B$. Donc $y = f(x) \in B$, il suit que $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$. $(0,75 \text{ pt})$
- Soit $y \in B \subset F$. Comme f est surjective, alors $\exists x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$. Il suit que $y = f(x) \in B$ cela implique que $x \in f^{-1}(B)$, donc $y = f(x) \in f\left(f^{-1}(B)\right)$. Alors $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$. $(0,75 \text{ pt})$. D'où l'égalité $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

Montrons que $f\left(f^{-1}(B)\right) = B \cap f(E)$

- Soit $y \in f\left(f^{-1}(B)\right) \Longrightarrow \exists x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Or $x \in f^{-1}(B) \Longrightarrow f(x) \in B$. Donc $y = f(x) \in B$.
  Or $x \in f^{-1}(B) \subset E \Longrightarrow y = f(x) \in f(E)$, il suit que$y = f(x) \in B \cap f(E)$. D'où $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B \cap f(E)$ $(0,75 \text{ pt})$
- Soit $y \in B \cap f(E) \Longrightarrow y \in B$ et $y \in f(E) \Longrightarrow y \in B$ et $\exists x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$. D'où $y = f(x) \in B$. Cela implique que $x \in f^{-1}(B)$, donc $y = f(x) \in f\left(f^{-1}(B)\right)$. Alors $B \cap f(E) \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$. $(0,75 \text{ pt})$. D'où $f\left(f^{-1}(B)\right) = B \cap f(E)$.
- Si f est surjective, alors $f(E) = F$, d'où $f\left(f^{-1}(B)\right) = B \cap F = B$. $(0,50 \text{ pt})$

2. Soit la fonction f définie de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$.
   - Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
     $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow \frac{2x_1-1}{x_1+2} = \frac{2x_2-1}{x_2+2} \Longrightarrow (2x_1 - 1)(x_2 + 2) = (2x_2 - 1)(x_1 + 2)$.

Après un simple calcul, on trouve $x_1 = x_2$. Donc f est injective. $(0,75 \text{ pt})$

- Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $y = f(x) \Rightarrow y = \frac{2x-1}{x+2} \Rightarrow yx + 2y = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{-2y-1}{y-2}, y \neq 2$. Donc $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \exists x = \frac{-2y-1}{y-2} \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \ / \ y = f(x)$.
  D'où f est surjective. $(0,75 \text{ pt})$
  Conclusion f est bijective.
- f^{-1} est définie de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f^{-1}(x) = \frac{-2x-1}{x-2} = \frac{2x+1}{2-x}$. $(0,50 \text{ pt})$

Exercice 02 : (03 pts) Soit la relation $\mathcal{R}$ définie sur $P(E)$ par $X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   - Soit $X \in P(E)$. On a $A \cap X = A \cap X \Rightarrow X\mathcal{R}X$, d'où $\mathcal{R}$ est réflexive. $(0,5 \text{ pt})$.
   - Soient $X, Y \in P(E)$. $X\mathcal{R}Y \Rightarrow A \cap X = A \cap Y \Rightarrow A \cap Y = A \cap X \Rightarrow Y\mathcal{R}X$, d'où $\mathcal{R}$ est symétrique. $(0,5 \text{ pt})$.
   - Soient $X, Y, Z \in P(E)$. $\begin{cases} X\mathcal{R}Y \\ Y\mathcal{R}Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cap X = A \cap Y \\ A \cap Y = A \cap Z \end{cases} \Rightarrow A \cap X = A \cap Z \Rightarrow X\mathcal{R}Z$, d'où $\mathcal{R}$ est transitive. $(0,5 \text{ pt})$. **Conclusion :** $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2.
   - $\overline{\emptyset} = \{X \in P(E) / X\mathcal{R}\emptyset\} = \{X \in P(E) / A \cap X = A \cap \emptyset\} = \{X \in P(E) / A \cap X = \emptyset\}$.
     $\overline{\emptyset} = \{X \in P(E) / X \subset C_E^A\} = P(C_E^A)$. $(0,5 \text{ pt})$.
   - $\overline{E} = \{X \in P(E) / X\mathcal{R}E\} = \{X \in P(E) / A \cap X = A \cap E\} = \{X \in P(E) / A \cap X = A\}$
     $\overline{E} = \{X \in P(E) / A \subset X\}$. $(0,5 \text{ pt})$.
   - $\overline{A} = \{X \in P(E) / X\mathcal{R}A\} = \{X \in P(E) / A \cap X = A\} = \{X \in P(E) / A \subset X\}$. $(0,5 \text{ pt})$.

Exercice 03 : (06 pts)

1. Sur $\mathrm{E} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on définit sur E une loi interne $*$ par : $x * y = x + y - xy, \quad \forall x, y \in \mathrm{E}$
   - Soient $x, y \in E$. On a $x * y = x + y - xy = y + x - yx = y * x$. Donc la loi $*$ est commutative. $(0,5 \text{ pt})$
   - $\forall x, y, z \in \mathrm{E}$. $(x * y) * z = (x + y - xy) * z = x + y - xy + z - zx + yz + xyz$.

$(x * y) * z = x + (y + z + yz) - x(y + z - yz) = x + (y * z) - x(y * z) = x * (y * z)$.

Donc la loi $*$ est associative. $(0,5 \text{ pt})$

- Soit $e \in E$ l'élément neutre pour la loi $*$ (s'il existe). On a :
  $\forall x \in \mathrm{E}, : x * e = e * x = x \Rightarrow x + e - xe = x \Rightarrow e(1 - x) = 0 \Rightarrow e = 0$.

Donc la loi $*$ admet $e = 0$ comme élément neutre. (01 pt).

- $\forall x \in \mathrm{E}$, on note x' le symétrique de par rapport à la loi$*$. On a
  $x * x' = x' * x = 0 \Rightarrow x + x' - xx' = 0 \Rightarrow x' = \frac{x}{x-1}$ car $x \neq 1$.

Donc $\forall x \in \mathrm{E}, \exists x' = \frac{x}{x-1} \in E \ / \ x * x' = x' * x = 0$. (01 pt). $(\mathrm{E}, *)$ est un groupe abélien.

2. Supposons que la loi de composition interne $*$ définie sur $\mathbb{R}$ par $a * b = \ln(e^a + e^b)$ possède un élément neutre qu'on note h. On a $\forall a \in \mathbb{R}$, $a * h = h * a = a$.
   Il suit que $\ln(e^a + e^h) = a = \ln(e^a)$ ce qui donne $e^a + e^h = e^a$, d'où $e^h = 0$. Impossible,
   Donc la loi $*$ ne possède pas un élément neutre. (01 pt).

3. Soit $(\mathbf{G}, \cdot)$ un groupe dont l'élément neutre est noté $\boldsymbol{e}$ tel que $\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{G}$.
Soient $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{G}$. On a $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{G}$, d'où $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^2 = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{e}$.
Or $\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e} = \boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}$. Il suit que $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{e}$.
En composant à gauche avec $\boldsymbol{x}$ et à droite avec $\boldsymbol{y}$, on obtient $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$.
Alors $(\mathbf{G}, \cdot)$ est commutatif. **(01pts).**
4. Soit $(\mathbf{G}, \cdot)$ un groupe commutatif. Pour tous $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{G}$, on a :
$\varphi(x \cdot y) = (x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$ car $(\mathbf{G}, \cdot)$ est un groupe commutatif. Il suit $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$. D'où φ est un homomorphisme. **(01pts)**

<u>Exercice 04 :</u> **(04 pts)**

1. $z^6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. **(0,25 pt)**

Les solutions sont : $z_k = e^{i\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{6}\right)}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. **(0,25 pt)**
Il suit que :

$$z_0 = e^{i\left(\frac{2\pi}{18}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{9}\right)} \text{ (0,25 pt)}$$

$$z_1 = e^{i\left(\frac{8\pi}{18}\right)} = e^{i\left(\frac{4\pi}{9}\right)} \text{ (0,25 pt)}$$
$$z_2 = e^{i\left(\frac{14\pi}{18}\right)} = e^{i\left(\frac{7\pi}{9}\right)} \text{ (0,25 pt)}$$
$$z_3 = e^{i\left(\frac{20\pi}{18}\right)} = e^{i\left(\frac{10\pi}{9}\right)} \text{ (0,25 pt)}$$
$$z_4 = e^{i\left(\frac{26\pi}{18}\right)} = e^{i\left(\frac{13\pi}{9}\right)} \text{ (0,25 pt)}$$
$$z_4 = e^{i\left(\frac{32\pi}{18}\right)} = e^{i\left(\frac{16\pi}{9}\right)} \text{ (0,25 pt)}$$

2. $z^5 = \frac{64i}{\bar{z}} \Longrightarrow z^5\bar{z} = 64i \Longrightarrow |z^5\bar{z}| = |64i| = 64 \Longrightarrow |z|^6 = 64 = 2^6$ car $|z| = |\bar{z}|$.
D'où $|z| = 2$ car $|z| \geq 0$ **(01pts)**
3. $z^2 + 3z - 9 + 7i = 0$
$\Delta = 9 - 4(-9 + 7i) = 45 - 28i$. **(0,25 pt)**

Les racines carrées de $\Delta = 2 + 2i\sqrt{3}$ sont $\delta_1 = 7 - 2i$ et $\delta_2 = -7 + 2i$. **(0,25 pt)**

Les solutions sont :
$z_1 = \frac{-3+7-2i}{2} = 2 - i$ **(0,25 pt)**
$z_2 = \frac{-3-7+2i}{2} = -5 + i$ **(0,25 pt).**