Université Dr Tahar Moulay Saida

Faculté des Sciences — Département de Mathématiques

$1^{\text{ière}}$ Année Licence M.I — Hiver 2018

Examen Final en Analyse 1
2 heures

Exercice 1. Soit l'ensemble

$$X = \left\{ \frac{x+1}{x+2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant -3 \right\}.$$

Montrer que X admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

Exercice 2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \exp\Big(-\frac{x}{n}\Big) - 2(1-x).$$

1. Dans cette question, l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.
   (a) Montrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]0,1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
   (c) Montrer que $f_{n+1}(x_n)$ est strictement positif.
2. On considère maintenant la suite de terme général x_n.
   (a) Montrer à l'aide de la question pécédente que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On notera $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.
3. Dans cette partie, il s'agit de calculer x.
   (a) Enoncer le théorème des gendarmes (ou d'encadrement) pour les suites réelles.
   (b) Montrer que la suite $\Big(-\frac{x_n}{n}\Big)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) Calculer x.

Exercice 3. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (x-2)^2 \ln(x^3 - 8).$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Prouver que f est prolongeable par continuité en $x_0 = 2$.

Indication : $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln(x) = 0$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4.
1. Soit $x > 0$. Montrer qu'il existe un $c \in]0,x[$ tel que $e^x - 1 = xe^c$.
2. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, donnée par
$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x.$$
   Dresser le tableau de variation de la dérivée f' de f. Quel est le signe de f' sur $]0,+\infty[$?
3. Utiliser la question précédente pour dresser le tableau de variation de f.
4. En déduire l'inégalité
$$f(x) > 0, \quad \forall x > 0.$$
5. En déduire que
$$e^x - 1 > xe^{\frac{x}{2}}.$$
6. Enfin, obtenir que
$$c \in \Big]\frac{x}{2}, x\Big[.$$

Indication : $e^a e^b = e^{a+b}, \quad a, b \in \mathbb{R}$.

◀ Bon courage▶
◀ Dr F.Z. Mostefai ▶