Université Dr Tahar Moulay Saida

Faculté des Sciences — Département de Mathématiques

1ière Année Licence M.I — Hiver 2018

Examen Final en Analyse 1
Correction

Exercice 1. Soit l'ensemble

$$X = \Big\{ \frac{x+1}{x+2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant -3 \Big\}.$$

Montrer que X admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

Correction 1. (3pts) Les éléments de l'ensemble X sont les images d'une fonction f définie de $]-\infty, -3]$ vers $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}.$$

Ce qui nous raméne à étudier cette fonction. f est définie, continue et dérivable sur $]-\infty, -3]$ (-2 n'est pas un élément de l'intervalle)

$$f'(x) = \frac{1 \times (x+2) - (x+1) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} > 0.$$

f est alors strictement croissante sur $]-\infty, -3]$, la borne inférieure de X est donc

$$\inf X = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1.$$

Et la borne supérieure de X est

$$\sup X = f(-3) = 2.$$

Exercice 2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \exp\Big(-\frac{x}{n}\Big) - 2(1-x).$$

1. Dans cette question, l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.
   (a) Montrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
   (c) Montrer que $f_{n+1}(x_n)$ est strictement positif.
2. On considère maintenant la suite de terme général x_n.
   (a) Montrer à l'aide de la question pécédente que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On notera $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.
3. Dans cette partie, il s'agit de calculer x.
   (a) Enoncer le théorème des gendarmes (ou d'encadrement) pour les suites réelles.
   (b) Montrer que la suite $\Big(-\frac{x_n}{n}\Big)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) Calculer x.

Correction 2. 1. (a) (1pt) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$

$$f_n'(x) = -\frac{1}{n} \exp\Big(-\frac{x}{2}\Big) + 2 \leqslant -\frac{1}{n} + 2 = \frac{-1+2n}{n} > 0 \quad \text{car } n \geqslant 1.$$

la dérivée de f_n etant positive sur $\mathbb{R}^+$, f_n est alors strictement croissante.

(b) (1pt) $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = \exp\Big(-\frac{1}{n}\Big) > 0$. La fonction f_n étant continue sur l'intervalle $[0, 1]$, f_n est une bijection de $]0, 1[$ sur $\Big]-1, \exp\Big(-\frac{1}{n}\Big)\Big[$,il existe un unique $x_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

(c) (1pt) On a

$$f_n(x_n) = 0 \Leftrightarrow \exp\Big(-\frac{x_n}{n}\Big) - 2(1-x_n) = 0 \Leftrightarrow \exp\Big(-\frac{x_n}{n}\Big) = 2(1-x_n),$$

$$f_{n+1}(x_n) = \exp\Big(-\frac{x_n}{n+1}\Big) - 2(1-x_n) = \exp\Big(-\frac{x_n}{n+1}\Big) - \exp\Big(-\frac{x_n}{n}\Big)$$

Comme

$$n+1 > n \quad \text{alors} \quad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

Puis en mutipliant par $x_n > 0$ et -1 on a

$$-\frac{x_n}{n} < -\frac{x_n}{n+1}$$

On obtient

$$\exp\Big(-\frac{x_n}{n}\Big) < \exp\Big(-\frac{x_n}{n+1}\Big)$$

Ce qui montre que

$$f_{n+1}(x_n) > 0.$$

2. (a) (1pt) Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

$$0 = f_{n+1}(x_{n+1}) < f_{n+1}(x_n) \Leftrightarrow x_{n+1} < x_n.$$

Donc le suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

(b) (1pt) Comme $x_n \in]0,1[$, la suite est minorée par 0, comme elle est décroissante, elle converge vers une limite x.

3. (a) (1pt) Théorème des gendarmes : Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites réelles vérifiant

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant v_n \leqslant w_n).$$

Si les suites $(u_n)_n$, et $(w_n)_n$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors la suite $(v_n)_n$ converge vers ℓ.

(b) (1pt)On a

$$0 < x_n < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{x_n}{n} < \frac{1}{n},$$

d'aprè le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} -\frac{x_n}{n} = 0.$$

(c) (1pt) On fait tendre n vers l'infini dans l'expression

$$\exp\Big(-\frac{x_n}{n}\Big) - 2(1-x_n) = 0$$

$$\exp(0) - 2(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}.$$

Exercice 3. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (x-2)^2 \ln(x^3 - 8).$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Prouver que f est prolongeable par continuité en $x_0 = 2$.

Indication : $\lim_{x\to 0} x^n \ln(x) = 0$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction 3. 1. (2pts) f est définie si et seulement si

$$x^3 - 8 > 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x^2+2x+4) > 0.$$

Or comme le déscriminant du polynôme x^2+2x+4 est négatif ($\Delta = -3 < 0$) alors il est du signe du coefficient de x^2, par suite $x^2+2x+4 > 0$. Ainsi f est définie si et seulement si $x > 2$. On en conclut que

$$\mathcal{D}_f =]2, +\infty[.$$

2. (2pts) f est prolongeable par continuité en $x_0 = 2$, si elle est continue sur $]2, +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe et est finie. Or f est continie sur $\mathcal{D}_f$ par composition de fonctions continues ($x \to (x-2)^2$, $x \to x^3 - 8$ et $x \to \ln(x)$.) De plus

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} (x-2)^2 \ln(x^3-8) \\
&= \lim_{x\to 2^+} (x-2)^2 \ln(x-2) + \lim_{x\to 2^+} (x-2)^2 \ln(x^2+2x+4) \\
&= \lim_{X\to 0} X^2 \ln(X) + \lim_{X\to 0} X^2 \ln(12) = 0
\end{aligned}$$

Ou $X = x - 2$. Ainsi f admet un prolongement par continuité en $x_0 = 2$, $\tilde{f} : [2, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} (x-2)^2 \ln(x^3-8), & \text{si } x > 2, \\ 0, & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Exercice 4. 1. Soit $x > 0$. Montrer qu'il existe un $c \in]0, x[$ tel que $e^x - 1 = xe^c$.

2. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, donnée par

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x.$$

Dresser le tableau de variation de la dérivée f' de f. Quel est le signe de f' sur $]0, +\infty[$?

3. Utiliser la question précédente pour dresser le tableau de variation de f.
4. En déduire l'inégalité

$$f(x) > 0, \quad \forall x > 0.$$

5. En déduire que

$$e^x - 1 > xe^{\frac{x}{2}}.$$

6. Enfin, obtenir que

$$c \in \left]\frac{x}{2}, x\right[.$$

Indication : $e^a e^b = e^{a+b}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$

Correction 4. 1. (1pt) La fonction exponentielle définie sur $[0, x]$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, x[$, tel que

$$e^x - e^0 = e^c(x - 0).$$

d'ou le résultat :

$$e^x - 1 = xe^c.$$

2. (1pt) La fonction f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) - 1$$

et

$$f''(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}$$

On a

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 0.$$

Et $f''(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty, \qquad \text{et } f'(0) = 0.$$

On en déduit de cela le tableau de variation de f'.

x	0		∞
$f''(x)$	0	$+$	
$f'(x)$			$+\infty$
		$\nearrow$	
	0		

Donc pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$.

3. (1pt)

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}}(1 - e^{-x} - xe^{-\frac{x}{2}})$$

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-\frac{x}{2}} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

$$f(0) = 1 - 1 - 0 = 0.$$

x	0		∞
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$			$+\infty$
		$\nearrow$	
	0		

4. (0.5pt) Par conséquent, pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.
5. (1pt)Pour tout $x > 0$,

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} > x \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right) > xe^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow e^{x} - 1 > xe^{\frac{x}{2}}.$$

6. (0.5pt) Pour tout $x > 0$,

$$e^{x} - 1 = xe^{c} > xe^{\frac{x}{2}}.$$

Comme $x > 0$, cela entraine que $e^{c} > e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow c > \frac{x}{2}$, et d'autre part $c < x$. D'ou

$$c \in \left]\frac{x}{2}, x\right[.$$