



## CORRIGÉ ABREGÉ DE LA SÉRIE D'EXERCICES n° 3 de ThL

par : M.S. Habet, C. Cherifi, N. Otmani, F. Bouhatem

### EXERCICE 1 :

$$L = \{a, b\} \cdot \{a, b, c\}^2 \cup \{c\} \cdot \{a, b\}.$$

$$a) L \parallel a = (\{a, b\} \cdot \{a, b, c\}^2) \parallel a \cup (\{c\} \cdot \{a, b\}) \parallel a = \{a, b, c\}^2 = S1$$

$$L \parallel b = (\{a, b\} \cdot \{a, b, c\}^2) \parallel b \cup (\{c\} \cdot \{a, b\}) \parallel b = \{a, b, c\}^2 = S1$$

$$L \parallel c = (\{a, b\} \cdot \{a, b, c\}^2) \parallel c \cup (\{c\} \cdot \{a, b\}) \parallel c = \{a, b\} = S2$$

$$S1 \parallel a = \{a, b, c\} = S3$$

$$S1 \parallel b = \{a, b, c\} = S3$$

$$S1 \parallel c = \{a, b, c\} = S3$$

$$S2 \parallel a = \epsilon = S4$$

$$S2 \parallel b = \epsilon = S4$$

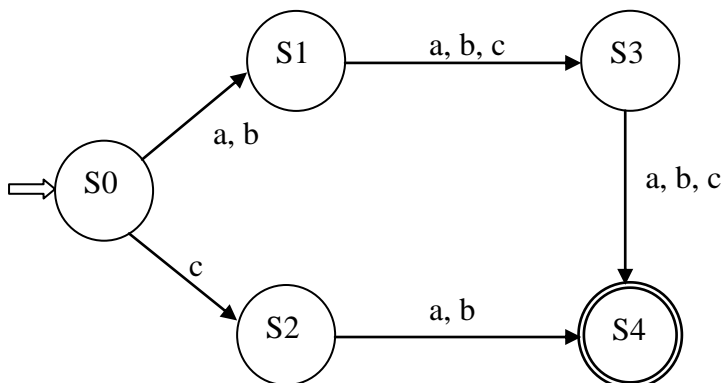
$$S2 \parallel c = \emptyset$$

$$S3 \parallel a = S3 \parallel b = S3 \parallel c = \epsilon = S4$$

$$S4 \parallel a = S4 \parallel b = S4 \parallel c = \emptyset$$

b) L est régulier car il a un nombre fini de dérivées.

c) Soit  $S0 = L$ . Les états de l'automate reconnaissant L sont les états  $S_i, i=0, \dots, 4$  ; l'état initial étant  $S0$  ; il y a un seul état final, c'est  $S4$  (car il contient  $\epsilon$ ).



### EXERCICE 2 :

$$a) \text{ Soit } S0 = \{ a^{2.n} / n \geq 0 \} = \{ \epsilon, aa, aaaa, a^6, \dots, a^{2.n}, \dots \}$$

On a :

$$S0 \parallel a = \{ a, aaa, a^5, \dots, a^{2.n-1}, \dots \} = \{ a^{2.n+1} / n \geq 0 \} = S1$$

$$S1 \parallel a = \{ \epsilon, aa, a^4, \dots, a^{2.n-2}, \dots \} = \{ a^{2.n} / n \geq 0 \} = S0$$

Le langage  $\{ a^{2.n} / n \geq 0 \}$  a un nombre fini de dérivées :  $S0 \parallel a^k = S0$  si  $k$  est pair, et  $= S1$  sinon.

Par conséquent il est régulier.

b) Soit  $S_0 = \{ a^n.b^m / n, m \geq 1 \}$ .

On a :

$$S_0 \parallel a = \{ a^n.b^m / n \geq 0, m \geq 1 \} = S_1$$

$$S_0 \parallel b = \emptyset$$

$$S_1 \parallel a = S_1$$

$$\begin{aligned} S_1 \parallel b &= (\{ a^n.b^m / n \geq 1, m \geq 1 \} \cup \{ a^n.b^m / n = 0, m \geq 1 \}) \parallel b \\ &= S_0 \parallel b \cup \{ b^m / m \geq 1 \} \parallel b = \emptyset \cup \{ b^m / m \geq 0 \} = \{ b^m / m \geq 0 \} = S_2 \end{aligned}$$

$$S_2 \parallel a = \emptyset$$

$$S_2 \parallel b = S_2$$

Après  $S_2$ , on n'obtient plus de nouveaux états ; donc il y a un nombre fini de dérivées ; par conséquent  $\{ a^n.b^m / n, m \geq 1 \}$  est régulier.

c) Soit  $S_0 = \{ a^n.b^n / n \geq 0 \}$ . Calculons les dérivées de  $S_0$  par rapport aux mots  $a^k$ , pour  $k \geq 1$  ; pour cela on note :  $S_k = S_0 \parallel a^k$  (pour  $k \geq 1$ ).

On peut remarquer déjà que  $S_k = S_{k-1} \parallel a$ , pour  $k \geq 1$  ;

on a donc :

$$S_1 = S_0 \parallel a = \{ a^{n-1}.b^n / n \geq 1 \} = \{ a^{n-1}.b^{n-1} / n \geq 1 \} . \{ b \} = \{ a^n.b^n / n \geq 0 \} . \{ b \} = S_0 . \{ b \}$$

$$S_2 = S_1 \parallel a = (S_0 . \{ b \}) \parallel a = (S_0 \parallel a) . \{ b \} \cup (\{ b \} \parallel a) = (S_0 \parallel a) . \{ b \} = (S_0 . \{ b \}) . \{ b \} = S_0 . \{ bb \}$$

$$S_3 = S_2 \parallel a = (S_0 . \{ bb \}) \parallel a = (S_0 \parallel a) . \{ bb \} = (S_0 . \{ b \}) . \{ bb \} = S_0 . \{ bbb \} = S_0 . \{ b^3 \}$$

...

On peut généraliser en démontrant par récurrence que :

$$S_k = S_{k-1} \parallel a = (S_0 . \{ b^{k-1} \}) \parallel a = (S_0 \parallel a) . \{ b^{k-1} \} = (S_0 . \{ b \}) . \{ b^{k-1} \} = S_0 . \{ b^k \}, \text{ pour tout } k \geq 1.$$

Pour chaque valeur de  $k$  dans  $\mathbb{N}$  (entiers naturels), on a un langage  $S_k$  différent des autres langages  $S_i$  (pour  $i \neq k$ ). On peut donc conclure qu'il y a une infinité de langages  $(S_k)_{k \geq 1}$ , tous différents les uns des autres et par conséquent il y a une infinité de dérivées du langage  $S_0$ , donc celui-ci n'est pas régulier.

d) Soit  $L = \{ w.w^R / w \in \{a, b\}^* \}$ .  $L$  n'est pas régulier : si on calcule ses dérivées, on trouve un nombre infini. On peut aussi procéder à une démonstration par l'absurde : On suppose que  $L$  est régulier, donc d'après le théorème de Nerode, le nombre de ses dérivées par rapport aux mots sur  $V = \{a, b\}$  est fini. Donc il existe deux mots  $u$  et  $v$  tels que  $u \neq v$  et  $L \parallel u = L \parallel v$  ; on peut supposer que  $u$  ou  $v$  contiennent des mélanges de lettres  $a$  et  $b$ .

$$L \parallel u = \{ x.x^R.u^R / x \in \{a, b\}^* \}, \text{ c'est-à-dire qu'un mot } \alpha \in L \parallel u \text{ s'écrit comme } \alpha = x.x^R.u^R.$$

Comme  $\alpha \in L \parallel v$ , alors  $v.\alpha \in L$  ; donc  $v.x.x^R.u^R \in L$  pour tout  $x \in \{a, b\}^*$ . Par conséquent  $v^R = u^R$  ; d'où  $v = u$  : contradiction.

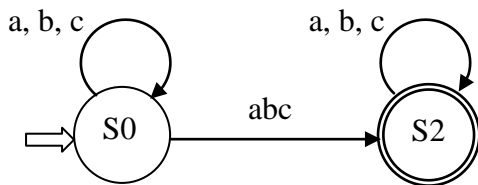
Donc  $L$  n'est pas régulier.

### EXERCICE 3 :

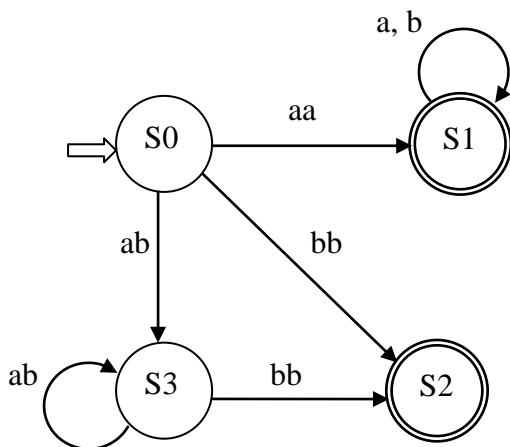
I)

I-1) L'expression régulière :  $(a \cup b \cup c)^*.a.b.c.(a \cup b \cup c)^*$  dénote le langage des mots construits sur  $\{a, b, c\}$  et qui contiennent la sous-chaine  $abc$ .

Un automate équivalent est le suivant (il est généralisé) :



I-2) automate (généralisé aussi) pour l'expression régulière :  $aa.(a \cup b)^* \cup (ab)^*.bb$



II)

II-1) Soit  $S0 = (1.1^*.0.0^*.1)^*.0.1^*$  ; S0 sera un état non final car le langage dénoté par l'expression ne contient pas  $\epsilon$  (le plus petit mot du langage est : 0).

Calculons les dérivées de S0, pour cela posons  $\alpha = (1.1^*.0.0^*.1)^*$  :

$S0 \parallel 0 = (\alpha \parallel 0).0.1^* \cup (0.1^*) \parallel 0 = ((1.1^*.0.0^*.1) \parallel 0).\alpha.0.1^* \cup 1^* = \emptyset \cup 1^* = 1^* = S1$  (S1 est final car le langage qu'il dénote contient  $\epsilon$ )

$S0 \parallel 1 = (\alpha \parallel 1).0.1^* \cup (0.1^*) \parallel 1 = ((1.1^*.0.0^*.1) \parallel 1).\alpha.0.1^* = (1^*.0.0^*.1).\alpha.0.1^* = S2$  (S2 est non final)

$S1 \parallel 0 = \emptyset$

$S1 \parallel 1 = 1^* = S1$

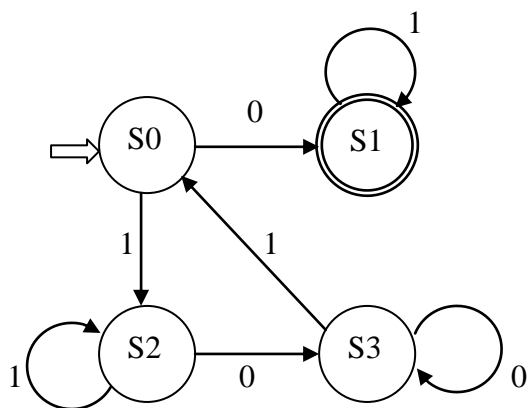
$S2 \parallel 0 = ((1^*.0.0^*.1) \parallel 0).\alpha.0.1^* = 0^*.1.\alpha.0.1^* = S3$  (S3 non final)

$S2 \parallel 1 = ((1^*.0.0^*.1) \parallel 1).\alpha.0.1^* = 1^*.0.0^*.1.\alpha.0.1^* = S2$

$S3 \parallel 0 = (0^*.1.\alpha.0.1^*) \parallel 0 = S3$

$S3 \parallel 1 = (0^*.1.\alpha.0.1^*) \parallel 1 = \alpha.0.1^* = S0$

D'où l'automate :



II-2) Soit  $S0 = (a \cup ba)^*.bb.b^*.a$  ;  $S0$  sera un état non final car le langage dénoté par l'expression ne contient pas  $\varepsilon$  (le plus petit mot du langage est :  $bba$ ).

Calculons les dérivées de  $S0$ , pour cela posons  $\alpha = (a \cup ba)^*$  :

$$S0 \parallel a = (\alpha \parallel a).bb.b^*.a \cup (bb.b^*.a) \parallel a = (\alpha \parallel a).bb.b^*.a = ((a \cup ba) \parallel a).(a \cup ba)^*.bb.b^*.a \\ = \varepsilon.(a \cup ba)^*.bb.b^*.a = \alpha.bb.b^*.a = S0$$

$$S0 \parallel b = (\alpha \parallel b).bb.b^*.a \cup (bb.b^*.a) \parallel b = ((a \cup ba) \parallel b).(a \cup ba)^*.bb.b^*.a \cup (bb.b^*.a) \parallel b = \\ = a.(a \cup ba)^*.bb.b^*.a \cup (b.b^*.a) = a.\alpha.bb.b^*.a \cup (b.b^*.a) = S1 \text{ (S1 non final)}$$

$$S1 \parallel a = ((a.\alpha.bb.b^*.a) \parallel a) \cup ((b.b^*.a) \parallel a) = \alpha.bb.b^*.a = S0$$

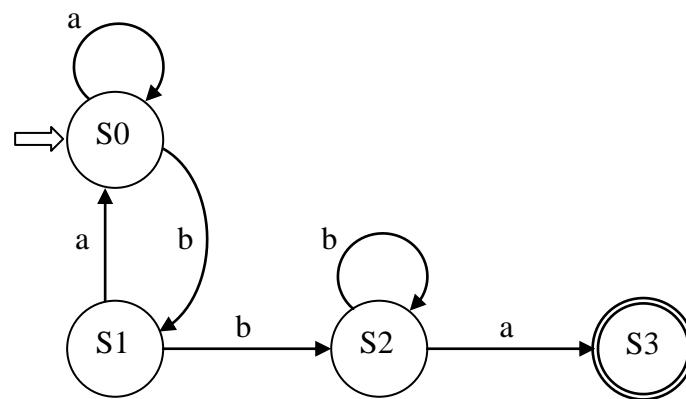
$$S1 \parallel b = ((a.\alpha.bb.b^*.a) \parallel b) \cup ((b.b^*.a) \parallel b) = \emptyset \cup b^*.a = b^*.a = S2 \text{ (S2 non final)}$$

$$S2 \parallel a = ((b^*) \parallel a).a \cup (a \parallel a) = \emptyset \cup \varepsilon = \varepsilon = S3 \text{ (S3 final)}$$

$$S2 \parallel b = b^*.a = S2$$

$$S3 \parallel a = S3 \parallel b = \emptyset$$

D'où l'automate :



#### EXERCICE 4 :

Le résultat à établir dans cet exercice est connu sous le nom du théorème d'Arden.

1) Montrons que  $A^*.B$  est solution de l'équation :  $X = A.X \cup B$  ; pour cela effectuons le remplacement de  $X$  par  $A^*.B$  dans  $A.X \cup B$  :

$$A.(A^*.B) \cup B = (A.A^*.B) \cup B = A^+.B \cup B = (A^+ \cup \varepsilon).B = A^*.B = X ; \text{ d'où la relation.}$$

Montrons que  $A^*.B$  est la solution minimale au sens que  $A^*.B$  est inclus dans toute autre solution  $Y$  de l'équation. Soit  $w \in A^*.B$ , donc  $w$  s'écrit  $w = x.y$  ; où  $x \in A^*$  et  $y \in B$ .

$$x \in A^* \Rightarrow \exists n \geq 0 \text{ tel que } x \in A^n ; \text{ d'où } w \in A^n.B.$$

Soit  $Y$  une solution quelconque de l'équation, on a :

$$Y = A.Y \cup B = A.(A.Y \cup B) \cup B = A^2.Y \cup A.B \cup B = A^2.(A.Y \cup B) \cup A.B \cup B = \\ A^3.Y \cup A^2.B \cup A.B \cup B = \dots = A^{n+1}.Y \cup A^n.B \cup \dots \cup A.B \cup B$$

Or  $w \in A^n.B$  donc  $w \in Y$ , où  $Y$  est toute solution de l'équation. On a donc  $A^*.B \subseteq Y$ .

2) Dans cette question, on suppose :  $\varepsilon \notin A$ . On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe une autre solution différentes  $X'$  différente de  $A^*.B$ .

Soit  $f$  le plus petit mot de  $X'$  qui n'appartient pas à  $A^*.B$ .

$f \in X' \Rightarrow f \in A.X'$  ou  $f \in B$ . On peut écrire que  $f \notin B$  car sinon il appartiendrait à  $A^*.B$ .

Donc  $f \in A.X' \Rightarrow f = g.h$  avec  $g \in A$  et  $h \in X'$ . Or  $\varepsilon \notin A$ , donc  $g \neq \varepsilon$  et donc  $|h| < |f|$ .

Il existe deux cas pour  $h$  :

-  $h \in A^*.B \Rightarrow gh \in A.A^*.B \Rightarrow f \in A^+.B \Rightarrow f \in A^*.B$  ce qui est faux.

-  $h \notin A^*.B$ , sachant que  $h \in X'$  : contradiction car  $h$  est plus petit que  $f$  qu'on a supposé être le petit élément de  $X'$  n'appartenant pas à  $A^*.B$ .

### EXERCICE 5 :

1) On va associer une variable à chaque non terminal de  $g$  :  $X_0$  (associé à  $S$ ),  $X_1$  (à  $A$ ) et  $X_2$  (à  $B$ ).

On traduit les règles de productions de  $P$  en équations d'expressions régulières :

$$\begin{cases} X_0 = a.X_1 \cup \varepsilon \\ X_1 = b.X_1 \cup c.X_2 \\ X_2 = b.X_2 \cup a \end{cases}$$

2) En appliquant le théorème d'Arden (voir exo 4) à la 3<sup>ème</sup> équation, on obtient :  $X_2 = b^*.a$ .

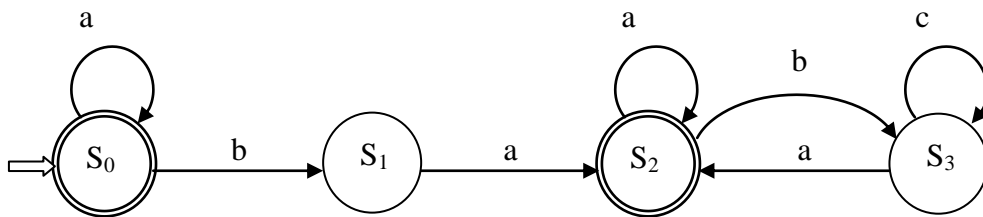
En remplaçant  $X_2$  dans la 2<sup>ème</sup> équation on aura :  $X_1 = b.X_1 \cup c.b^*.a$  ; puis avec le théorème d'Arden on obtient :  $X_1 = b^*.c.b^*.a$ . On remplace dans la première équation et on aura :  $X_0 = a.b^*.c.b^*.a \cup \varepsilon$  qui dénote le langage engendré par  $g$ .

### EXERCICE 6 :

a) Pour trouver l'automate simple associé à  $g$ , on peut décomposer la règle  $S \rightarrow baA$  en deux règles :

$S \rightarrow bC$  et  $C \rightarrow aA$  ; ou  $C$  est un nouveau non terminal.

On construit l'automate simple  $\mathcal{A}$  équivalent en associant un état de l'automate à chaque non-terminal, cet état sera final lorsque le non-terminal associé produit  $\varepsilon$ . Les transitions de  $\mathcal{A}$  seront déduites à partir des règles de productions de  $g$ .



b) Le système d'équations régulières associé à  $\mathcal{A}$  :

$$\begin{cases} X_0 = a.X_0 \cup b.X_1 \cup \varepsilon \\ X_1 = a.X_2 \\ X_2 = a.X_2 \cup b.X_3 \cup \varepsilon \\ X_3 = c.X_3 \cup a.X_2 \end{cases}$$

c) Pour trouver l'expression régulière qui dénote  $L(\mathcal{A})$ , on résout le système de la question b) pour trouver la valeur de  $X_0$ .

De la quatrième équation on a :  $X_3 = c^*.a.X_2$  ; on remplace dans la troisième :

$X_2 = a.X_2 \cup b.c^*.a.X_2 \cup \varepsilon = (a \cup b.c^*.a).X_2 \cup \varepsilon$  qui se résout avec  $X_2 = (a \cup b.c^*.a)^*$ .

On remplace dans la deuxième :  $X_1 = a.(a \cup b.c^*.a)^*$ . Puis dans la première :

$X_0 = a.X_0 \cup b.a.(a \cup b.c^*.a)^* \cup \varepsilon$ . Et on obtient ainsi la solution :  $X_0 = a^*.b.a.(a \cup b.c^*.a)^* \cup \varepsilon$ .

Donc  $L(\mathcal{A})$  est dénoté par l'expression régulière :  $a^*.ba.(a \cup b.c^*.a)^* \cup a^*$ .

----- Fin du corrigé de la série 3 de ThL -----