

## Chapitre III

### Bilan élémentaire de matière-Profil de concentration en écoulement laminaire

#### III.1. Introduction

L'objectif et la formulation des problèmes élémentaires de diffusion à partir des bilans élémentaires de matière effectués sur un élément de volume.

Un bilan de matière est effectué sur un élément de volume de dimension différentielle dans la direction du transfert de matière (Élément de volume perpendiculaire à la direction).

Ainsi :

1. Le bilan donnera une équation différentielle de 1<sup>er</sup> ordre qui gouverne la distribution des flux. Dans cette équation, on peut remplacer le flux de matière par la relation qui le relie au gradient de concentration.
2. Le bilan donnera une équation différentielle de 2<sup>ème</sup> ordre qui gouverne la distribution des concentrations.

Les constantes d'intégration qui vont apparaître seront déterminées par les conditions aux limites qui indiquent les valeurs de concentration ou de flux de surfaces frontières (interfaces).

On distingue deux cas :

1. Système non réactif : dans ce cas, le soluté traverse l'élément de volume sans subir de transformation chimique (pas de réaction chimique).
2. Système réactif : dans ce cas, le soluté traverse l'élément de volume tout en subissant une transformation chimique (système avec réaction chimique) et cette réaction chimique peut être soit homogène ou hétérogène :
  - Réaction chimique homogène : la réaction est la même dans tout le volume et le terme source apparaîtra alors dans le bilan.
  - Réaction chimique hétérogène : la réaction a lieu dans quelques sites seulement et le terme source apparaîtra alors dans les conditions aux limites.

#### III.2. Bilan de matière-Conditions aux limites

Un bilan de matière élémentaire effectué sur un élément de volume de dimension différentielle  $dV$  dans la direction du transfert de matière a pour expression générale :

$$\begin{aligned} & [\text{Flux molaire entrant dans le volume } dV] \\ & - \\ & [\text{Flux molaire sortant du volume } dV] \\ & +/ - \\ & [\text{Flux molaire lié à la production/consommation par la réaction homogène dans le volume } dV] \\ & = \\ & [\text{Flux molaire accumulé dans le volume } dV] \end{aligned}$$

Le signe + : indique une production.

Le signe - : indique une consommation.

Ainsi pour une espèce A, le bilan de matière élémentaire effectué sur un élément de volume de dimension différentielle  $dV$  aura pour expression :

$$\begin{aligned}
 & \text{[Nombre de moles de A entrant dans le volume } dV] \\
 & \quad - \\
 & \quad \text{[Nombre de moles de A sortant du volume } dV] \\
 & \quad +/ - \\
 & \text{[Nombre de moles de A produites ou consommées par la réaction homogène dans le volume } dV] \\
 & \quad = \\
 & \text{[Nombre de moles de A accumulées dans le volume } dV]
 \end{aligned}$$

Dans le cas d'un régime permanent (indépendant du temps), le terme lié à l'accumulation s'annule. Par ailleurs, si le système est non réactif (Rien n'est consommé et rien n'est produit), le terme lié à la production/consommation s'annule également. Ainsi, dans ce cas, le bilan de matière élémentaire aura pour expression :

$$[\text{Flux molaire entrant dans le volume } dV] - [\text{Flux molaire sortant du volume } dV] = 0$$

La résolution de l'équation obtenue pour ce bilan de matière donnera lieu à :

1. Une équation différentielle de 1<sup>er</sup> ordre pour les flux.

L'espèce A peut entrer et sortir de l'élément de volume par diffusion  $\vec{J}_A^*$  et par le mouvement du milieu  $C_A \vec{V}^*$ .

2. Une équation différentielle de 2<sup>ème</sup> ordre pour les concentrations.

La résolution de ces deux équations différentielles va générer deux constantes d'intégration  $C_1$  et  $C_2$  à déterminer par les conditions aux limites. Elles seront déterminées aux surfaces frontières (interfaces) :

Conditions aux limites utilisées :

$$\begin{cases}
 - & C_A = C_{A0} \text{ ou } y_A = y_{A0} & \text{pour les concentrations} \\
 - & N_A = N_{A0} & \text{pour les flux}
 \end{cases}$$

### III.3. Diffusion à travers un gaz stagnant ou gaz immobile

#### III.3.1. Définition

On dit que l'on a diffusion à travers une phase stationnaire lorsque l'interface (ou interphase) est perméable à un seul constituant. C'est le cas de la diffusion d'une substance A à travers la phase stationnaire (gaz stagnant ou immobile) B.

Exemple : Absorption de la vapeur d'eau du mélange (Air (B)-Vapeur d'eau (A)) par une solution d'alumine C.

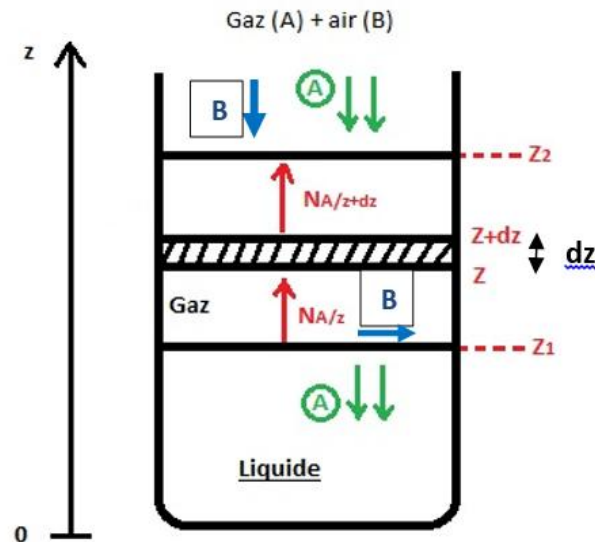


Figure III.1 : Schéma représentatif d'une diffusion à travers une phase stagnante

### III.3.2. Equations régissant la diffusion à travers un gaz stagnant

Soit le cas d'un mélange binaire (A+B) tel que l'espèce B est un gaz immobile à travers duquel l'espèce A va diffuser pour être absorbée par une phase liquide.

La densité de flux pour l'espèce A a pour expression :

$$\vec{N}_A = \vec{J}_A^* + y_A \cdot (\vec{N}_A + \vec{N}_B)$$

Comme dans la phase gazeuse, l'espèce B est immobile alors :  $\vec{N}_B = \vec{0}$

$$\text{D'où : } \vec{N}_A = \vec{J}_A^* + y_A \cdot \vec{N}_A \Rightarrow \vec{N}_A = \frac{\vec{J}_A^*}{1 - y_A}$$

D'après la 1<sup>ère</sup> loi de Fick, on a :  $\vec{J}_A^* = -D \cdot \overrightarrow{\text{grad}} C_A$

Comme dans ce cas, le transfert est considéré unidirectionnel selon  $zz'$ , alors la 1<sup>ère</sup> loi de Fick devient :  $\vec{J}_A^* = -D \cdot \frac{\partial C_A}{\partial z} \Rightarrow J_A^* = -D \cdot \frac{dC_A}{dz}$

A pression P et température T constantes, le coefficient de diffusion D et la concentration totale C sont constants.

Or :  $C_A = y_A \cdot C$  ce qui va conduire à :  $J_A^* = -D \cdot C \cdot \frac{dy_A}{dz}$

L'expression de la densité de flux peut enfin s'écrire comme suit :

$$N_A = - \frac{D \cdot C}{1 - y_A} \cdot \frac{dy_A}{dz}$$

### Bilan de matière sur un élément différentiel

Dans ce qui suit, un bilan de matière sera établi sur un élément différentiel  $dz$  (voir schéma ci-dessus). Dans le cas de l'absorption, le système est non réactif (pas de réaction chimique) et si on considère que le régime est permanent, alors le bilan de matière peut s'écrire comme suit :

$$[\text{Flux molaire entrant de A dans le volume } dV] - [\text{Flux molaire sortant de A du volume } dV] = 0$$

Comme la section  $S$  est indépendante de la cote  $z$ , l'équation du bilan de matière devient :

$$S \cdot \vec{N}_{Az} - S \cdot \vec{N}_{Az+dz} = 0$$

$$\vec{N}_{Az} - \left( \vec{N}_{Az} + \frac{d\vec{N}_{Az}}{dz} dz \right) = 0$$

$$\text{D'où : } -\frac{d\vec{N}_{Az}}{dz} = 0 \quad \text{d'où : } \vec{N}_{Az} = \text{constante}$$

Ainsi, la densité de flux de A est constante car elle est indépendante de la cote  $z$ .

$-\frac{d\vec{N}_{Az}}{dz} = 0$  est une équation différentielle de 1<sup>er</sup> ordre qui gouverne la distribution des flux.

$$\text{Par ailleurs : } N_A = -\frac{D \cdot C}{1-y_A} \cdot \frac{dy_A}{dz}$$

$$\text{D'où : } -\frac{d}{dz} \left( -\frac{D \cdot C}{1-y_A} \cdot \frac{dy_A}{dz} \right) = 0$$

A pression  $P$  et température  $T$  constantes, le coefficient de diffusion  $D$  et la concentration totale  $C$  sont constants et aussi indépendants de la cote  $z$ .

$$\text{D'où : } D \cdot C \cdot \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1-y_A} \cdot \frac{dy_A}{dz} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1-y_A} \cdot \frac{dy_A}{dz} \right) = 0$$

$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1-y_A} \cdot \frac{dy_A}{dz} \right) = 0$  est une équation différentielle de 2<sup>ème</sup> ordre qui gouverne la distribution des concentrations.

La résolution de cette équation différentielle va générer :

- Une constante  $C_1$  ( $C_1 \in \mathbb{R}$ ) lors de la 1<sup>ère</sup> intégration ;
- Une constante  $C_2$  ( $C_2 \in \mathbb{R}$ ) lors de la 2<sup>ème</sup> intégration.

La solution de cette équation différentielle aura pour expression :  $-\ln(1-y_A) = C_1 z + C_2$

Les constantes d'intégration  $C_1$  et  $C_2$  peuvent être déterminées grâce aux conditions aux limites.

Conditions aux limites :

$$\begin{cases} \text{En } z = z_1 \text{ (Interface gaz-liquide) : } y_A = y_{A1} \\ \text{En } z = z_2 \text{ (Extrémité supérieure de la phase gazeuse) : } y_A = y_{A2} \end{cases}$$

Ceci va générer un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} -\ln(1-y_{A1}) = C_1 z_1 + C_2 \\ -\ln(1-y_{A2}) = C_1 z_2 + C_2 \end{cases}$$

$$- \ln(1 - y_{A2}) = C_1 z_2 + C_2$$

Après résolution du système de deux équations à deux inconnues, on obtient les constantes d'intégrations  $C_1$  et  $C_2$  telles que :

$$C_1 = \frac{1}{z_2 - z_1} \cdot \ln \left( \frac{1 - y_{A1}}{1 - y_{A2}} \right)$$

$$\text{Et : } C_2 = - \frac{(z_2 - z_1) \cdot \ln(1 - y_{A1}) + z_1 \cdot \ln \left( \frac{1 - y_{A1}}{1 - y_{A2}} \right)}{z_2 - z_1}$$

Sachant que :  $y_A + y_B = 0 \Rightarrow 1 - y_{A1} = y_{B1}$  et  $1 - y_{A2} = y_{B2}$

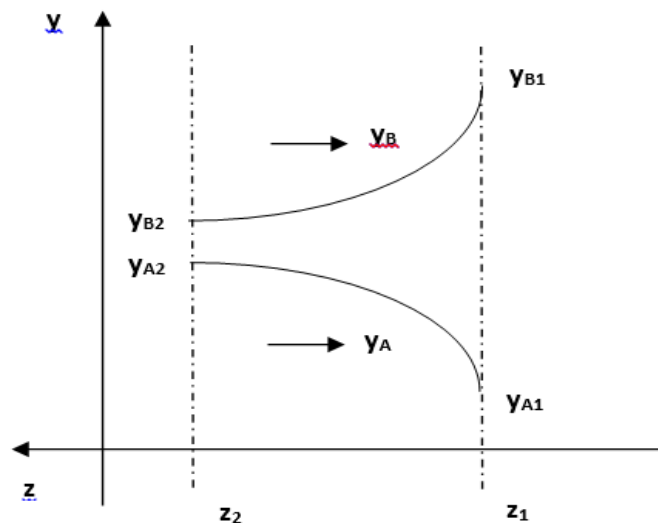
Ainsi l'équation :  $-\ln(1 - y_A) = C_1 z + C_2$  devient :

$$-\ln(y_B) = \frac{1}{z_2 - z_1} \cdot \ln \left( \frac{y_{B1}}{y_{B2}} \right) \cdot z - \frac{(z_2 - z_1) \cdot \ln(y_{B1}) + z_1 \cdot \ln \left( \frac{y_{B1}}{y_{B2}} \right)}{z_2 - z_1}$$

$$\Rightarrow -\ln(y_B) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \cdot \ln \left( \frac{y_{B1}}{y_{B2}} \right) - \ln(y_{B1})$$

$$\Rightarrow \ln \left( \frac{y_{B1}}{y_B} \right) = \ln \left( \frac{y_{B1}}{y_{B2}} \right)^{\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$

$$\Rightarrow \frac{y_{B1}}{y_B} = \left( \frac{y_{B1}}{y_{B2}} \right)^{\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}} \quad \text{C'est l'équation du profil de concentration } y_B = f(z)$$



**Figure III.2 : Evolution des concentrations dans le cas d'une diffusion à travers une phase stagnante**

Par ailleurs, on a l'expression de la densité de flux :

$$\vec{N}_A = - \frac{D \cdot C}{1 - y_A} \cdot \frac{\partial y_A}{\partial z}$$

Sachant que le mouvement de diffusion de l'espèce A est descendant et que l'axe d'orientation  $zz'$  est ascendant alors la projection du vecteur  $\vec{N}_A$  sur  $zz'$  donnera :

$$\begin{aligned}
N_A &= \frac{D \cdot C}{1 - y_A} \cdot \frac{dy_A}{dz} \\
\Rightarrow N_A \cdot dz &= \frac{D \cdot C}{1 - y_A} \cdot dy_A \\
\Rightarrow N_A \cdot \int_{z_1}^{z_2} dz &= D \cdot C \cdot \int_{y_{A1}}^{y_{A2}} \frac{dy_A}{1 - y_A} \\
\Rightarrow N_A \cdot z \Big|_{z_1}^{z_2} &= -D \cdot C \cdot \ln(1 - y_A) \Big|_{y_{A1}}^{y_{A2}} \\
\Rightarrow N_A (z_2 - z_1) &= D \cdot C \cdot \ln \left( \frac{1 - y_{A1}}{1 - y_{A2}} \right) \\
\Rightarrow N_A \cdot L &= D \cdot C \cdot \ln \left( \frac{y_{B1}}{y_{B2}} \right)
\end{aligned}$$

Avec :  $z = z_2 - z_1$ ,  $1 - y_{A1} = y_{B1}$  et  $1 - y_{A2} = y_{B2}$

Enfin :  $N_A = \frac{D \cdot C}{z} \cdot \ln \left( \frac{y_{B1}}{y_{B2}} \right)$  C'est l'équation de la densité de flux.

A pression P et à température T constantes et d'après la loi des gaz parfaits, on a :  $C = \frac{P_t}{R \cdot T}$

D'après la loi de Dalton :  $y_{B1} = \frac{P_{B1}}{P_t}$  et  $y_{B2} = \frac{P_{B2}}{P_t}$

Soit  $\bar{P}_B$  la moyenne logarithmique définie comme suit :

$$\bar{P}_B = \frac{P_{B1} - P_{B2}}{\ln \frac{P_{B1}}{P_{B2}}} \Rightarrow \ln \frac{P_{B1}}{P_{B2}} = \frac{P_{B1} - P_{B2}}{\bar{P}_B}$$

$$\text{D'où : } N_A = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot z} \cdot \frac{P_{B1} - P_{B2}}{\bar{P}_B} = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot z} \cdot \frac{(P_t - P_{A1}) - (P_t - P_{A2})}{\bar{P}_B}$$

$$\text{Pour avoir enfin : } N_A = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot z} \cdot \frac{P_{A2} - P_{A1}}{\bar{P}_B}$$

Cette dernière relation peut s'écrire d'une façon condensée comme suit :

$$N_A = k_p \cdot \Delta P_A$$

$$\text{Avec : } \Delta P_A = P_{A2} - P_{A1} \text{ et } k_p = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot z \cdot \bar{P}_B}$$

Il est aussi possible d'exprimer la densité de flux  $N_A$  en fonction de la fraction molaire  $y_A$ .

$$N_A = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot z} \cdot \frac{P_{A2} - P_{A1}}{\bar{P}_B} = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot z} \cdot \frac{y_{A2} \cdot P_t - y_{A1} \cdot P_t}{\bar{P}_B}$$

Sachant qu'en utilisant la loi de Dalton :  $P_{A1} = y_{A1} \cdot P_t$  et  $P_{A2} = y_{A2} \cdot P_t$

$$\text{Or : } \bar{P}_B = \frac{P_{B1} - P_{B2}}{\ln \frac{P_{B1}}{P_{B2}}} = \frac{y_{B1} \cdot P_t - y_{B2} \cdot P_t}{\ln \frac{P_{B1}}{P_{B2}}} = P_t \cdot \frac{y_{B1} - y_{B2}}{\ln \frac{y_{B1} \cdot P_t}{y_{B2} \cdot P_t}} = P_t \cdot \bar{y}_B (ML)$$

Ici  $\bar{y}_B (ML)$  représente la moyenne logarithmique en fraction molaire.

$$\text{D'où : } N_A = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot z} \cdot \frac{y_{A2} \cdot P_t - y_{A1} \cdot P_t}{P_t \cdot \bar{y}_B (ML)} \Rightarrow N_A = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot z} \cdot \frac{y_{A2} - y_{A1}}{\bar{y}_B (ML)}$$

Cette dernière relation peut s'écrire d'une façon condensée comme suit :

$$N_A = k_y \cdot \Delta y_A$$

$$\text{Avec : } \Delta y_A = y_{A2} - y_{A1} \text{ et } k_y = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot z \cdot \bar{y}_B (ML)}$$

Il est également possible d'exprimer la densité de flux  $N_A$  en fonction de la concentration molaire  $C_A$ .

$$N_A = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot Z} \cdot \frac{y_{A2} - y_{A1}}{\bar{y}_B (ML)} = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot Z} \cdot \frac{\frac{C_{A2}}{C_t} - \frac{C_{A1}}{C_t}}{\bar{y}_B (ML)}$$

$$\text{Or : } \bar{y}_B (ML) = \frac{y_{B2} - y_{B1}}{\ln \frac{y_{B1}}{y_{B2}}} = \frac{\frac{C_{B1}}{C_t} - \frac{C_{B2}}{C_t}}{\ln \frac{C_{B1}}{C_t}} = \frac{1}{C_t} \bar{C}_B (ML)$$

Sachant que :  $C_{A1} = y_{A1} \cdot C_t$  et  $C_{A2} = y_{A2} \cdot C_t$

Ici  $\bar{C}_B (ML)$  représente la moyenne logarithmique en concentration molaire.

$$N_A = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot Z} \cdot \frac{\frac{C_{A2}}{C_t} - \frac{C_{A1}}{C_t}}{\frac{1}{C_t} \bar{C}_B (ML)} \Rightarrow N_A = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot Z} \cdot \frac{C_{A2} - C_{A1}}{\bar{C}_B (ML)}$$

Cette dernière relation peut s'écrire d'une façon condensée comme suit :

$$N_A = k_C \cdot \Delta C_A$$

$$\text{Avec : } \Delta C_A = C_{A2} - C_{A1} \text{ et } k_C = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot Z \cdot \bar{C}_B (ML)}$$

#### Récapitulation :

On a :  $N_A = k_P \cdot \Delta P_A$  ;  $N_A = k_y \cdot \Delta y_A$  ;  $N_A = k_C \cdot \Delta C_A$

Avec :

$N_A$  : représente la densité de flux.

$\Delta P_A, \Delta y_A$  et  $\Delta C_A$  : représentent une différence de potentiel ou une force motrice.

$k_P, k_y$  et  $k_C$  : représentent le coefficient de transfert de matière lié à la diffusion.

Par analogie avec un système électrique qui est régi par la loi d'Ohm :

$$U = R \cdot I$$

Où :

U : Différence de potentiel (DDP)

R : Résistance

I : Intensité de courant

Par ailleurs, la conductance étant définie comme étant l'inverse de la résistance ( $K = 1/R$ )

$$\text{alors : } U = I/K \Rightarrow I = K \cdot U$$

Ainsi, le système diffusionnel considéré est parfaitement analogue à un système électrique et le coefficient de diffusion D peut être assimilé à une conductance en électricité.

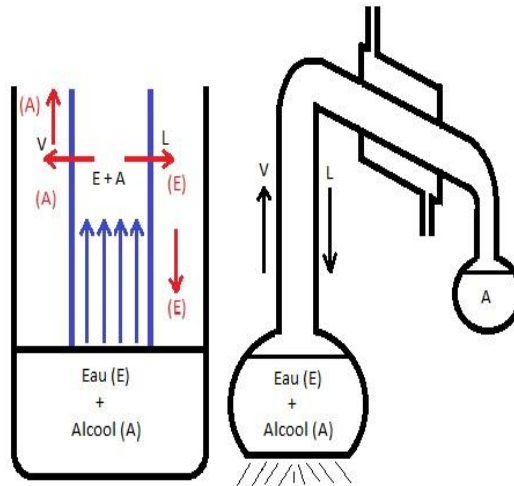
#### III.4. Contre diffusion équimolaire

La contre diffusion équimolaire est rencontrée dans les procédés de distillation et de rectification.

Exemple : Distillation d'un mélange binaire homogène (A) Alcool - (E) Eau

Les caractéristiques du mélange liquide sont :

$$\begin{cases} \text{(A) Alcool, } T_{eb} = 78,37 \text{ } ^\circ\text{C} \\ \text{(E) Eau, } T_{eb} = 100 \text{ } ^\circ\text{C} \end{cases}$$



**Figure III.3 : Schéma de la distillation d'un mélange binaire homogène**

Dans ce cas, on est en présence d'un mélange binaire (A + B).

Pour l'espèce A, la densité de flux a pour expression :

$$\vec{N}_A = \vec{J}_A^* + y_A \cdot (\vec{N}_A + \vec{N}_B)$$

Comme dans la phase gazeuse, l'espèce A diffuse dans un sens et l'espèce B diffuse dans le sens inverse, alors :  $\vec{N}_A + \vec{N}_B = \vec{0}$

$$\text{D'où : } \vec{N}_A = \vec{J}_A^*$$

$$\text{D'après la 1}^{\text{ère}} \text{ loi de Fick, on a : } \vec{J}_A^* = -D \cdot \overrightarrow{\text{grad}} C_A \Rightarrow \vec{J}_A^* = -D \cdot \frac{\partial C_A}{\partial z}$$

A pression P et température T constantes, les termes D et C sont constants et aussi indépendants de la côte z.

$$\text{Or : } C_A = y_A \cdot C_t$$

L'expression de la densité de flux molaire peut enfin s'écrire comme suit :

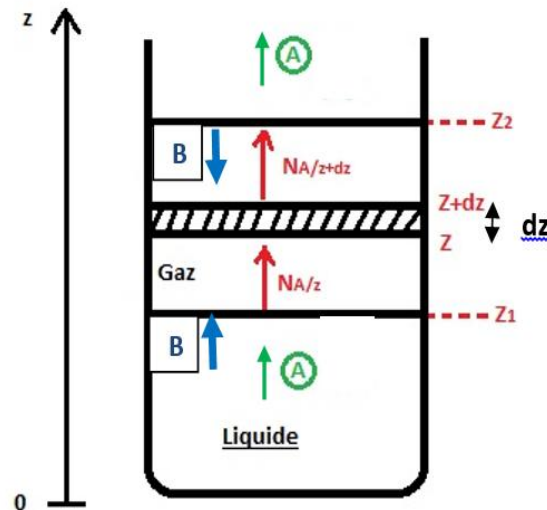
$$\vec{N}_A^* = -D \cdot C_t \cdot \frac{\partial y_A}{\partial z}$$

Bilan de matière sur un élément différentiel :

Dans le cas de la distillation, le système est non réactif (pas de réaction chimique) et si on considère un régime permanent, alors le bilan de matière peut s'écrire comme suit :

$$[\text{Flux molaire entrant de A dans le volume } dV] - [\text{Flux molaire sortant de A du volume } dV] = 0$$





**Figure III.4 : Schéma représentatif d'un bilan de matière élémentaire dans le cas de la distillation d'un mélange binaire homogène**

Comme la section  $S$  est indépendante de la cote  $z$ , l'équation du bilan de matière devient :

$$S \cdot \vec{N}_{Az} - S \cdot \vec{N}_{Az+dz} = \vec{0}$$

$$\vec{N}_{Az} - \left( \vec{N}_{Az} + \frac{d\vec{N}_{Az}}{dz} dz \right) = \vec{0}$$

D'où :  $-\frac{d\vec{N}_{Az}}{dz} = \vec{0}$  d'où :  $\vec{N}_{Az} = \text{constante}$

Ainsi, la densité de flux de  $A$  est constante car elle est indépendante de la cote  $z$ .

$-\frac{d\vec{N}_{Az}}{dz} = \vec{0}$  est une équation différentielle de 1<sup>er</sup> ordre qui gouverne la distribution des flux.

Par ailleurs, on a :  $N_A = -D.C. \frac{dy_A}{dz} \Rightarrow -\frac{d}{dz} \left( -D.C. \frac{dy_A}{dz} \right) = 0 \Rightarrow -D.C. \frac{d}{dz} \left( \frac{dy_A}{dz} \right) = 0$

D'où :  $\frac{d}{dz} \left( \frac{dy_A}{dz} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 y_A}{dz^2} = 0$

$\frac{d^2 y_A}{dz^2} = 0$  est une équation différentielle de 2<sup>ème</sup> ordre qui gouverne la distribution des concentrations.

La résolution de cette équation différentielle va générer :

- Une constante  $C_1$  ( $C_1 \in \mathbb{R}$ ) lors de la 1<sup>ère</sup> intégration ;
- Une constante  $C_2$  ( $C_2 \in \mathbb{R}$ ) lors de la 2<sup>ème</sup> intégration.

La solution de cette équation différentielle aura pour expression :  $y_A = C_1 z + C_2$

Les constantes d'intégration  $C_1$  et  $C_2$  peuvent être déterminées grâce aux conditions aux limites.

Conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{En } z = z_1 \text{ (Interface gaz-liquide) : } y_A = y_{A1} \end{array} \right.$$

En  $z = z_2$  (Extrémité supérieure de la phase gazeuse) :  $y_A = y_{A2}$

Ceci va générer un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} y_{A1} = C_1 z_1 + C_2 \\ y_{A2} = C_1 z_2 + C_2 \end{cases}$$

Après résolution, on obtient les constantes d'intégrations  $C_1$  et  $C_2$  :

$$C_1 = \frac{y_{A1} - y_{A2}}{z_1 - z_2} \quad \text{et} \quad C_2 = y_{A1} - \frac{y_{A1} - y_{A2}}{z_1 - z_2} \cdot z_1$$

En remplaçant les constantes d'intégrations  $C_1$  et  $C_2$  obtenues, l'équation :  $y_A = C_1 z + C_2$  devient :

$$y_A = y_{A1} + \frac{y_{A1} - y_{A2}}{z_1 - z_2} (z - z_1) \quad \text{C'est l'équation du profil de concentration } y_A = f(z)$$

Par ailleurs, on a l'expression de la densité de flux :  $-\frac{d\vec{N}_{Az}}{dz} = \vec{0}$

$$\text{Or : } N_A = -D \cdot C \cdot \frac{dy_A}{dz} \Rightarrow -\frac{d(-D \cdot C \cdot \frac{dy_A}{dz})}{dz} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d(D \cdot C \cdot \frac{dy_A}{dz})}{dz} = \vec{0} \Rightarrow N_A = D \cdot C \cdot \frac{dy_A}{dz}$$

$$\Rightarrow N_A \cdot dz = D \cdot C \cdot dy_A$$

$$\Rightarrow N_A \cdot \int_{z_1}^{z_2} dz = D \cdot C \cdot \int_{y_{A1}}^{y_{A2}} dy_A$$

$$\Rightarrow N_A \cdot z \Big|_{z_1}^{z_2} = D \cdot C \cdot y_A \Big|_{y_{A1}}^{y_{A2}}$$

$$\Rightarrow N_A (z_2 - z_1) = D \cdot C \cdot (y_{A2} - y_{A1})$$

$$\Rightarrow N_A = \frac{D \cdot C}{(z_2 - z_1)} \cdot (y_{A2} - y_{A1})$$

$$\Rightarrow N_A = \frac{D \cdot C}{h} \cdot (y_{A2} - y_{A1})$$

$$\text{Avec : } h = z_2 - z_1$$

A pression  $P$  et température  $T$  constantes et d'après la loi des gaz parfaits, on a :  $C_t = \frac{P_t}{R \cdot T}$

$$N_A = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot h} (y_{A2} - y_{A1}) \quad \text{C'est l'équation de la densité de flux.}$$

Cette dernière relation peut s'écrire d'une façon condensée comme suit :

$$N_A = k_y \cdot \Delta y_A$$

$$\text{Avec : } \Delta y_A = y_{A2} - y_{A1} \quad \text{et} \quad k_y = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot h}$$

Il est aussi possible d'exprimer la densité de flux  $N_A$  en fonction de la pression.

$$\text{En utilisant la loi de Dalton : } y_{A1} = \frac{P_{A1}}{P_t} \quad \text{et} \quad y_{A2} = \frac{P_{A2}}{P_t}$$

L'équation :  $N_A = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot h} \cdot (y_{A2} - y_{A1})$  peut s'écrire alors :

$$N_A = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot h} \cdot \left( \frac{P_{A2}}{P_t} - \frac{P_{A1}}{P_t} \right)$$

$$\text{Pour avoir enfin : } N_A = \frac{D}{R \cdot T \cdot h} \cdot (P_{A2} - P_{A1})$$

Cette dernière relation peut s'écrire d'une façon condensée comme suit :

$$N_A = k_P \cdot \Delta P_A$$

$$\text{Avec : } \Delta P_A = P_{A2} - P_{A1} \text{ et } k_P = \frac{D}{R.T.h}$$

Il est également possible d'exprimer la densité de flux  $N_A$  en fonction de la concentration molaire  $C_A$ .

$$\text{Sachant que : } y_{A1} = \frac{C_{A1}}{C} \text{ et } y_{A2} = \frac{C_{A2}}{C}$$

$$\text{L'équation : } N_A = \frac{D.P_t}{R.T.h} \cdot (y_{A2} - y_{A1}) \text{ peut s'écrire alors : } N_A = \frac{D.P_t}{R.T.h} \cdot \left( \frac{C_{A2}}{C} - \frac{C_{A1}}{C} \right)$$

$$\text{Pour avoir enfin : } N_A = \frac{D.P_t}{R.T.h.C} \cdot (C_{A2} - C_{A1})$$

Cette dernière relation peut s'écrire d'une façon condensée comme suit :

$$N_A = k_C \cdot \Delta C_A$$

$$\text{Avec : } \Delta C_A = C_{A2} - C_{A1} \text{ et } k_C = \frac{D.P_t}{R.T.h.C}$$

Comparaison entre la diffusion à travers une phase stagnante (DPS) et la contre diffusion équimolaire (CDE)

$$\text{Pour la DPS : } N_{A \text{ DPS}} = \frac{D.P_t}{R.T.h} \cdot \frac{P_{A2} - P_{A1}}{\bar{P}_B} \quad (i)$$

$$\text{Pour la CDE : } N_{A \text{ CDE}} = \frac{D.P_t}{R.T.h} \cdot \left( \frac{P_{A2} - P_{A1}}{P_t} \right) \quad (ii)$$

$$\frac{(i)}{(ii)} : \frac{N_{A \text{ DPS}}}{N_{A \text{ CDE}}} = \frac{\frac{D.P_t}{R.T.h} \cdot \frac{P_{A2} - P_{A1}}{\bar{P}_B}}{\frac{D.P_t}{R.T.h} \cdot \left( \frac{P_{A2} - P_{A1}}{P_t} \right)} = \frac{\bar{P}_B}{P_t}$$

$$\text{Cas des solutions diluées : } \frac{\bar{P}_B}{P_t} \rightarrow 1 \Rightarrow \bar{P}_B \approx P_t$$

Cours de transfert de matière R. KETRANE