

I Métrologie

1. Généralités sur la mesure

1.1. Définitions :

La grandeur (X) : Paramètre qui doit être contrôlé lors de l'élaboration d'un produit ou de son transfert.

Exemple : pression, température, niveau.

Elle renseigne sur l'état et l'évolution d'un phénomène physique, chimique, industriel.

On peut classer les grandeurs en trois catégories :

- Grandeur fondamentale : Il existe trois grandeurs indépendantes entre elles et à partir desquelles on peut déduire toutes les autres. Il s'agit de la longueur, de la masse et du temps.
- Grandeur principale : Les trois grandeurs fondamentales étant insuffisantes pour faire l'analyse pratique des corps et des milieux, on définit sept grandeurs principales qui sont la longueur, la masse, le temps, la température, l'intensité d'un courant, l'intensité lumineuse et la quantité de matière.
- Grandeur dérivée : Toutes les autres grandeurs déduites des grandeurs principales sont dites grandeurs dérivées.

Le mesurage : L'ensemble d'opérations ayant pour but de déterminer une valeur d'une grandeur.

Le mesurande : La grandeur particulière soumise à mesurage.

La mesure (x) : C'est l'évaluation d'une grandeur par comparaison avec une autre grandeur de même nature prise pour unité. Exemple : 2 mètres, 400 grammes, 6 secondes.

Remarque : On ne peut pas mesurer des grammes avec des mètres, ce n'est pas Homogène.

Suivant l'objectif recherché il existe deux types de mesure :

- Mesure de précision : (ou de laboratoire) On accorde ici une grande importance au résultat et à sa précision.
- Mesure industrielle : On s'intéresse plus dans ce cas à l'efficacité et à la multiplicité.

1.2. Les unités de mesure

Le système d'unités internationales et ses symboles

Grandeur		Unité	
Nom	Symbole	Nom	Symbole
Unités de base			
Longueur	l	mètre	m
Masse	m	kilogramme	kg
Temps	t	seconde	s
Courant électrique	i	ampère	A
Température	T	kelvin	K
Quantité de matière		mole	mol
Intensité lumineuse	I	candela	cd
Unités complémentaires			
Angle plan		radian	rad
Angle solide		stéradian	Sr
Unités dérivées			
Aire ou superficie	A, S	mètre carré	m ²
Volume	V	mètre cube	m ³

Fréquence	f	hertz	Hz
Vitesse	v	mètre par seconde	m/s
Force	F	newton	N
Moment d'une force	M	mètre newton	mN
Moment d'un couple	T	mètre newton	mN
Viscosité dynamique	η	poiseuille	Pi
Tension - ddp	U	volt	V
Force électromotrice	E	volt	V
Résistance électrique	R	ohm	Ω
Réactance	X	ohm	Ω
Impédance	Z	ohm	Ω
Résistivité	ρ	ohm-mètre	Ωm
Capacité	C	farad	F
Permittivité	ε	farad par mètre	F/m
Perméabilité	μ	henry par mètre	H/m
Champ électrique	E	volt par mètre	V/m
Flux lumineux	Φ	lumen	lm
Eclairement	E	lux	lx
Longueur d'onde	λ	mètre	m
Quant. de rayonnement		roentgen	R
Vitesse angulaire	ω	radian par seconde	rad/s
Accélération	g	mètre par seconde ²	m/s ²
Accélération angulaire	α	radian par seconde ²	rad/s ²
Energie - Travail	W	joule	J
Puissance	P	watt	Watt
Pression - Contrainte	P	pascal	Pa
Quantité de chaleur	Q	joule	J
Quantité d'électricité	Q	coulomb	C
Energie	W	joule	J
Puissance active	P	watt	W
Puissance apparente	S	voltampère	VA
Puissance réactive	Q	voltampère réactif	VAR
Inductance	L	henry	H
Champ magnétique	H	ampère par mètre	A/m
Induction magnétique	B	tesla	T
Flux d'induction	Φ	weber	Wb
Luminance	L	candela par m ²	Cd/m ²
Transmission		décibel	dB
Activité nucléaire	A	curie	Bq

Formation des multiples et sous multiples des unités

Multiplicateur de l'unité	Préfixe du nom de l'unité	Symbole à placer devant celui de l'unité
Multiples		
10 ²⁴	yotta	Y
10 ²¹	zetta	Z
10 ¹⁸	exa	E
10 ¹⁵	peta	P
10 ¹²	téra	T
10 ⁹	giga	G
10 ⁶	méga	M
10 ³	kilo	K
10 ²	hecto	h
10	déca	da
Sous multiples		
10 ⁻¹	déci	d
10 ⁻²	centi	c
10 ⁻³	milli	m
10 ⁻⁶	micro	μ
10 ⁻⁹	nano	n
10 ⁻¹²	pico	p
10 ⁻¹⁵	femto	f
10 ⁻¹⁸	atto	a
10 ⁻²¹	zepto	z
10 ⁻²⁴	yocto	y

Autres unités

- 1 m³ = 1000 l
- 1 l = 1 dm³
- 1 ha = 10 000 m²
- 1 h = 3600 s

Liens entre les unités S.I. et celles employées dans d'autres pays (USA)

Distances :

- pouce (inch) : 1 in. = 2,54 cm
- pied (foot) : 1 ft = 12 in = 30,48 cm
- mile (miles) = 5280 ft = 1,609 km

Volume :

- pinte (pint) = 0,94 l
- gallon (US gallon) : 1 USgal = 4 pintes = 3,786 l
- baril (US barrel) : 1 bbi = 42 USgal = 159 l

Masse :

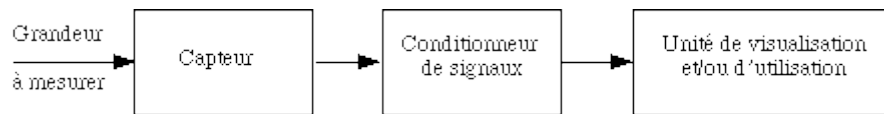
- once (ounce) : 1 oz = 28,35 g ?
- livre (pound) : 1 lb = 0,454 kg

Puissance :

- cheval vapeur (horsepower) : $1 \text{ hp} = 0,736 \text{ kW} = 1 \text{ CV}$

2. La chaîne de mesure

2.1. Principe d'une chaîne de mesure



La structure de base d'une chaîne de mesure comprend au minimum trois étages :

- Un capteur sensible aux variations d'une grandeur physique et qui, à partir de ces variations, délivre un signal.
- Un conditionneur de signaux dont le rôle principal est l'amplification du signal délivré par le capteur pour lui donner un niveau compatible avec l'unité de visualisation ou d'utilisation ; cet étage peut parfois intégrer un filtre qui réduit les perturbations présentes sur le signal.
- Une unité de visualisation et/ou d'utilisation qui permet de lire la valeur de la grandeur et/ou de l'exploiter dans le cas d'un asservissement, par exemple.
- Cette structure de base se rencontre dans toutes les chaînes de mesure et ce, quelle que soit leur complexité et leur nature. De nos jours, compte tenu des possibilités offertes par l'électronique et l'informatique, les capteurs délivrent un signal électrique et la quasi-totalité des chaînes de mesure sont des chaînes électroniques.

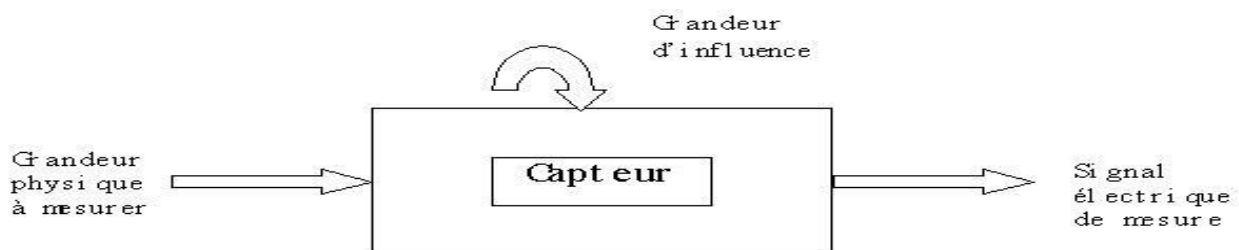
2.1. 1. Les capteurs

Organe chargé de prélever une grandeur physique à mesurer et de la transformer en une grandeur exploitable.

La grandeur physique à mesurer « mesurande » constitue le signal d'entrée du capteur. La grandeur exploitable étant généralement de nature électrique constitue le signal de mesure (signal de sortie (réponse)) du capteur. Elle est une représentation de la grandeur à mesurer.

Idéalement, il faudrait que la réponse ne dépende que du mesurande. Malheureusement, en pratique, les grandeurs d'influence viennent perturber le fonctionnement du capteur et entraînent souvent des erreurs de mesure. Les principales grandeurs d'influence sont : la température, la pression, les vibrations, les chocs, le vieillissement, l'humidité, la fixation du capteur, etc...

Il faut faire en sorte de réduire le plus possible les effets des grandeurs d'influence.

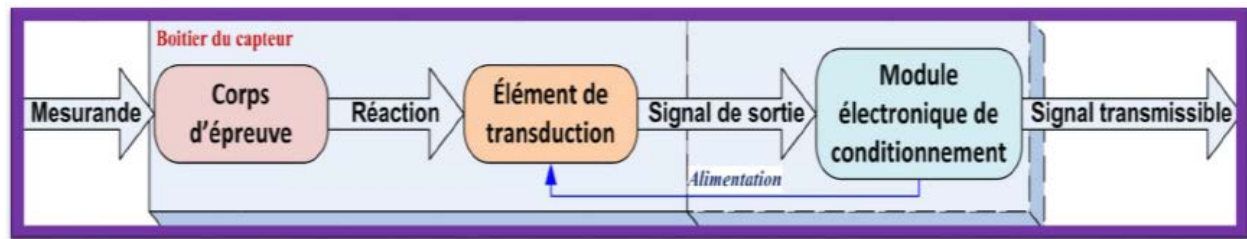


Constitution d'un capteur :

- ✓ Le corps d'épreuve : est un élément mécanique qui réagit à la grandeur à mesurer, il a pour rôle de transformer la grandeur à mesurer en une autre grandeur physique dite mesurable. Cette grandeur constitue la réaction du corps d'épreuve.
- ✓ L'élément de transduction : est un élément sensible lié au corps d'épreuve. Il traduit les réactions du corps d'épreuve en une grandeur, généralement électrique, constituant le signal de sortie qui souvent, n'est pas

directement utilisable comme signal d'entrée dans une boucle de mesure ou de régulation (comme par exemple un thermocouple délivrant une fem de quelques mV).

- ✓ Le transmetteur est le dispositif de mesure dont l'entrée est issue d'un capteur et dont la sortie est un signal conforme à un standard analogique (0,2-1 bar ou 4-20 mA) ou numérique, directement utilisable dans une boucle de mesure ou de régulation.
- ✓ Le boîtier : est un élément mécanique de protection, de maintien et de fixation du capteur.



On peut classer les grandeurs physiques à mesurer en 6 familles, chaque capteur s'associant à l'une de ces 6 familles :

- Mécanique : déplacement, force, masse, débit ...etc...
- Thermique : température, capacité thermique, flux thermique ...etc...
- Electrique : courant, tension, charge, impédance, diélectrique ...etc...
- Magnétique : champ magnétique, perméabilité, moment magnétique ...etc.
- Radiatif : lumière visible, rayons X, micro-ondes ...etc...
- (Bio)Chimique : humidité, gaz, sucre, hormone ...etc....

Classification des capteurs

On classe les capteurs en deux grandes familles en fonction de la caractéristique électrique de la grandeur de sortie. Cette classification influe sur le conditionneur qui lui est associé.

a- Capteurs passifs

Le capteur se comporte en sortie comme un dipôle passif qui peut être résistif, capacitif ou inductif.

MESURANDE	EFFET UTILISE (Grandeur de sortie)	MATERIAUX
Température	Résistivité	Platine, nickel, cuivre, semi-conducteurs Verre
Très basse température	Cste diélectrique	
Flux optique	Résistivité	Semi-conducteurs
Déformation	Résistivité Perméabilité	Alliages nickel Alliages ferromagnétiques
Position	Résistivité	Magnétorésistances : Bismuth, antimoine d'indium
Humidité	Résistivité	Chlorure de lithium

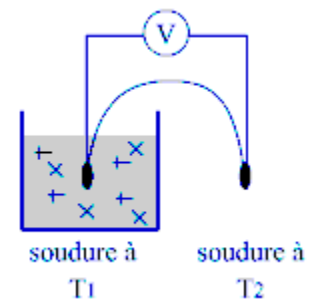
Le tableau ci-dessus résume, en fonction du mesurande, les effets utilisés pour réaliser la mesure.

b- Capteurs actifs

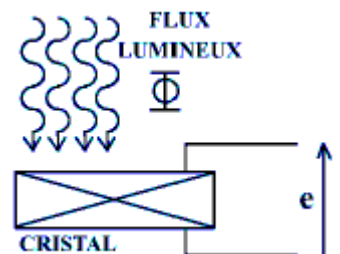
Dans ce cas, la sortie du capteur est équivalente à un générateur. C'est un dipôle actif qui peut être du type courant, tension ou charge. Les principes physiques mis en jeu sont présentés ci-dessous.

MESURANDE	EFFET UTILISE	GRANDEUR DE SORTIE
Température	Thermoélectricité (thermocouple)	Tension
Flux optique	Photoémission Pyroélectricité	Courant Charge
Force, pression, accélération	Piézoélectricité	Charge
Position	Effet Hall	Tension
Vitesse	Induction	Tension

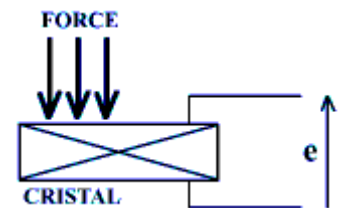
Thermoélectricité : c'est l'effet Seebeck. Un thermocouple est un circuit constitué de deux conducteurs de nature chimique différente et dont les jonctions sont à des températures différentes T1 et T2. Il apparaît aux bornes de ce circuit une tension (force électromotrice) liée à la différence de température (T1-T2)



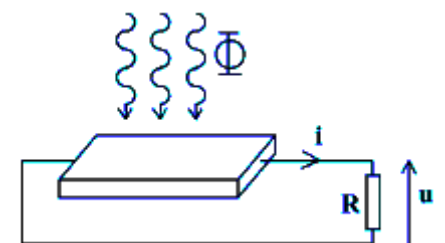
Pyroélectricité : certains cristaux présentent une polarisation électrique proportionnelle à leur température. Ainsi, en absorbant un flux de rayonnement, le cristal pyroélectrique va s'échauffer et ainsi sa polarisation va se modifier entraînant une variation de tension détectable.



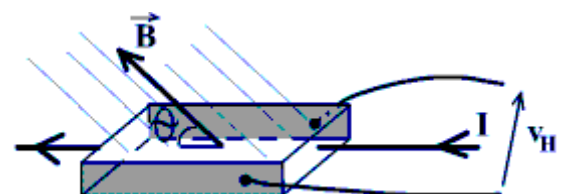
Piézoélectricité : l'application d'une force sur ce type de matériau engendre l'apparition de charges électriques créées par la déformation du matériau. C'est un phénomène réversible.



Photoélectricité : sous l'influence d'un rayonnement lumineux, le matériau libère des charges électriques (paires électron-trou) et celles-ci en fonction du rayonnement engendrent un courant électrique.

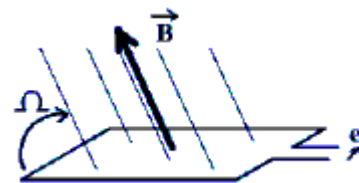


Effet Hall : un semi-conducteur de type parallélépipède rectangle, placé dans une induction B et parcouru par un courant I, voit l'apparition, dans la direction perpendiculaire au courant et à l'induction, une différence de potentiel qui a pour expression :



$$U_{HALL} = K_H . I . B . \sin \theta$$

Induction : la variation d'un flux magnétique engendre l'apparition d'une force électromotrice.



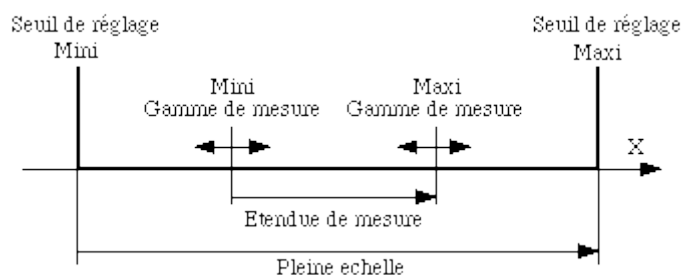
2.2. Performances d'un appareil de mesure

2.2.1. Gamme de mesure - Étendue de mesure

La gamme de mesure, c'est l'ensemble des valeurs du mesurande pour lesquelles un instrument de mesure est supposé fournir une mesure correcte.

L'étendue de mesure correspond à la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale de la gamme de mesure.

Pour les appareils à gamme de mesure réglable, la valeur maximale de l'étendue de mesure est appelée pleine échelle.



Remarque : lorsqu'un appareil indicateur possède un cadran gradué en unités de la grandeur à mesurer, son étendue de mesure n'est pas toujours confondue avec l'étendue de graduation.

Exemple : Appareil de pesage, étendu de la graduation (0, 2 kg), étendu de la mesure (150 g, 2000 g).

2.2.2. Rangeabilité

On définit la rangeabilité par le rapport minimum entre l'étendue de mesure et la pleine échelle.

$$\text{Rangeabilité} = \frac{\text{Etendue de mesure minimale}}{\text{Pleine échelle}}$$

2.2.3. Courbe d'étalonnage

Elle est propre à chaque appareil. Elle permet de transformer la mesure brute en mesure corrigée. Elle est obtenue en soumettant l'instrument à une valeur vraie de la grandeur à mesurer, fournie par un appareil étalon, et en lisant avec précision la mesure brute qu'il donne.

Exemple : Lors de l'essai d'un manomètre à tube de Bourdon, nous avons relevé le tableau de mesure suivant

G étalon	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
G mesuré	0	100	220	320	410	490	580	670	780	900	1000

Les mesures sont données en mbar.

2.2.4. Sensibilité

C'est l'aptitude d'un appareil à délivrer une déviation appréciable de l'indication pour une petite variation de la variable mesurée. Autrement dit c'est la plus petite différence de valeur mesurable.

2.2.5. Résolution

Lorsque l'appareil de mesure est un appareil numérique, on définit la résolution par la formule suivante :

$$\text{Résolution} = \frac{\text{étendue de la mesure}}{\text{Nombre de point de mesure}}$$

2.2.6. Finesse

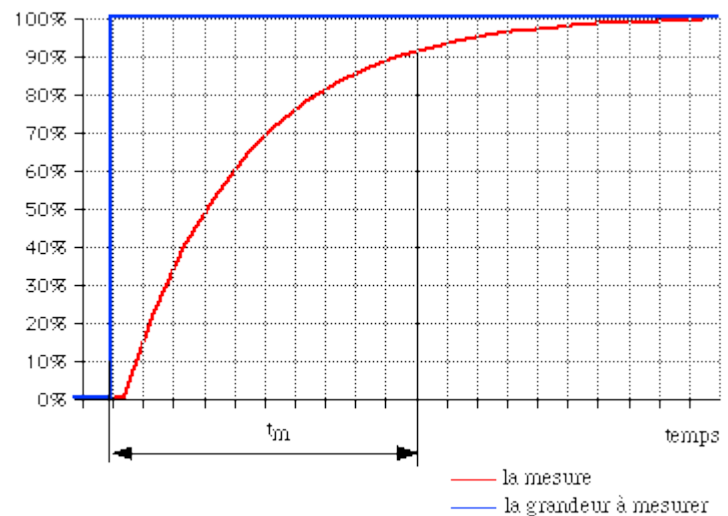
Elle qualifie l'incidence de l'instrument de mesure sur le phénomène mesuré. Elle est grande lorsque l'appareil perturbe très peu la grandeur à mesurer.

2.2.7. Fidélité

C'est l'aptitude d'un appareil à délivrer la même valeur pour deux mesures consécutives.

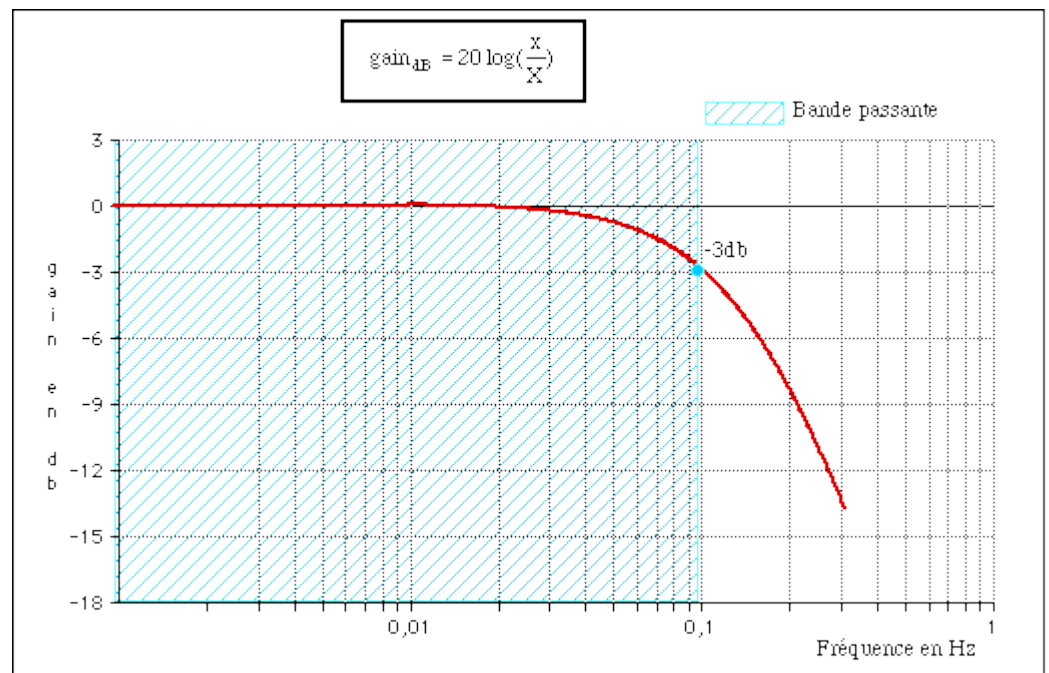
2.2.8. Rapidité, temps de réponse

C'est l'aptitude d'un instrument à suivre les variations de la grandeur à mesurer. Dans le cas d'un échelon de la grandeur entraînant la croissance de la mesure on définit le temps de réponse à $\pm 10\%$, comme étant le temps nécessaire pour que la mesure croisse, à partir de sa valeur initiale jusqu'à rester entre 90 % et 110 % de sa variation totale.



2.2.9. Bande passante

La bande passante est la bande de fréquence pour laquelle le gain du capteur est compris entre deux valeurs seuils (souvent -3 dB). Le gain du capteur est le rapport x/X généralement exprimé en db et où X est son signal d'entrée alors que x représente sa réponse.



Remarques : Par convention, le signal continu a une fréquence nulle.

2.2.10. Précision

C'est l'aptitude d'un appareil à indiquer avec le minimum d'erreur la valeur vraie de la variable mesurée. Elle est donnée par le rapport entre l'erreur commise à l'étalonnage ε et l'étendue possible de mesure E

$$P = \frac{\text{Erreur à l'étalonnage } (\varepsilon)}{\text{Etendue de mesure } (E)}$$

2.2.11. Classe de précision

La classe d'un appareil de mesure correspond à la valeur en % du rapport entre la plus grande erreur possible sur l'étendue de mesure.

$$\text{Classe} = \frac{\text{Plus grande erreur possible}}{\text{Etendue de mesure}} * 100$$

2.3. Grandeur d'influence et compensation

On appelle grandeur d'influence, toutes les grandeurs physiques autres que la grandeur à mesurer, susceptibles de perturber la mesure. Généralement les capteurs industriels sont compensés, un dispositif interne au capteur limite l'influence des grandeurs perturbatrices.

La température est la grandeur d'influence qui est le plus souvent rencontrée.

3. Les erreurs de mesure

Une mesure ne pouvant jamais être exacte, il est au moins nécessaire de connaître le degré de confiance qu'on peut lui accorder. C'est-à-dire :

- Connaître l'intervalle de confiance (limites entre lesquelles la valeur vraie devrait se situer)
- Connaître la probabilité pour que la valeur vraie y soit située

On considère généralement deux causes d'erreur : le matériel (erreur instrumentales) et l'observateur (erreur de lecture).

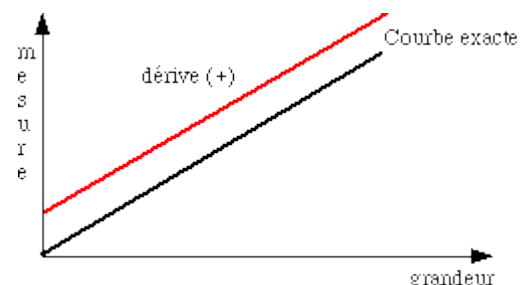
3.1. Les différentes erreurs possibles

3.1.1. Les erreurs systématiques :

Ce sont des erreurs reproductibles reliées à leur cause par une loi physique, donc susceptible d'être éliminées par des corrections convenables. Parmi les erreurs systématiques on peut citer :

- L'erreur de zéro (offset)

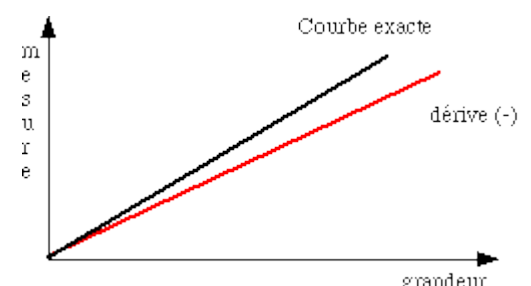
Erreur de zéro = Valeur de x quand $X = 0$.



- L'erreur d'échelle (gain)

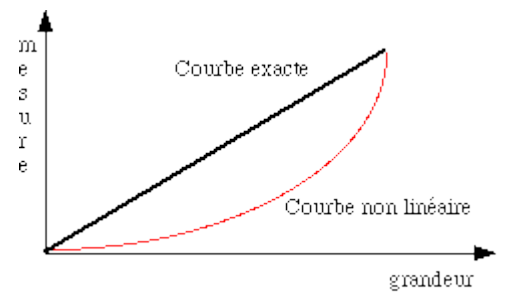
C'est une erreur qui dépend de façon linéaire de la grandeur mesurée.

$$\text{Erreur de gain} = 20 \log(\Delta x / \Delta X)$$



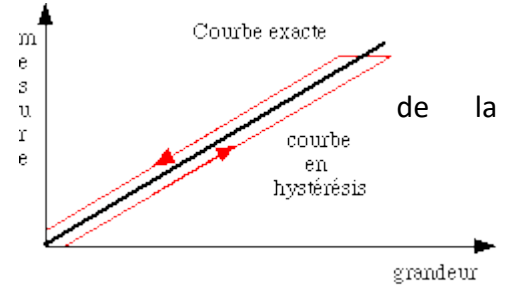
➤ L'erreur de linéarité

La caractéristique n'est pas une droite.



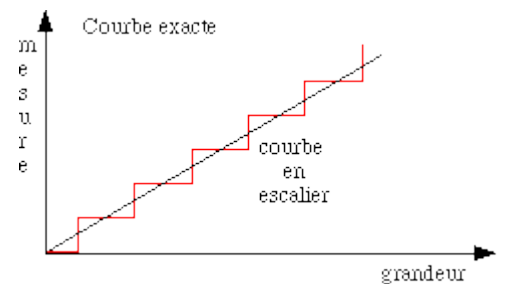
➤ L'erreur due au phénomène d'hystérésis

Il y a phénomène d'hystérésis lorsque le résultat de la mesure dépend de la précédente mesure.



➤ L'erreur de mobilité

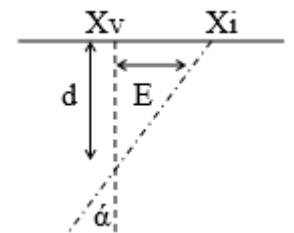
La caractéristique est en escalier, cette erreur est souvent due à une numérisation du signal.



➤ L'erreur de parallaxe

C'est l'erreur que l'on commet lors d'une lecture en biais

Erreur de parallaxe $E = d \tan \alpha$



3.1.2. Les erreurs aléatoires :

Ce sont des erreurs qui n'obéissent à aucune loi connue. Elles sont donc non reproductibles et ne peuvent être traitées que par des lois statistiques.

3.1.3. Les erreurs accidentelles :

Elles résultent d'une fausse manœuvre, d'un mauvais emploi ou de dysfonctionnement de l'appareil. Elles ne sont généralement pas prises en compte dans la détermination de la mesure.

3.2. Notions de calcul d'erreurs de mesure

3.2.1 Définitions

Erreur absolue (e) : C'est l'écart entre la valeur mesurée X_i et la valeur vraie du mesurande : $e = X_i - X_v$

Une erreur absolue s'exprime dans l'unité de la mesure.

Exemple : Une erreur de 10 cm sur une mesure de distance

Erreur relative (er) : C'est le rapport de l'erreur absolue de mesure sur la valeur vraie du mesurande. Une erreur relative s'exprime généralement en pourcentage de la grandeur mesurée : $er = e/X_v$

Exemple : Une erreur de 10 % sur une mesure de distance (10 % de la distance réelle)

Incertitude absolue : C'est la valeur absolue de l'erreur absolue : $\Delta X = |e|$

Incertitude relative : C'est elle qui caractérise vraiment la qualité d'une mesure. Elle est égale au rapport de l'incertitude absolue sur la valeur mesurée $\Delta X / X_i$ en %

Remarque : Comme on ne connaît généralement pas X_v on la remplace dans les calculs par la moyenne arithmétique \bar{X} d'un nombre n de mesures.

3.2.2. Propagation des incertitudes

La grandeur Z s'obtient par la mesure X et Y qui sont des nombres positifs. La mesure de X donne $X \pm \Delta X$ et la mesure de Y donne $Y \pm \Delta Y$.

➤ Les sommes

Dans ce cas $Z = X + Y$. On peut montrer qu'on obtient alors $\Delta Z = \Delta X + \Delta Y$

Dans le cas d'une somme, les incertitudes absolues s'ajoutent.

➤ Les soustractions

De la même manière, on démontre que dans le cas d'une soustraction, les incertitudes absolues s'ajoutent. $\Delta Z = \Delta X + \Delta Y$

Attention : Il faut éviter de soustraire des nombres de même ordre de grandeur

➤ Les produits

Dans ce cas $Z = X \cdot Y$. On peut montrer qu'on obtient alors $\Delta Z / Z = \Delta X / X + \Delta Y / Y$

Dans le cas d'un produit, les incertitudes relatives s'ajoutent.

➤ Les quotients

De la même manière, on démontre que dans le cas d'un quotient, les erreurs relatives s'ajoutent.

➤ Formule de Gauss-Laplace

Dans le cas général d'une fonction $z = f(x, y)$ de deux variable indépendante x et y , on écrit

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \Delta y\right)^2}$$

3.2.3. Traitement statistique des mesures

On considérera dans ce qui suit que toutes les erreurs systématiques ou accidentelles ont été éliminées par un meilleur choix de la méthode ou de l'appareil de mesure ou bien corrigées par le calcul. Il ne reste alors que les erreurs aléatoires dues aux instruments ou à l'opérateur.

Loi Normale

Les erreurs entraînent une dispersion des résultats lors de mesures répétées. Leur traitement statistique permet :

- de connaître la valeur la plus probable de la grandeur mesurée,
- de fixer les limites de l'incertitude.

Lorsque la mesure d'une même grandeur X a été répétée n fois, donnant les résultats : x_1, x_2, \dots, x_n , la valeur moyenne est définie par :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

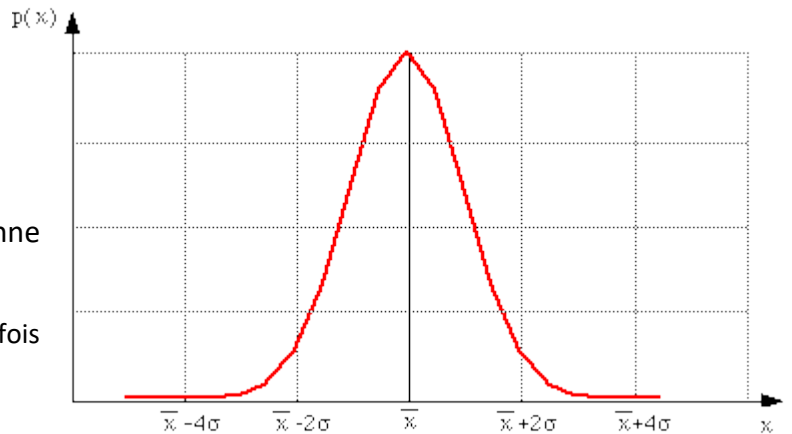
Une indication de la dispersion de ces résultats est donnée par l'écart-type :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Lorsque les erreurs aléatoires affectant les différentes mesures sont indépendantes, la probabilité d'apparition des différents résultats satisfait habituellement à la loi normale dite encore loi de Gauss :

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right)$$

- ✓ La valeur la plus probable est la valeur moyenne des mesures : $X = \bar{X}$
- ✓ En général on prend une incertitude égale à 3 fois l'écart type : $\Delta X = 3\sigma$



Classe de précision

Dans la pratique, l'opérateur ne procède qu'à une seule mesure. Comment alors se rattacher au calcul statistique ? Ceci est possible grâce à la classe de précision « C » de l'appareil indiquée par le constructeur.

La classe de précision d'un appareil de mesure correspond à la probabilité de 95% que l'indication X_i se trouve dans l'intervalle $\pm 2\sigma$. Si par exemple pour un instrument $C = 2\%$ sur le calibre 150 alors

$$2\sigma = \Delta X = \frac{2}{100} \cdot 150 = 3$$

C'est-à-dire que l'écart maximum observé entre la plus grande et la plus petite valeur est de $\pm \Delta X = 6$ unités. Ainsi donc un appareil est d'autant meilleur que le nombre indiquant sa classe de précision est petit. Par exemple pour les appareils étalons $C = 0,1$ à $0,2$, pour les appareils de laboratoire $C = 0,5$ et pour les appareils industriels $C = 1$ à $2,5$.

Incertitude relative

La classe de précision correspond à une incertitude absolue indépendante de la valeur mesurée. Par contre l'incertitude relative est extrêmement variable selon la position de l'aiguille sur le cadran $\frac{\Delta X}{X_i} = \frac{C}{100} \cdot \frac{cal}{X_i}$

Exemple : $C = 1,5$ et $cal = 500$ donc $\Delta X = \frac{C \cdot cal}{100} = \frac{1,5 \cdot 500}{100} = 7,5$

Ainsi pour $X_i = 10 \Rightarrow \frac{\Delta X}{X_i} = 75\%$; Pour $X_i = 150 \Rightarrow \frac{\Delta X}{X_i} = 5\%$; Pour $X_i = 400 \Rightarrow \frac{\Delta X}{X_i} = 1,8\%$

Seule la dernière mesure est acceptable.

D'une manière générale, quelle que soit la qualité d'un appareil de mesure, on n'obtient une bonne lecture que dans le dernier tiers du cadran.

Erreur et incertitude de lecture

Il est difficile d'apprécier à l'œil mieux que le $\frac{1}{4}$ de division du cadran. On a donc :

$$\Delta N = 0,25 \Rightarrow \Delta X = \Delta N \frac{cal}{N} = 0,25 \frac{cal}{N} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta X}{X_i} = \frac{0,25}{N} \cdot \frac{cal}{X_i}$$