الباب الأول

القسمة الإقليدية
في مجموعة الأعداد الصحيحة

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: عدد تام عوض عدد كامل أو عدد مثالي.

عددان متحابان عوض عددان متراضيان.

الهدف: تعيين قواسم عدد طبيعي في مجموعة الأعداد الطبيعية تمهيدا لتعريف قواسم عدد صحيح في مجموعة الأعداد الصحيحة.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$ ".

الحل:

1. قواسم 28 هي 1؛ 2؛ 4؛ 7؛ 14؛ 28 و لدينا $28 = 14+7+4+2+1$. نستنتج أن 28 عددا تاما.
2. قواسم 220 هي 1؛ 2؛ 4؛ 5؛ 10؛ 11؛ 20؛ 22؛ 44؛ 55؛ 110 و 220.

لدينا: $284 = 110+55+44+22+20+11+10+5+4+2+1$.

قواسم 284 هي: ...

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: يهدف الجزء الأول إلى التمهيد الحدسي لمبرهنة القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$ و يهدف الجزء الثاني إلى مقاربة تعريف الموافقة في $\mathbb{Z}$.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الموافقات في $\mathbb{Z}$ ".

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: تخمين بعض خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$ " و يتم باستعمال جهاز الداتاشو.

الحل: يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

النشاط الرابع

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مفهوم الاستدلال بالتراجع.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الاستدلال بالتراجع " و يتم باستعمال جهاز الداتاشو و كذلك العمل ضمن أفواج لإنجاز البرهان المطلوب.

الحل: يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

الأعمال الموجهة

التشفير التآلفي

تصحيح: /

الهدف: تعريف التشفير التآلفي و استعماله لتشفير رسائل و فك أخرى مشفرة باستعمال المفتاح المناسب.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

يوم الأسبوع الذي يصادف تاريخا معينا

تصحيح: /

الهدف: تعيين يوم الأسبوع الذي يصادف تاريخا معينا.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

تعيين بواقي قسمة قوى عدد طبيعي على آخر

تصحيح: /

الهدف: تعيين، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة العدد الطبيعي a^n على b.

توجيهات: يقدم النشاط باستعمال جهاز الداتاشو و كذلك العمل ضمن أفواج لإنجاز البرهان المطلوب.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 ـ قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$.

1 الأعداد التي تكون قاسمة للعدد 204 هي :2 ، 3 ، 4 ، 6 ،12.

14
- $(x-2)(y-3)=xy-3x-2y+6$.
- $xy=3x+2y$ يعني $(x-2)(y-3)=6$. و منه لدينا عدة حالات:

الحالة الأولى: $x-2=1$ و $y-3=6$ أي $(x;y)=(3;9)$.

الحالة الثانية: $x-2=6$ و $y-3=1$ أي $(x;y)=(8;4)$.

الحالة الثالثة: $x-2=-1$ و $y-3=-6$ أي $(x;y)=(1;-3)$.

الحالة الرابعة: $x-2=-6$ و $y-3=3$ أي $(x;y)=(-4;2)$.

الحالة الخامسة: $x-2=2$ و $y-3=3$ أي $(x;y)=(4;6)$.

الحالة السادسة: $x-2=3$ و $y-3=2$ أي $(x;y)=(5;5)$.

الحالة السابعة: $x-2=-2$ و $y-3=-3$ أي $(x;y)=(0;0)$.

الحالة الثامنة: $x-2=-3$ و $y-3=-2$ أي $(x;y)=(-1;1)$.

2 ــ القسمة الأقليدية في $\mathbb{Z}$.

16 جــ ــ $-118=7(-17)+1$ ومنه الباقي 1 والحاصل -17.

د ــ $-152=7(-22)+2$ ومنه الباقي 2 والحاصل -22 .

17 $n=41k+5$ حيث $41k+5\leq 100$ أي $k=0$ أو $k=1$ أو $k=2$ ومنه $n=5$ أو $n=46$ أو $n=87$.

3 ــ الموافقات في $\mathbb{Z}$.

25 برر صحة العبارات التالية :

أ ــ $45-3=42=7\times 6$ معناه $45\equiv 3[7]$.

ب ــ $152-2=150=3\times 20$ معناه $152\equiv 2[3]$.

جــ ــ $29+1=30=6\times 5$ معناه $29\equiv -1[6]$.

د ــ $137+3=140=28\times 5$ معناه $137\equiv -3[5]$.

و ــ $-13-2=-15=5(-3)$ معناه $-13\equiv 2[5]$.

هــ ــ $-17+7=-10=10(-1)$ معناه $-17\equiv -7[10]$.

26 نعتبر الموافقة (1) التالية $37\equiv x\ [4]$

2. العدد الطبيعي الأصغر تماما من 4 ويحقق (1) هو باقي القسمة الأقليدية لـــ 37 على 4 وهو 1.

27 4 ، 13 ، 20 ، 27 .

29 $a\equiv 4[n]$ ؛ $b\equiv 14[n]$ و $c\equiv -34[n]$.

5 ــ خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$.

30 $140\equiv 8[12]$ إذن $n\equiv 8[12]$، ومنه باقي قسمة العدد n على 12 هو 8.

33 باقي قسمة العدد 67 على 11 هو 1.

لدينا $67\equiv 1[11]$ ومنه $67^{13}\equiv 1[11]$ إذن باقي قسمة العدد 67^{13} على 11 هو 1.

4 ــ الاستدلال بالتراجع .

35 نسمي $p(n)$ الخاصية $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

$p(0)$ هي $0=\dfrac{0(0+1)}{2}$ وهذا صحيح

نفرض $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ولنبرهن صحة $p(n+1)$.

$1+2+3+...+n+(n+1)=\dfrac{n(n+1)}{2}+n+1=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ إذن حسب مبدأ التراجع ينتج من أجل كل عدد طبيعي n ، $p(n)$

تمارين للتّعــمّق

1 ــ قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$.

40 المسافة بين العمودين المتتاليين هي عدد طبيعي x حيث $2 < x < 5$

وبالتالي : إمّا $x = 3$ وإما $x = 4$. لدينا 4 لا يقسم 90 بينما 3 هو قاسم مشترك للعددين 90 و 156

ونأخذ قاسما مشتركا لأن كل زاوية القطعة يغرس عمود. إذن المسافة بين عموديين متتاليين هي $3m$.

محيط القطعة هو $2(90+156) = 492\,m$ ولدينا عدد الأعمدة هو نفس عدد الفراغات الموجودة بين عمودين متتاليين أي

$$\frac{492}{3} = 164$$

42 1) $\dfrac{n+2}{n-1} = \dfrac{n-1+3}{n-1} = \dfrac{n-1}{n-1} + \dfrac{3}{n-1} = 1 + \dfrac{3}{n-1}$

وبالتالي لكي يكون $\dfrac{n+2}{n-1}$ عددا صحيحا يكفي أن يكون $\dfrac{3}{n-1}$ عددا صحيحا ولهذا يجب أن يكون العدد $(n-1)$ قاسما للعدد 3 .

قواسم العدد 3 هي -1 , -3 , 1 و 3 وبالتالي : $(n-1=-1)$, $(n-1=-3)$ ، $(n-1=1)$ أو $(n-1=3)$

معناه $(n=0)$, $(n=-2)$ ، $(n=2)$ أو $(n=4)$ وبما أن n عدد طبيعي فإن قيمه الممكنة هي : 0 ، 2 و 4 .

2) ليكن α و β عددين طبيعيين حيث : $a = 2^{\alpha} \times 3^{\beta}$ ومنه $a^2 = 2^{2\alpha} \times 3^{2\beta}$ عدد قواسم a^2 هو $(2\alpha+1)(2\beta+1)$ و عدد قواسم a هو $(\alpha+1)(\beta+1)$

ومن المعطيات لدينا : $(2\alpha+1)(2\beta+1) = 3(\alpha+1)(\beta+1)$ معناه $4\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 1 = 3\alpha\beta + 3\alpha + 3\beta + 3$

ومعناه $\alpha\beta - \alpha = \beta + 2$ يكافئ $\alpha(\beta-1) = \beta + 2$ أي $\alpha = \dfrac{\beta+2}{\beta-1}$. وحسب السؤال السابق ينتج أن $\begin{cases}\alpha = 2\\ \beta = 4\end{cases}$ أو $\begin{cases}\alpha = 4\\ \beta = 2\end{cases}$ ؛ إذن $a = 2^2 \times 3^4 = 324$ أو $a = 2^4 \times 3^2 = 144$.

2 ــ القسمة الأقليدية في $\mathbb{Z}$.

49 ب ــ $a = -3475$ و $b = 53$. حاصل قسمة العدد a على b هو -66 ، لدينا $53k \le -3475 \le 53(k+1)$ ومنه $k \le \dfrac{-3475}{53} = -65{,}56$ و $k \ge \dfrac{-3528}{53} = -66{,}56$ إذن $k = -66$ ، وبالتالي $-3498 \le -3475 \le -3445$

3 ــ الموافقات في $\mathbb{Z}$ وخواصها

61 أ ــ x عدد صحيح

$x \equiv$	0	1	2	3	4	$[5]$
$2x \equiv$	0	2	4	1	3	$[5]$

ب ــ $2x \equiv 3[5]$ معناه $x \equiv 4[5]$.

4 ـ تشفير الكلمات .

أ	ب	ت	ث	ج	ح	خ	د	ذ	ر	ز	س	ش	ص	ض
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

ط	ظ	ع	غ	ف	ق	ك	ل	م	ن	ه	و	ي
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

65 نقوم بعملية التشفير باستعمال التحويل $x \mapsto y$ حيث y هو باقي قسمة $x+3$ على 28 .

1) شفر الكلمة " **الجزائر**" هو" **ثهدصثثش** ".

2) ليكن y من المجموعة $\boldsymbol{N}$ ، $x+3 \equiv y\ [28]$ معناه $x \equiv y-3[28]$ ؛ إذا كان $y \geq 3$ فإن $x = y-3$ وإذا كان $y < 3$ فإن $x = y-3+28 = y+25$

3) حل تشفير: **تبضل:** يوسف ؛ **لثغوا ثهصاشثث:** فاطمة الزهراء ؛ **وذوز** : محمد.

5 ـ الاستدلال بالتراجع .

70 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بِـ $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$.

المطلوب إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 3$.

الخاصية الابتدائية صحيحة لأن $u_0 = 3$.

نفرض أن $u_n = 3$ ولدينا $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} = \sqrt{9} = 3$

إذن حسب مبدأ التراجع لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 3$ أي المتتالية (u_n) ثابتة .