

## الباب الثاني

### المتطلبات التدريبية

## الأنشطة

### النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: التذكير بتوليد متتالية معرفة بعلاقة تراجعية أو بعبارة الحد العام بدلالة  $n$ .

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " المتتاليات ".

الحل:

$$1. u_{n+1} = 2u_n + 1$$

$$2. v_n = 3n - 5$$

### النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: التذكير بالمتتالية الحسابية و المتتالية الهندسية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرتين " المتتالية الحسابية و المتتالية الهندسية " و " المتتالية الرتبية "

الحل: بسيط

### النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: نمذجة وضعية و مقارنة المتتاليات من الشكل  $u_{n+1} = au_n + b$ .

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " المتتاليات من الشكل  $u_{n+1} = au_n + b$  " و يتم ضمن أفواج.

الحل: يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

### النشاط الرابع

تصحيح: /

الهدف: توظيف المتتاليات من الشكل  $u_{n+1} = au_n + b$ .

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " المتتاليات من الشكل  $u_{n+1} = au_n + b$  " و يتم ضمن أفواج.

الحل: بسيط

## الأعمال الموجهة

### النمو الديموغرافي

تصحيح: /

الهدف: توظيف المتتاليتين الهندسية و الحسابية في وضعيات لها دلالة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

تطور نسبة الزبناء

تصحيح: الزبائن عوض الزبناء

الهدف: توظيف المتتاليات من الشكل  $u_{n+1} = au_n + b$  في وضعيات لها دلالة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

تخمين عبارة الحد العام لمتتالية ثم اثباتها

تصحيح: /

الهدف: التخمين ثم الإثبات باستعمال الاستدلال بالتراجع أو باستعمال متتالية مساعدة.

توجيهات: يقدم النشاط باستعمال جهاز الداتاشو و كذلك العمل ضمن أفواج لإنجاز البرهان المطلوب.

الحل: بسيط

## التمارين

### تمارين تطبيقية

#### 1 - المتتاليات العددية

2

أ -  $u(0) = 5$  ،  $u(1) = 3$  و  $u(2) = -3$ .

ب -  $u(13) = -333$  ،  $u(50) = -4995$  و  $u(100) = -19995$ .

ج -  $u(2n) = -4n^2 + 5$  ؛  $u(n+1) = -2n^2 - 4n + 4$ .

3 نعتبر المتتالية  $u$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :

$u_0 = 2$  و  $u_{n+1} = 3 - 2u_n$ .

$u_1 = -1$  ،  $u_2 = 5$  و  $u_3 = -7$  .  $u_{10} = 1025$ .

#### 2 - المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية .

5

$u_{13} = -32$ .

$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{13} = 7(7 - 32) = -175$ .

6

$u_{33} = 48$ .

$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{33} = 17(-1, 5 + 48) = 790,5$ .

#### 3 - اتجاه تغير ورتابة متتالية .

15

1) ليكن  $n$  عددا طبيعيا غير معدوم،  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{4^n} = \frac{4n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^2$ .

(2) من أجل كل  $n \geq 1$  فإن  $n + n \geq n + 1$  معناه  $2n \geq n + 1$  أي  $\frac{2n}{n+1} \geq 1$  ويكافئ  $\left(\frac{2n}{n+1}\right)^2 \geq 1$  أي  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$  وبما أن كل الحدود موجبة تماماً فإن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة .

16 (1) لدينا من أجل كل  $n \in \mathbb{N}^*$  ،  $2^n > 0$  و  $n^2 > 0$  إذن  $\frac{2^n}{n^2} > 0$  أي  $u_n > 0$

(2) نعتبر كثير الحدود  $P(x) = x^2 - 2x - 1$  ،  $\Delta' = 2$  ،  $x' = 1 - \sqrt{2}$  ،  $x'' = 1 + \sqrt{2}$  .  
 $P(x) > 0$  معناه  $x \in ]-\infty; 1 - \sqrt{2}[ \cup ]1 + \sqrt{2}; +\infty[$  ؛  
 ومنه إذا كان  $n \geq 3$  فإن  $n \in ]1 + \sqrt{2}; +\infty[$  ومنه  $P(n) > 0$  .

$$(3) \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{2^n} = \frac{2n^2}{(n+1)^2}$$

إذا كان  $n \geq 3$  فإن  $n^2 - 2n - 1 > 0$  وهذا يعني أن  $n^2 > 2n + 1$  أي  $n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1$  ومعناه  $2n^2 > (n+1)^2$

ويكافئ  $\frac{2n^2}{(n+1)^2} > 1$  أي  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$  وبما أن كل الحدود موجبة فإن  $u_{n+1} > u_n$  .

وبالتالي ابتداء من  $n = 3$  أي من الحد الثالث  $u_3$  تكون المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماماً .

#### 4 - المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ .

$$19 \quad \text{أ} \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 3u_n - 3 = 3v_n$$

ب - من السؤال أ - ينتج أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها 3 .

21 (2) تصحيح نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $v_n = u_n + \frac{1}{2}$  .

$$\text{أ} \quad v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3u_n + 1 + \frac{1}{2} = 3\left(u_n + \frac{1}{2}\right) = 3v_n$$

#### تمارين للتعمق

#### 1 - المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية .

$$22 \quad (1) \quad r = \frac{v_8 - v_4}{4} = \frac{1}{2} ; v_0 = v_4 - 4r = 3$$

$$(2) \quad \text{أحسب} \quad v_n = 3 + \frac{1}{2}n = 50 ; n = 94$$

$$(3) \quad S = v_6 + v_7 + \dots + v_{94} = \frac{89}{2}(v_6 + v_{94}) = 2492 ; S = \frac{89}{2}(2v_0 + 100r) = 2492$$

#### 2 - اتجاه تغير ورتابة متتالية .

$$31 \quad (1) \quad u_1 = -11,2 \text{ و } u_2 = -23,08 \text{ و } u_3 = -33,77$$

$$(2) \quad u_{n+1} - u_n = 0,9 \text{ ، } u_{n+1} - u_n > 0 \text{ أي } (u_n) \text{ متزايدة تماماً.}$$

#### 3 - المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ .

35 لتكن المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بـ  $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 1)$  .

$$(1) \quad 3u_0 = u_0 - 1 \text{ معناه } u_0 = -\frac{1}{2}$$

$$(2) \quad \text{نضع } u_0 = 4 \text{ و } v_n = 2u_n + 1$$

$$v_{n+1} = 2u_{n+1} + 1 = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}v_n - \frac{1}{3} \quad v_0 = 9$$

$$(ب) \quad u_n = \frac{1}{2} \left( 9 \times \left( \frac{1}{3} \right)^n - 1 \right) ; v_n = 9 \times \left( \frac{1}{3} \right)^n$$

### مسائل

$$(1) \quad u_2 = u_1 + 150 = 5150 \text{ DA}$$

(ب) من أجل  $n$  عدد طبيعي لدينا:  $u_{n+1} = u_n + 150$  إذن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها 150  
ومنه  $u_8 = 150 \times 8 + 4850 = 9600 \text{ DA}$  ،  $u_n = u_1 + (n-1)150 = 150n + 4850$

$$(ت) \quad S = u_1 + u_2 + \dots + u_8 = \frac{8}{2}(u_1 + u_8) = 58400 \text{ DA}$$

$$(2) \quad v_2 = v_1 + 0,03v_1 = 1,03v_1 = 5150 \text{ DA}$$

(ب) من أجل  $n$  عدد طبيعي لدينا:  $v_{n+1} = v_n + 0,03v_n = 1,03v_n$  إذن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها 1,03

$$\text{ومنه } v_8 = 5000(1,03)^7 = 6149.37 \text{ DA} , v_n = v_1(1,03)^{n-1} = 5000(1,03)^{n-1}$$

$$(ت) \quad T = v_1 + v_2 + \dots + v_8 = v_1 \frac{(1,03)^8 - 1}{1,03 - 1} = 44461,68 \text{ DA}$$

(3) العقد الثاني أقل تكلفة إذن عمر يختار هذا العقد .