الباب الخامس

الدوال التناظرية

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تخمين نهايات دالة تناظرية عند إطراف مجموعة تعريفها و مقاربة مفهوم الخط المقارب.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " نهايات دالة تناظرية " ويتم باستعمال جهاز الداتاشو.

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: تخمين نهايات دالة تناظرية عند إطراف مجموعة تعريفها و مقاربة مفهوم الخط المقارب.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " نهايات دالة تناظرية " ويتم باستعمال جهاز الداتاشو.

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

التعرف على المستقيمات المقاربة من جدول التغيرات

تصحيح: /

الهدف: اكتشاف كيف يمكن استخراج المستقيمات المقاربة من جدول التغيرات.

توجيهات: يتم تقديم العمل في شكل أفواج.

الحل: بسيط

المستقيم المقارب و قواسم عدد طبيعي

تصحيح: /

الهدف: تعيين نقط منحن التي إحداثياتها أعداد طبيعية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

الربط بين دالة، جدول تغيرات و منحن

تصحيح: /

الهدف: توظيف خواص الدوال التناظرية.

توجيهات: يتم تقديم العمل في شكل أفواج.

الحل: بسيط

التمارين

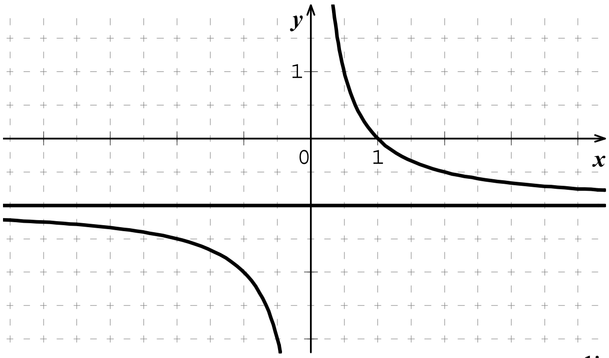
تمارين تطبيقية

1 ـ نهايات الدوال التناظرية

1 نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1-x}{x}$ و ليكن (C_f) منحنيها البياني.

.1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x}{x}=-1$ ، المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=-1$.

.2 $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$



x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	$+\infty$ ↘ -1

2 f الدالة " مقلوب " معرفة على $\mathbb{R}^*$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ $\qquad$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$ $\qquad$ 4) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} f(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=-\infty$ $\qquad$ 6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$

8 f دالة عددية معرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$ وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$ إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y=1$ مستقيم مقارب للمنحني (C) الممثل للدالة f بجوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$.

11 معادلتا لكل من المستقيمين المقاربين للمنحني هما : $x=\frac{1}{2}$ و $y=1$

x	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{1}{2}$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	1 ↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘ 1

2 ـ دراسة دالة تناظرية

13 1 ـ أ- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2-\frac{2}{x+2}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ ، المنحني يقبل مستقيما معادلته $y=2$.

ب- $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x)=+\infty$ ، المنحني يقبل مستقيما معادلته $x=-2$.

جـ- $f'(x)=\frac{2}{(x+2)^2}$ ، من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-2\}$ ، $f'(x)>0$.

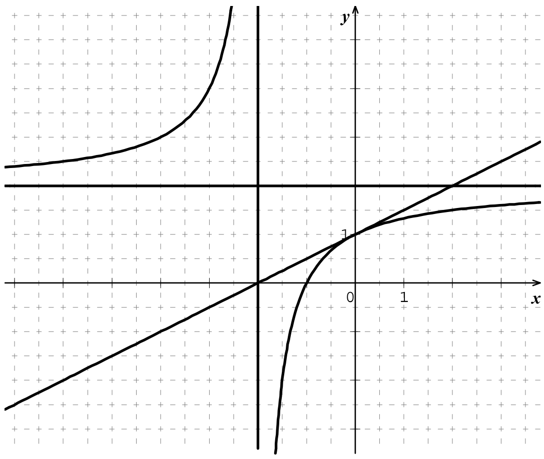
د- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$	2	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	2

2 ــ $(0;1)$ ؛ $(-1;0)$.

ــ $y=\frac{1}{2}x+1$.

ــ إنشاء المماس (Δ) والمنحني (C) .



18 1.**تصحيح** أدرس تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	‖	-	
$f(x)$	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-1

.معادلتا المستقيمين المقاربين للمنحني (C) : $x=1$ و $y=-1$.

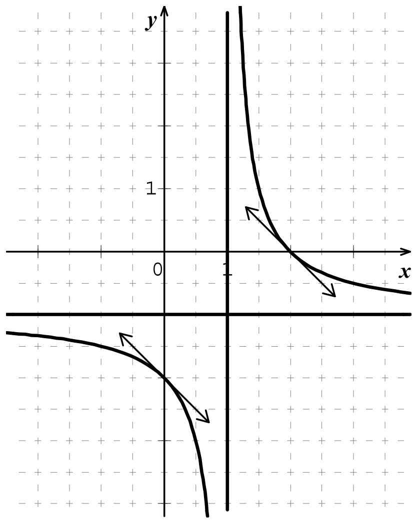
2.أ) $(0;-2)$ ؛ $(2;0)$.

ب) $f'(x)=-1$ معناه $\frac{-1}{(x-1)^2}=-1$

أي $(x-1)^2=1$ وهذا يعني أن $x=0$ أو $x=2$.

جـ) $y=-x-2$ ؛ $y=-x+2$.

3.الرسم.



تمارين للتعمق

23 أرفق بكل منحن من المنحنيات المبينة في الشكل دالة من الدوال التالية:

C_1 هو منحني الدالة f_6 ، C_2 هو منحني الدالة f_5 ، C_3 هو منحني الدالة f_2 ، C_4 هو منحني الدالة f_4 ،
C_5 هو منحني الدالة f_3 ، C_6 هو منحني الدالة f_1

25 **الطريقة البيانية:**

1.بين أن حل المعادلة $x^2=\dfrac{4x-5}{x-2}$ يعني $x^2(x-2)=4x-5$ أي $x^3-2x^2-4x+5=0$ حيث $(x\neq 2)$

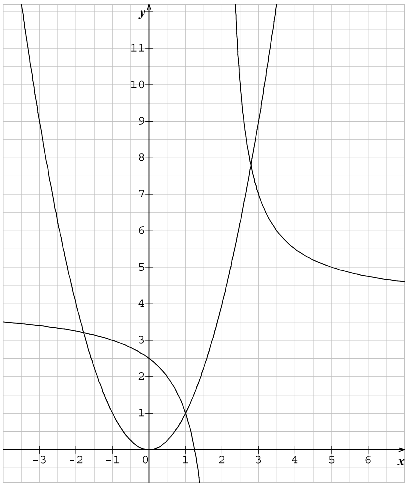
2. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـــ: $f(x)=\dfrac{5x-4}{x-2}$

أ- $f(x)=\dfrac{5x-10+6}{x-2}=\dfrac{5x-10}{x-2}+\dfrac{6}{x-2}=\dfrac{5(x-2)}{x-2}+\dfrac{6}{x-2}=5+\dfrac{6}{x-2}$

ب- الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;2[$ و متناقصة تماما على المجال $]2;+\infty[$.

3. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $g(x)=x^2$

رسم في نفس المعلم المنحني C_g الممثل للدالة g (انظر الشكل)



4.عدد حلول المعادلة $x^3-2x^2-4x+5=0$ هو عدد نقط تقاطع المنحني C_g

مع المنحني (C) و هو ثلاثة حلول

الحل الأول $x_1=1$ ، الحل الثاني $x_2\in\left]-2;-\dfrac{3}{2}\right[$ ، الحل الثالث $x_3\in\left]\dfrac{5}{2};3\right[$

الطريقة الجبرية:

1.ننشر العبارة $(x-1)(x^2-x-5)$

2.نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=x^2-x-5$

أ- $h'(x)=2x-1$. الدالة h متزايدة تماما على $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ و متناقصة تماما على $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$

ب- حل في المعادلة $h(x)=0$ تعني $x^2-x-5=0$

مميز كثير الحدود x^2-x-5 هو $\Delta=21$ ، إذن المعادلة $x^2-x-5=0$ تقبل حلين هما $x'=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$

و $x''=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$

3. $x^3-2x^2-4x+5=0$ يعني $(x-1)(x^2-x-5)=0$ و منه $(x=1)$ أو $\left(x=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right)$ أو $\left(x=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$

مسائل

28 ثمن بضاعة هو $120DA$.إذا عرف هذا الثمن ارتفاعا بنسبة 25% يكون ثمنه

$$120+\left(120\times\frac{25}{100}\right)=120+\frac{3000}{100}=150$$

إذا عرف الثمن انخفاضا بنسبة غير معروفة $y\,\%$ ب حيث ثمن البضاعة هو من جديد $120DA$ فإن:

$120=150-\dfrac{150y}{100}$ و منه $120=\dfrac{1500-15y}{10}$ أي $1500-15y=1200$ أي $y=20$

2.بصفة عامة، ثمن P لبضاعة بالدينار يعرف ارتفاعا بنسبة $x\,\%$ يكون ثمنه $\dfrac{100P+Px}{100}=P+\left(P\times\dfrac{x}{100}\right)$

إذا عرف الثمن انخفاضا بنسبة $y\,\%$ ويعود إلى قيمته الأصلية P فإن:

$\dfrac{100P+Px}{100}-\left(\dfrac{100P+Px}{100}\times\dfrac{y}{100}\right)=P$ أي $\dfrac{100+x}{100}-\left(\dfrac{100+x}{100}\times\dfrac{y}{100}\right)=1$

$\dfrac{100+x}{100}-\left(\dfrac{100+x}{100}\times\dfrac{y}{100}\right)=1$ تعني $\left(\dfrac{100+x}{100}\times\dfrac{y}{100}\right)=\dfrac{100+x}{100}-1=\dfrac{x}{100}$

$\left(\dfrac{100+x}{100}\times\dfrac{y}{100}\right)=\dfrac{x}{100}$ تعني $\dfrac{y}{100}=\dfrac{x}{100}\times\dfrac{100}{100+x}$ ومنه $y=\dfrac{100x}{x+100}$

3. نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;100]$ بـــ: $f(x)=\dfrac{100x}{x+100}$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الوحدة: $1cm$ من أجل 5 وحدات.

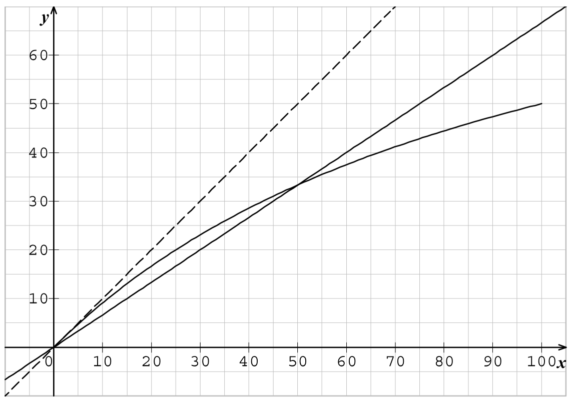
أ- $f(x)=\dfrac{100x+10000-10000}{x+100}=\dfrac{100(x+100)}{x+100}-\dfrac{10000}{x+100}=100-\dfrac{10000}{x+100}$

ب- الدالة f متزايدة تماما على $[0;100]$

x	0 $\qquad\qquad$ 100
$f(x)$	0 $\nearrow$ 50

جـــ- معادلة المماس T للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0 هي : $y=1\times(x-0)+0$ أي $y=x$

د- رسم T و (C).



4. أ- $y=\dfrac{2}{3}x$ يعني $\dfrac{100x}{x+100}=\dfrac{2x}{3}$ و منه $2x(x+100)=300x$

أ- $2x(x+100)=300x$ يعني $2x(x-50)=0$ أي $(x=0)$ أو $(x=50)$

- إذا كان $(x=0)$ فإن $(y=0)$

- إذا كان $(x=50)$ فإن $\left(y=\dfrac{100}{3}\right)$

ب- بيانيا منحني الدالة f يقطع المستقيم الذي معادلته $y=\dfrac{2}{3}x$ في نقطتين احداثياتهما $(0;0)$ و $\left(50;\dfrac{100}{3}\right)$