الباب الأول

المتتاليات العددية

الأنشطة

<u>النشاط الأول</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> التذكير بالمتتالية الحسابية و المتتالية الهندسية.

<u>توجيهات:</u> يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " المتتالية الحسابية – المتتالية الهندسية " و يتم إنجازه ضمن أفواج.

<u>الحل:</u> بسيط

<u>النشاط الثاني</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> مقاربة مفهوم المتتالية المحدودة.

<u>توجيهات:</u> يقدم النشاط كمدخل للفقرة " المتتالية المحدودة و المتتالية الرتيبة " و يتم إنجازه ضمن أفواج كما يتم استعمال جهاز الداتاشو.

<u>الحل:</u> بسيط

<u>النشاط الثالث</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> مقاربة مبدأ الاستدلال بالتراجع.

<u>توجيهات:</u> يقدم النشاط كمدخل للفقرة " مبدأ الاستدلال بالتراجع " و يتم ضمن أفواج كما يتم استغلال جهاز الداتاشو.

<u>الحل:</u> يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

<u>النشاط الرابع</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> نمذجة وضعية و مقاربة المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$.

<u>توجيهات:</u> يقدم النشاط كمدخل للفقرة " المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ " و يتم ضمن أفواج.

<u>الحل:</u> يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

الأعمال الموجهة

النمو الديموغرافي

تصحيح: /

الهدف: توظيف المتتاليتين الهندسية و الحسابية في وضعيات لها دلالة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

تطور نسبة الزبناء

تصحيح: الزبائن عوض الزبناء

الهدف: توظيف المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ في وضعيات لها دلالة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

تخمين عبارة الحد العام لمتتالية ثم اثباتها

تصحيح: /

الهدف: التخمين ثم الإثبات باستعمال الاستدلال بالتراجع أو باستعمال متتالية مساعدة.

توجيهات: يقدم النشاط باستعمال جهاز الداتاشو و كذلك العمل ضمن أفواج لإنجاز البرهان المطلوب.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - تذكير حول المتتاليات العددية .

4 ليكن n عددا طبيعيا : $v_{n+1} - v_n = (3u_{n+1} - 1) - (3u_n - 1)$

معناه $v_{n+1} - v_n = 3u_{n+1} - 3u_n = 3(u_{n+1} - u_n)$ ومعناه $v_{n+1} - v_n = 3r$ إذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $3r$.

ليكن n عددا طبيعيا : $w_{n+1} - w_n = (u_{2n+2} + 3) - (u_{2n} + 3) = u_{2n+2} - u_{2n}$

لدينا : $u_{2n+2} = u_{2n} + (2n + 2 - 2n)r = 2r$ إذن $w_{n+1} - w_n = u_{2n} + 2r - u_{2n} = 2r$ ومنه (w_n) متتالية حسابية أساسها $2r$.

3 - اتجاه تغيّر ورتابة متتالية .

15 1) لدينا $u_n = \dfrac{1-n^2}{n} = \dfrac{1}{n} - n$ و $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - n - 1$ ومنه

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - n - 1 - \dfrac{1}{n} + n = \dfrac{-1}{n(n+1)} - 1$.

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ؛ $n(n+1) > 0$, ومنه $\dfrac{-1}{n(n+1)} < 0$ أي $\dfrac{-1}{n(n+1)} - 1 < -1$ إذن $\dfrac{-1}{n(n+1)} - 1 < 0$

وبالتالي من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ؛ $u_{n+1} - u_n < 0$. ينتج من هذا أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

2) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x}$ ومنه $u_n = f(n)$.

لدينا $f(x) = \dfrac{1}{x} - x$ ومنه الدالة f هي مجموع دالتين ، التآلفية $x \mapsto -x$ والدالة مقلوب $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ وكلتا هما متناقصتين تماما على $]0;+\infty[$ إذن الدالة f متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

16 1) لدينا $u_n = \dfrac{-2n^2+3n+1}{n} = -2n+3+\dfrac{1}{n}$ و $u_{n+1} = -2n-2+3+\dfrac{1}{n+1}$ ومنه

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} - 2 = \dfrac{-1}{n(n+1)} - 2$.

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ؛ $n(n+1) > 0$, ومنه $\dfrac{-1}{n(n+1)} < 0$ أي $\dfrac{-1}{n(n+1)} - 2 < -2$ إذن $\dfrac{-1}{n(n+1)} - 2 < 0$

وبالتالي من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ؛ $u_{n+1} - u_n < 0$. ينتج من هذا أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

2) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{-2x^2+3x+1}{x}$ ومنه $u_n = f(n)$.

لدينا $f(x) = (-2x+3) + \dfrac{1}{x}$ ومنه الدالة f هي مجموع دالتين ، التآلفية $x \mapsto -2x+3$ والدالة مقلوب $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ وكلتا هما متناقصتين تماما على $]0;+\infty[$ إذن الدالة f متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما

17

استعمال التعريف : ليكن n عددا طبيعيا ,

$$u_{n+1} - u_n = -3(n+1)^2 - 3(n+1) + 3n^2 + 3n = -6n - 6 = -6(n+1)$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n < 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

استعمال الدالة المرفقة: نعتبر الدالة $f : x \mapsto -3x^2 - 3x + \dfrac{5}{4}$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x) = -6x - 3$

من اجل كل $x \in [0;+\infty[$ ، $f'(x) < 0$ إذن الدالة f متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

18 1) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم، $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{4^{n+1}}{(n+1)^2} \times \dfrac{n^2}{4^n} = \dfrac{4n^2}{(n+1)^2} = \left(\dfrac{2n}{n+1}\right)^2$

2) من أجل كل $n \geq 1$ فإن $n+n \geq n+1$ معناه $2n \geq n+1$ أي $\dfrac{2n}{n+1} \geq 1$ ويكافئ $\left(\dfrac{2n}{n+1}\right)^2 \geq 1$ أي $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$

وبما أن كل الحدود موجبة تماما فإن المتتالية (u_n) متزايدة .

تمارين للتّعــمّــق

1 ـــ تذكير حول المتتاليات العددية .

38 1) لدينا $u_1=500$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=u_n+50$ ومنه (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=50$.
ومنه $u_n=u_1+(n-1)r$ وبالتالي : $u_n=50n+450$.

2) المبلغ الموضوع في أول ديسمبر 2007 هو u_n حيث $n=8\times12=96$ أي u_{96}
و $u_{96}=50\times96+450=5250\,DA$

3) المبلغ المجموع إلى غاية 31 ديسمبر 2007 هو $S=u_1+u_2+...+u_{96}=\frac{96}{2}(u_1+u_{96})$
ومنه $S=48(500+5250)=276000\,\text{DA}$.

39 نضع $u_1=5000$ الكمية التي تباع في اليوم الأول والكمية المخفضة في اليوم هي r .
$u_{n+1}=u_n-r$ ومنه (u_n) هي متتالية حسابية حدها الأول $u_1=5000$ وأساسها $-r$.
الكمية التي تباع في اليوم العاشر هي u_{10} .
لدينا $32000=u_1+u_2+...+u_{10}$ معناه $32000=\frac{10}{2}(u_1+u_{10})$
بما أن $u_{10}=u_1+9(-r)$ فإن $32000=5(2u_1-9r)$
وبالتالي $r=\frac{10000-6400}{9}=400L$.

40 1) لدينا (v_n) متتالية حسابية حدها الأول $v_0=45,4$ وأساسها r حيث $v_{12}=52,6$, الوحدة مليون نسمة .
$v_{12}=v_0+12r$ ومنه $r=\frac{v_{12}-v_0}{12}=\frac{52,6-45,4}{12}=0,6$ إذن كل سنة يتزايد عدد السكان بِـــ $0,6$ مليون نسمة
2) في عام 2020 عدد السكان هو v_{30} مقدرا بالمليون نسمة ؛ $v_{30}=v_0+30r=45,4+30\times0,6=63,4$
ومنه عدد السكان في عام 2020 هو $63,4$ مليون نسمة .

41 1) لدينا $u_1=9000$, $u_2=u_1+0,03u_1=1,03u_1=9270\,DA$
2) من أجل n عدد طبيعي لدينا : $u_{n+1}=u_n+0,03u_n=1,03u_n$ إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=1,03$.
3) $u_{10}=u_1q^9=9000\times(1,03)^9\simeq11742.96\,\text{DA}$
4) $S=12(u_1+u_2+...+u_{10})=12\times u_1\frac{q^{10}-1}{q-1}$ أي $S=12\times9000\frac{(1,03)^{10}-1}{0,03}$ ونجد
$S\simeq1238098.97\,\text{DA}$.

42 1) $p_1=p_0+0,05p_0=1,05p_0$ ؛ $p_2=p_1+0,05p_1=1,05p_1=(1,05)^2p_0$
$p_{n+1}=p_n+0,05p_n=1,05p_n$ وهذا من أجل كل عدد طبيعي n , إذن (p_n) هي متتالية هندسية أساسها $1,05$
ومنه : $p_n=(1,05)^n p_0$.
$p_n\geq2p_0$ معناه $(1,05)^n p_0\geq2p_0$ ومعناه $(1,05)^n\geq2$ (لأن $p_0>0$)
أي $\ln(1,05)^n\geq\ln2$ ويكافئ $n\ln(1,05)\geq\ln2$ ومعناه $n\geq\frac{\ln2}{\ln(1,05)}$ بحساب نجد $\frac{\ln2}{\ln(1,05)}\simeq14.2$ ومنه
$n\geq15$ ، إذن بعد 15 يصبح سعر البضاعة أكثر من $2p_0$.

43 1) $u_1=u_0-0,02u_0=0,98u_0=515,48$
$u_2=u_1-0,02u_1=0,98u_1=505,17$
2) $u_{n+1}=u_n-0,02u_n=0,98u_n$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=0,98u_n$ إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها $0,98$

ومنه $u_n=u_0(0,98)^n=526\times(0,98)^n$.

3) $u_{10}=526\times(0,98)^{10}=429.78$.

4) $u_n\le\frac{u_0}{2}$ معناه $526\times(0,98)^n\le\frac{526}{2}$ ومعناه $(0,98)^n\le0,5$ ويكافئ $\ln(0,98)^n\le\ln0,5$

ويكافئ $n\ln(0,98)\le\ln0,5$ بما أن $\ln(0,98)<0$ فإن $n\ge\frac{\ln0,5}{\ln(0,98)}$ أي $n\ge34.3$

ومنه ابتداء من سنة 2035 (أي $n=35$) يكون عدد السكان أقل من النصف .

5) $u_{310}=526\times(0,98)^{310}=1.002$ ، $u_{311}=526\times(0,98)^{311}=0.98$. في عام 2311 تكون القرية فارغة من السكان .

44 1) أ) $u_2=u_1+150=5150DA$.

ب)من أجل n عدد طبيعي لدينا: $u_{n+1}=u_n+150$ إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها 150

ومنه $u_n=u_1+(n-1)150=150n+4850$ ، $u_8=150\times8+4850=9600DA$.

ت) $S=u_1+u_2+...+u_8=\frac{8}{2}(u_1+u_8)=58400DA$.

2) أ) $v_2=v_1+0,03v_1=1,03v_1=5150DA$.

ب) من أجل n عدد طبيعي لدينا: $v_{n+1}=v_n+0,03v_n=1,03v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $1,03$

ومنه $v_n=v_1(1,03)^{n-1}=5000(1,03)^{n-1}$ ، $v_8=5000(1,03)^7=6149.37\,\mathrm{DA}$.

ت) $T=v_1+v_2+...+v_8=v_1\frac{(1,03)^8-1}{1,03-1}=44461,68DA$.

3) العقد الثاني أقل تكلفة إذن عمر يختار هذا العقد .