# الباب الثاني

# الاستمرارية و النهايات

# الأنشطة

**النشاط الأول**

**تصحيح:** /

**الهدف:** مقاربة المفهوم الحدسي للاستمرارية.

**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " المفهوم الحدسي للاستمرارية " و يتم ضمن أفواج.

**الحل:** بسيط

**النشاط الثاني**

**تصحيح:** /

**الهدف:** التمهيد لمبرهنة القيم المتوسطة.

**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الاستمرارية و المعادلات " .

**الحل:** بسيط

**النشاط الثالث**

**تصحيح:** /

**الهدف:** التذكير بالمستقيمات المقاربة.

**توجيهات:** يقدم النشاط كمدخل للفقرة " المستقيمات المقاربة " و يتم ضمن أفواج.

**الحل:** بسيط.

**النشاط الرابع**

**تصحيح:** /

**الهدف:** التعرف بيانيا على المستقيمات المقاربة.

**توجيهات: :** يقدم النشاط كمدخل للفقرة " المستقيمات المقاربة " و يتم ضمن أفواج.

**الحل:** بسيط

**النشاط الخامس**

**تصحيح:** /

**الهدف:** مقاربة مفهوم نهاية دالة مركبة.

**توجيهات: :** يقدم النشاط كمدخل للفقرة " مفهوم دالة مركبة – النهاية بالمقارنة " و يتم ضمن أفواج.

**الحل:** بسيط

# الأعمال الموجهة

**تحديد حلول المعادلة** $f(x)=k$

**تصحيح:** /

**الهدف:** توظيف دوال الكلفة.

**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

**الحل:** بسيط

**على نهج عمر الخيام**

**تصحيح:** /

**الهدف:** توظيف مبرهنة القيم المتوسطة.

**توجيهات:** يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

**الحل:** بسيط

**وجود مستقيم مقارب**

**تصحيح:** /

**الهدف:** التخمين ثم الإثبات باستعمال تعريف المستقيم المقارب المائل.

**توجيهات:** يقدم النشاط باستعمال جهاز الداتاشو و كذلك العمل ضمن أفواج لإنجاز البرهان المطلوب.

**الحل:** بسيط

# التمارين

## تمارين تطبيقية

**1 - الاستمرارية**

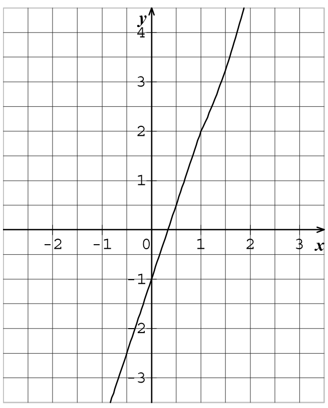
**6**

$$\begin{cases} f(x)=3x+m \ ; \ x\in\left]-\infty;1\right[ \\ f(x)=x^2+1 \ ; \ x\in\left[1;+\infty\right[ \end{cases} \quad (m\in\mathbb{R})$$

1) نعم الدالة $f$ مستمرة على $\left[1;+\infty\right[$، نعم الدالة $f$ مستمرة على $\left]-\infty;1\right[$

2) لكي يختار العدد $m$ بحيث تكون الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$، يجب أن تكون مستمرة عند $1$ أي $3+m=2$ و بالتالي $m=-1$

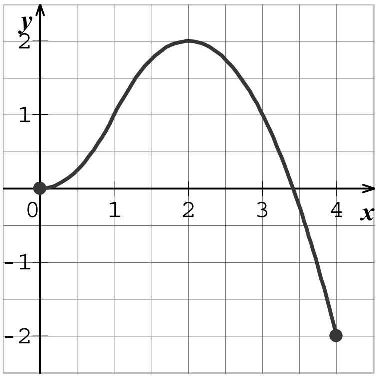
3) رسم المنحني الممثل للدالة $f$ :



## 2 - الاستمرارية و المعادلات

**9** 1) أ) جدول التغيرات

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | $2$ | | |
| | $0$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $-2$ |




ب) نعم الدالة $f$ مستمرة على المجال $[0;4]$ .

2) أ) على المجال $[2;4]$ المعادلة $f(x)=\frac{3}{2}$ تقبل حلا واحدا.

ب) بقراءة بيانية نلاحظ أن حل المعادلة $f(x)=\frac{3}{2}$ هو بالتقريب $0,7$ .

**10** 1) $f(x)=2x^3+2x+3$ . الدالة $f$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=6x^2+2$

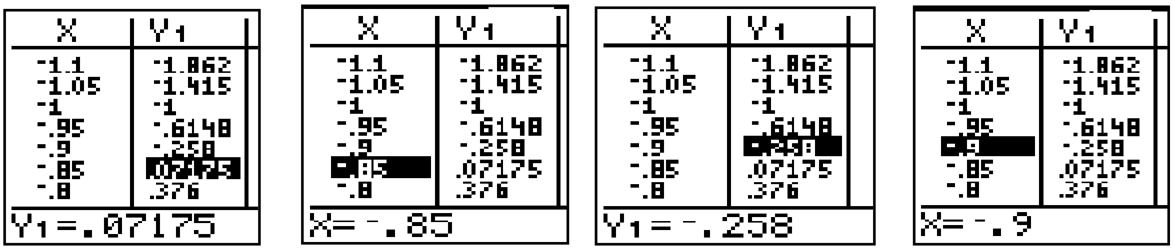
من اجل كل $x\in\mathbb{R}$ : $f'(x)>0$

$f$ مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا واحدا $\alpha$ . $f(-1)=-1$ و $f(0)=3$ و بالتالي $\alpha\in]-1;0[$

2) نستعمل جدول القيم في الحاسبة فنلاحظ أن :

$f(-0,9)\approx-0,258$ و $f(-0,85)\approx0,7175$




**23** لتكن $P(x)$ دالة كثير حدود . بما أن درجته فردية فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=+\infty$

أو $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=-\infty$ ، الدالة $P$ مستمرة على $\mathbb{R}$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $P(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{R}$.

**24** لتكن الدالة $g$ المعرفة على $[0;1]$ بـــ : $g(x)=f(x)-x$

الدالة $g$ مستمرة على $[0;1]$ لأنها مجموع دالتين مستمرتين على $[0;1]$

$g(0)=f(0)$ و $g(1)=f(1)-1$ .

$g(0)\geq0$ و $g(1)\leq0$ لأن $f(x)\in[0;1]$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $[0;1]$.

## 3 - تتمات على النهايات

**34** $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{5x+3}{2x-2}=-\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{5x+3}{2x-2}=+\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} \frac{-2x+1}{3-x}=-\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} \frac{-2x+1}{3-x}=+\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} \dfrac{x^2-3}{x+2} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2} \dfrac{x^2-3}{x+2} = -\infty$

، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \dfrac{5-2x^2}{x^2-4} = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} \dfrac{5-2x^2}{x^2-4} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{x^2+1}{(2x-1)^2} = +\infty$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+5x-6}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+6)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+6)}{(x+1)} = \frac{7}{2}$$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} \dfrac{2x^2-3x-4}{x^2-x-2} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \dfrac{2x^2-3x-4}{x^2-x-2} = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} \dfrac{2x^2-3x-4}{x^2-x-2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} \dfrac{x^2}{x^2-4x+3} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} \dfrac{x^2}{x^2-4x+3} = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \dfrac{2x^2-3x-4}{x^2-x-2} = -\infty$

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x+6}{x^2+x-2} = \lim_{x \to -2} \frac{3(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \to -2} \frac{3}{(x-1)} = -1$$

## 4 ـ المستقيمات المقاربة

**36** 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

2) أ) من أجل كل $x \in ]1;+\infty[$ : $f(x) = -x+3+\dfrac{2}{x-1}$

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (-x+3)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x-1} = 0$ .نستنتج أن المنحني $(C_f)$ يقبل المستقيم $D$ الذي معادلته $y = -x+3$ كمستقيم مقارب عند $+\infty$.

3) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \dfrac{-x^2+4x-1}{x-1} = +\infty$ .

تفسير النتيجة هندسيا : المنحني $(C_f)$ يقبل المستقيم الذي معادلته $x = 1$ كمستقيم مقارب .

**44** 2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x-2) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x+2}{(x+1)^2} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x-2) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+2}{(x+1)^2} = 0$ ،

3) ندرس حسب قيم $x$ إشارة $\dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$

4) يكفي أخذ $n = 33$

**45** لتكن الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = x - \frac{2}{(x-1)^2}$$

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{2}{(x-1)^2} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{2}{(x-1)^2} = 0$

إذن المنحني $(C)$ الممثل للدالة $f$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $\Delta$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ معادلته $y = x$

2) $f(x) - x = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$ و من أجل كل عدد حقيقي $x$ يختلف عن 1 ، $-\dfrac{2}{(x-1)^2} < 0$

إذن المنحني $(C)$ أسفل المستقيم $\Delta$ .

**51** 1) الدالة $u$ متزايدة تماما على $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ . $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{1}{2}} u(x)=+\infty$

2) الدالة $u$ متناقصة تماما على $]1;+\infty[$ . $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} u(x)=+\infty$

**52** تصويب: نفس أسئلة التمرين 51:

1) الدالة $u$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} u(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$

2) الدالة $u$ متناقصة تماما على $]-\infty;-1[$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=0$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} u(x)=-\infty$

**53** 2) أ) الدالة $h$ معرفة إذا كان $(x\in\mathbb{R})$ و $\left((1-x^2)\in\mathbb{R}\right)$ أي $D_h=\mathbb{R}$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$

**54** 1) $D_g=\mathbb{R}-\{-2\}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2} g(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} g(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$

**56** 1) $D_h=\left\{x\in\mathbb{R}:\left(x\in\mathbb{R}^*\right) \text{و} \left(g(x)>0\right)\right\}$ ، $D_h=\left\{x\in\mathbb{R}:\left(x\in\mathbb{R}^*\right) \text{و} \left(x\in\, ]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[\right)\right\}$

إذن $D_h=]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} h(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} h(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$ .

**58** $\lim\limits_{x\to-\infty} (f\circ f)(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} (f\circ f)(x)=+\infty$

**59** $\lim\limits_{x\to+\infty} (g\circ f)(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} (g\circ f)(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} (f\circ g)(x)=-\infty$ .

**62** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x+1}=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}=1$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \sqrt{\frac{2x}{1-x}}=+\infty$