الباب الثالث

الاشتقاقية

الأنشطة

<u>النشاط الأول</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> تذكير حول المشتقات.

<u>توجيهات:</u> يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " الإشتقاقية – تذكير ". و يتم ضمن أفواج.

<u>الحل:</u> يكفي تعيين معامل التوجيه ثم تطبيق المبرهنات حول المشتقات.

<u>النشاط الثاني</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> توظيف دوال الكلفة.

<u>توجيهات:</u> يقدم النشاط كمدخل للفقرة " دراسة دالة "

<u>الحل:</u> بسيط

<u>النشاط الثالث</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> مقاربة مشتقة دالة مركبة.

<u>توجيهات:</u> يقدم النشاط كمدخل للفقرة " اشتقاق دالة مركبة دالتين " و يتم ضمن أفواج مع استعمال جهاز الداتاشو.

<u>الحل:</u> يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

الأعمال الموجهة

<u>استعمال دالة مساعدة</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> استعمال دالة مساعدة لدراسة تغيرات دالة معطاة.

<u>توجيهات:</u> يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

<u>الحل:</u> بسيط.

<u>دراسة دالة ناطقة</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> التذكير بمنهجية دراسة اتجاه تغير دالة وكذا البحث عن المستقيمات المقاربة .

<u>توجيهات:</u> يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

<u>الحل:</u> بسيط

<u>مربع، مكعب، مقلوب و الجذر التربيعي لدالة</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> استنتاج تغيرات الدوال مربع، مكعب، مقلوب و الجدر التربيعي لدالة.

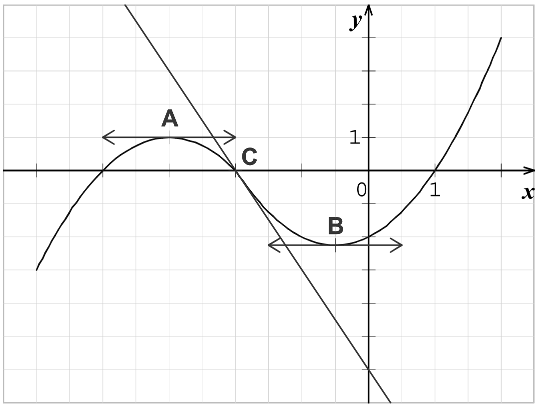
<u>توجيهات:</u> يقدم النشاط ضمن أفواج أو كواجب منزلي.

<u>الحل:</u> بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - الاشتقاقية



5 1. مجموعة تعريف الدالة f هي $[-5;2]$

2. جدول تغيرات الدالة f :

x	-5		-3		$-\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↗	1	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	4

3. $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ ، $f'(-3)=0$ ، $f'(-2)=\frac{-6-0}{0-(-2)}=-3$

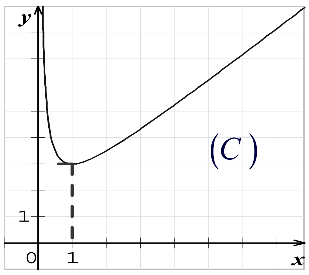
عين بقراءة بيانية العدد المشتق للدالة f عند كل من $-\frac{1}{2}$، -3 و -2 علما أن ترتيب النقطة B هو $-\frac{9}{4}$.

4. معادلة المماس للمنحني (C_f) عند النقطة A هي $y=1$. معادلة المماس للمنحني (C_f) عند النقطة B هي $y=-\frac{9}{4}$. معادلة المماس للمنحني (C_f) عند النقطة C هي $y=-3x-6$.

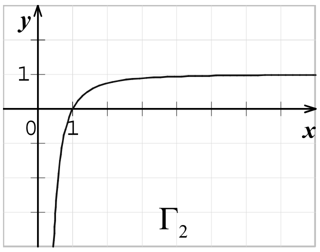
5. لا توجد مماسات أخرى موازية للمماس عند النقطة C.

2 - دراسة دالة

28

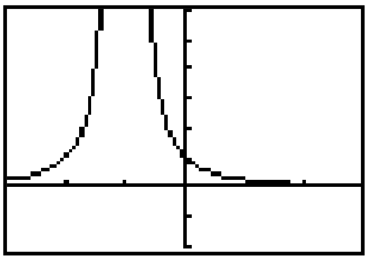


منحني الدالة f



منحني الدالة f'

32 1. تصويب:الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$



x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	0

2. الدالة f_1 متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ و متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ ($f_1=-2f$)

الدالة f_2 متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ و متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ ($f_2=2-f$)

3 - اشتقاق دالة مركب دالتين

58 (1 $g=\sqrt{f}$. الدالة g معرفة على $[-2;0]\cup[2;3]$

و من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;0]\cup[2;3]$ لدينا: $g'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ و منه جدول تغيرات g هو التالي:

x	-2		-1		0		2		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	|		|	$+$	
$g(x)$	1	↗	$\sqrt{2}$	↘	0		0	↗	3

2) $g=f^2$. الدالة g معرفة على $[-2;3]$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;3]$ لدينا:

$g'(x)=2f'(x)f(x)$ و منه جدول تغيرات g هو التالي:

x	-2		-1		0		1		2		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	↗	4	↘	0	↗	4	↘	0	↗	9

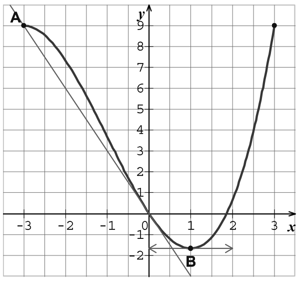
3) $g=\frac{1}{f}$. الدالة g معرفة على $[-2;0[\cup]0;2[\cup]2;3]$.

و من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;0[\cup]0;2[\cup]2;3]$: $g'(x)=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$ و منه جدول تغيرات g هو التالي:

x	-2		-1		0		1		2		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
$g(x)$	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$\frac{1}{3}$

تمارين للتعمق

62 1. معامل توجيه المستقيم (OA) هو -3 $\frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{9}{-3} = -3$



2. أ- باستعمال الشروط التالية : $f(-3) = 9$ و $f'(0) = -3$ و $f(0) = 0$

و $f'(1) = 0$ نجد : $a = \frac{1}{3}$ ، $b = 1$ ، $c = -3$ و $d = 0$

ب- $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$ و منه $f'(x) = x^2 + 2x - 3$

$f'(x) = 0$ إذا كان $(x = 1)$ أو $(x = -3)$. $f'(x) < 0$ إذا كان $x \in]-3;1[$

و $f'(x) > 0$ إذا كان $x \in]1;3]$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على $[1;3]$ و متناقصة تماما على $[-3;1]$.

مسائل

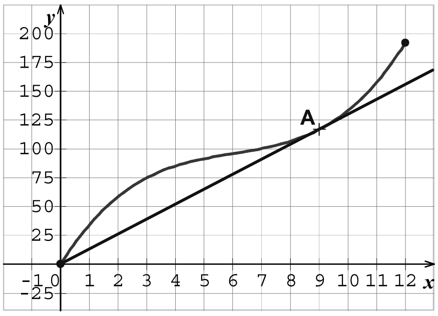
71 1) أ) $C_M(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{q^2}{3} - 6q + 40$

ب) دالة الكلفة المتوسطة هي الاقتصار على المجال $]0;12]$ لدالة كثير حدود من الدرجة الثانية يأخذ قيمته الحدية الصغرى عند $q_0 = -\frac{-6}{2\times\frac{1}{3}} = 9$.إذن الكلفة المتوسطة للإنتاج تكون صغرى عند إنتاج 9000 وحدة .

2) أ) من أجل $q \in [0;12]$: $C_m(q) = C'(q) = q^2 - 12q + 40$

ب) $C_M(9) = \frac{9^2}{3} - 6\times 9 + 40 = 13$ و $C_m(9) = 9^2 - 12\times 9 + 40 = 13$

إذن من أجل إنتاج 9000 وحدة تكون الكلفة الهامشية تساوي الكلفة المتوسطة.



3) عين معادلة للمماس T للمنحني (Γ) عند النقطة A التي فاصلتها 9 :

$y = C'(9)(q-9) + C(9) = 13q$

إذن المماس T للمنحني (Γ) عند النقطة A هو المستقيم (OA)

4) أ) تكون المؤسسة رابحة من أجل إنتاج q حيث $B(q) > 0$

أي من أجل $q \in]0;12]$: $-\frac{1}{3}q^3 + 2q^2 + 21q > 0$

$-\frac{1}{3}q^3 + 2q^2 + 21q > 0$ تكافئ $-\frac{1}{3}q^2 + 2q + 21 > 0$ لأن q موجب تماما

$-\frac{1}{3}q^2 + 2q + 21 > 0$ من اجل $q \in]0;3+6\sqrt{2}]$ ، $3+6\sqrt{2} \simeq 11,485$

و بالتالي تكون المؤسسة رابحة من أجل إنتاج أقل من 11485 و حدة

ب) عين عدد الوحدات التي تصنع حتى يكون الربح أعظميا ؟

من أجل $q \in]0;12]$ $B'(q) = -q^2 + 4q + 21$. $B'(q) = 0$ يكافئ $(q = 7)$ أو $(q = -3)$

q	0		7		12
$B'(q)$		$+$	0	$-$	
$B(q)$		↘		↗	

الدالة B تقبل قيمة حدية عظمى من أجل $q=7$ و هذه القيمة هي $B(7)=-\frac{7^3}{3}+2\times 7^2+21\times 7=\frac{392}{3}$

يكون الربح أعظميا إذا كان $130666\ DA$ و يكون أعظميا من أجل إنتاج 7000 وحدة .