الباب الخامس

الحساب التكاملي

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تخمين العلاقة بين مساحة حيز تحت منحن و الدالة الأصلية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " تكامل دالة ".

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مفهوم الدالة الأصلية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " القيمة المتوسطة ... ".

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

مساحة حيز محدد بمنحنيين

تصحيح: /

الهدف: استنباط طريقة لحساب مساحة حيز محدد بمنحنيين.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

حصر تكامل

تصحيح: /

الهدف: توظيف خواص التكاملات.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - تكامل دالة

4

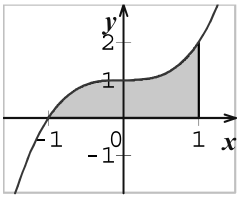
1. $\int_{0}^{3}(2x+3)dx=\left[x^2+3x\right]_0^2=10$

2) $\int_{-2}^{1}x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1}=\frac{1}{3}-\left(\frac{-8}{3}\right)=3$

3) $\int_{-5}^{5}(4-x)dx=\left[4x-\frac{x^2}{2}\right]_{-5}^{5}=\left[20-\frac{25}{2}\right]-\left[-20-\frac{25}{2}\right]=40$

4) $\int_{0}^{2}\left(1-x^2\right)dx=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=2-\frac{8}{3}=-\frac{2}{3}$

9 $f(x)=x^3+1$.



1. f موجبة على $[-1;+\infty[$ سالبة على $]-\infty;-1]$.

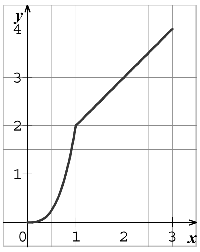
2. احسب بوحدة المساحة $(u.a)$ مساحة الحيز تحت المنحني بين العددين -1 و 1.

$$S=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3+1\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x\right]_{-1}^{1}=\left[\frac{1}{4}+1\right]-\left[\frac{1}{4}-1\right]=2$$

3. $S=2\times1\times0,5cm^2=1cm^2$

2 - خواص التكامل

26 التمثيل البياني لتالي هو لدالة f معرفة مستمرة على $[0;3]$ كما يلي:



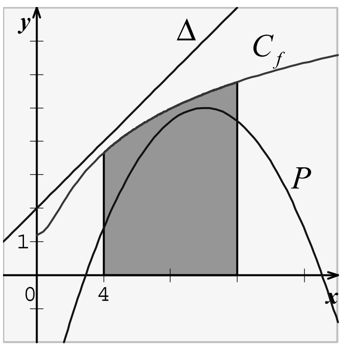
من أجل $x\in[0;1]$ ، $f(x)=x^3$

من أجل $x\in[1;3]$ ، $f(x)=x+1$

1. احسب $\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}x^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{4}$

$$\int_{1}^{3}f(x)dx=\int_{1}^{3}(x+1)dx=\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_1^3=\left[\frac{9}{2}+3\right]-\left[\frac{1}{2}+1\right]=6$$

2. $\int_{0}^{3}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{3}f(x)dx=\frac{1}{4}+6=\frac{25}{4}$



28 1. تصويب: باستعمال الشكل بين أن: $-\frac{1}{10}x^2+2x-5\leq f(x)\leq\frac{1}{2}x+2$

بقراءة بيانية المنحني C_f يقع أسفل Δ و أعلى P في المجال $[4;12]$،

نستنتج أن : $-\frac{1}{10}x^2+2x-5\leq f(x)\leq\frac{1}{2}x+2$

2. على المجال $[4;12]$، المنحني C_f أعلى محور الفواصل، إذن: $A=\int_{4}^{12}f(x)dx$

بما أن $-\frac{1}{10}x^2+2x-5\leq f(x)\leq\frac{1}{2}x+2$ فإن: $\int_{4}^{12}\left(-\frac{1}{10}x^2+2x-5\right)dx\leq\int_{4}^{12}f(x)dx\leq\int_{4}^{12}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx$

دالة أصلية للدالة g المعرفة بـــ $g(x)=-\frac{1}{10}x^2+2x-5$ هي الدالة G المعرفة بـــ: $G(x)=-\frac{1}{30}x^3+x^2-5x$

دالة أصلية للدالة h المعرفة بـــ $h(x)=\frac{1}{2}x+2$ هي الدالة H المعرفة بـــ: $H(x)=\frac{1}{4}x^2+2x$

$$\int_4^{12}\left(-\frac{1}{10}x^2+2x-5\right)dx=G(12)-G(4)=\frac{792}{30}-\left(-\frac{184}{30}\right)=\frac{976}{30}$$

$$\int_4^{12}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx=H(12)-H(4)=60-12=48$$

إذن: $\frac{976}{30}\le A\le 48$

3 - القيمة المتوسطة

31 نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2+1}{2x^2}$

1. $\int_1^4 f(x)dx=\int_1^4\frac{x^2+1}{2x^2}dx=\int_1^4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}\right]_1^4=\left[2-\frac{1}{8}\right]-\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right]=\frac{15}{8}$

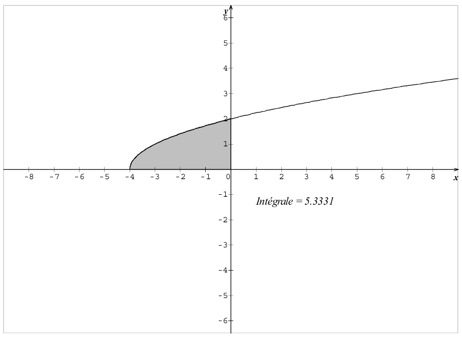
2. القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;4]$ هي $\mu=\frac{1}{4-1}\int_1^4 f(x)dx=\frac{1}{3}\times\frac{15}{8}=\frac{15}{24}$.

تمارين للتعمق

42 تصويب: 1.ادرس تغيرات الدالة f على $]-4;+\infty[$ (يمكن استنتج تغيرات f انطلاقا من الدالة " الجذر التربيعي " بدلا من الدالة " مربع ").

الدالة f متزايدة تماما على $]-4;+\infty[$

2. رسم المنحني



3. $h(x)=\frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x+4}$

و منه $h'(x)=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+4}+(x+4)\frac{1}{2\sqrt{x+4}}\right)$

و منه $h'(x)=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+4}+\frac{1}{2}\sqrt{x+4}\right)$

و منه $h'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x+4}\right)=\sqrt{x+4}=f(x)$

4. مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و محوري الإحداثيات هي:

$$\int_{-4}^{0}f(x)dx=\left[h(x)\right]_{-4}^{0}=h(0)-h(-4)=\frac{16}{3}$$

46 (1 $I_1=\int_0^1\frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^3}=\left[-\frac{1}{4\left(1+x^2\right)^2}\right]_0^1=-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$

2. ليكن $I_2=\int_0^1\frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^3}dx$

$$I_1+I_2=\int_0^1\frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}dx+\int_0^1\frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^3}dx=\int_0^1\frac{x\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}dx=\int_0^1\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

$$I_1+I_2=\int_0^1\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\frac{1}{2}\times\int_0^1\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\left[\frac{-1}{2\left(1+x^2\right)}\right]_0^1=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$I_1+I_2=\frac{1}{4}$ و $I_1=\frac{3}{16}$ ومنه $I_2=\frac{3}{4}-I_1=\frac{1}{4}-\frac{3}{16}=\frac{1}{16}$

3. تصويب: استنتج حصرا للتكامل $\int_0^1\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3}dx$

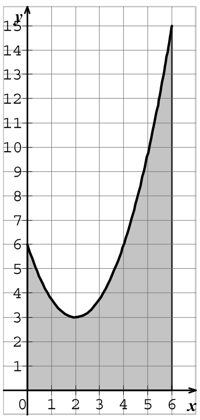
على المجال $[0;1]$، $x\geq x^2\geq x^3$.

$x^3\leq x^2\leq x$ و منه $\frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^3}\leq\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3}\leq\frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}$

و منه $\int_0^1\frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^3}dx\leq\int_0^1\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3}dx\leq\int_0^1\frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}dx$ أي $\frac{1}{16}\leq\int_0^1\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3}dx\leq\frac{3}{16}$

مسائل

55 نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;6]$ كما يلي: $f(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+6$



1. $S=\int_0^6 f(x)dx=\int_0^6\left(\frac{3}{4}x^2-3x+6\right)dx$

دالة أصلية F للدالة f على $[0;6]$ معرفة بـــ: $F(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+6x$

$$S=\left[\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+6x\right]_0^6=\frac{1}{4}\times6^3-\frac{3}{2}\times6^2+6^2=36(u.a)$$

2.مساحة المستطيل $OHMK$ تساوي $OH\times HM$

من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;6]$، $OH=x$.من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;6]$، $\left(C_f\right)$ يقع أعلى محور الفواصل.إذن الترتيب $f(x)$ للنقطة M من $\left(C_f\right)$ موجب أو معدوم

و منه $HM=f(x)$ و منه $R(x)=OH\times HM=x\times f(x)=\frac{3}{4}x^3-3x^2+6x$.

3.أ- $R(x)=S$ معناه $\frac{3}{4}x^3-3x^2+6x=36$ أي $\frac{3}{4}x^3-3x^2+6x-36=0$

ب- $g'(x)=\frac{9}{4}x^2-6x+6$ ، $\Delta=-18$ ، $\Delta<0$ و منه من اجل كل عدد حقيقي x من $[0;6]$، $g'(x)>0$

x	0 6
$g'(x)$	+
$g(x)$	$-36 \nearrow 54$

على المجال $[0;6]$ ، g قابلة للاشتقاق ومتزايدة تماما و 0 ينتمي إلى المجال $[-36;54]$إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا واحدا α على $[0;6]$.باستعمال الحاسبة البيانية، نجد $g(4,555)\approx-0,034$ و $g(4,56)\approx0,93$.