الباب السادس

دالة اللوغاريتم النيبيري

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تعريف الدالة اللوغاريتم النيبيري.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " دالة اللوغاريتم النيبيري ".

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: استنتاج الخواص الأولى و التعامل مع اللوغاريتمات و قيمها التقريبية.

توجيهات: يقدم النشاط بعد تعريف الدالة اللوغاريتم النيبيري.

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: تخمين الخواص الجبرية اللوغاريتم النيبيري و يتوج بتقديم الفقرة " الخواص الجبرية ".

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج.

الحل: يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

النشاط الرابع

تصحيح: /

الهدف: تخمين نهايات الدالة اللوغاريتم النيبيري .

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " دراسة الدالة اللوغاريتم النيبيري " و يتم ضمن أفواج.

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

دالة اللوغاريتم العشري

تصحيح: /

الهدف: تعريف و دراسة خواص الدالة اللوغاريتم العشري.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

دراسة دالة تتضمن لوغاريتم نيبيري

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

دراسة متتالية تتضمن لوغاريتم نيبيري

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - دالة اللوغاريتم النيبيري

5 3) مجموعة التعريف هي: $D = \left]-\infty;-1\right[\cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

من أجل x من D، $\ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)=0$ يعني $\frac{2x-1}{x+1}=1$ أي $x=2$ و منه مجموعة الحلول هي $\{2\}$.

6 مجموعة التعريف هي: $D = \left]-\infty;0\right[\cup \left]0;\frac{3}{2}\right[$

3) $\ln\left(2x^2\right) > \ln\left(6-4x\right)$ يعني $2x^2 > 6-4x$ أي $x^2+2x-3>0$

$x^2+2x-3>0$ يعني $x \in \left]-\infty;-3\right[\cup \left]1;+\infty\right[$ و منه مجموعة الحلول هي $\left(\left]-\infty;-3\right[\cup \left]1;+\infty\right[\right) \cap D$

أي مجموعة الحلول هي $\left]-\infty;-3\right[\cup \left]1;\frac{3}{2}\right[$

2 - الخواص الجبرية

11 • $A=1$ • $B=\frac{5}{2}$ • $C=2\ln 2-1$ • $D=-3$

12 • $A=\ln\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)$ • $B=\ln 20000$ • $C=\ln\left(100000\right)$

13 • $A=\ln\left(\frac{ac^2}{b}\right)$ • $B=\ln a\sqrt{ab}$ • $C=\ln\left(\frac{(a+1)\sqrt{(a+b)^3}}{\sqrt{b}}\right)$

24 د) $21000(1+0,035)^n \geq 30000$ تعني $n \geq \dfrac{\ln\left(\dfrac{10}{7}\right)}{\ln(1,035)}$ و $\dfrac{\ln\left(\dfrac{10}{7}\right)}{\ln(1,035)} \approx 10,37$

أصغر عدد طبيعي n حيث $21000(1+0,035)^n \geq 30000$ هو $n = 11$

3 - دراسة دالة اللوغاريتم النيبيري

37 أ) $f(x) = 2x^2 + \ln x$ معرفة على $]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2x^2 + \ln x = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 + \ln x = +\infty$

ب) $f(x) = -1 + 2\ln x - (\ln x)^2$ معرفة على $]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} -1 + 2\ln x - (\ln x)^2 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -1 + 2\ln x - (\ln x)^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x\left(\dfrac{-1}{\ln x} + 2 - \ln x\right) = -\infty$

4 - دراسة الدالة $\ln o\, u$

65 نعتبر الدالة f المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x-2}$

1. من أجل كل x من $]2;+\infty[$ ، $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{x-2+x+1}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{2x-1}{x^2-x-2} = f(x)$.

2. دالة أصلية للدالة f على $]2;+\infty[$ هي الدالة F المعرفة بـ: $x \mapsto \ln(x+1) + \ln(x-2)$

5 - دالة اللوغاريتم العشري

73 1) $\log x = 5$ تعني $\dfrac{\ln x}{\ln 10} = 5$ و منه $\ln x = 5\ln 10$ أي $x = e^{5\ln 10}$

تمارين للتعمق

82 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.

نضع من اجل كل عدد حقيقي من $]0;+\infty[$ $u(x) = \ln x$ و $v(x) = x^2$. على المجال $]0;+\infty[$ ، $v \neq 0$ و الدالتان u و v قابلتان للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا: $f'(x) = \dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

على المجال $]0;+\infty[$ ، إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $1-2\ln x$

$1-2\ln x > 0$ معناه $x < e^{\frac{1}{2}}$ ، $1-2\ln x < 0$ معناه $x > e^{\frac{1}{2}}$ ، $1-2\ln x = 0$ معناه $x = e^{\frac{1}{2}}$

إذن على المجال $]0;\sqrt{e}[$ ، f' موجبة تماما ومنه f متزايدة تماما على $]0;\sqrt{e}[$ و على المجال $]\sqrt{e};+\infty[$ f' سالبة تماما ومنه f متناقصة تماما على $]\sqrt{e};+\infty[$. إذن لدالة f تقبل قيمة حدية عظمى $f(\sqrt{e})$ عند $x = \sqrt{e}$.

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2e}$$

ب- من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ ، إشارة $f(x)$ هي من نفس إشارة $\ln x$

إذا كان $x > 1$ فإن $f(x) > 0$ ، إذا كان $0 < x < 1$ فإن $f(x) < 0$ و إذا كان $x = 1$ فإن $f(x) = 0$

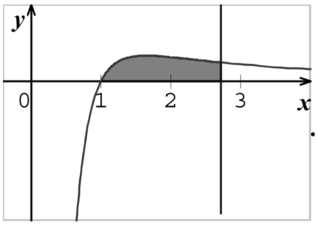
2.لتكن F دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$ حيث $F(e)=\frac{2e-2}{e}$ و $F(\sqrt{e})=2-\frac{3}{\sqrt{e}}$

أ– لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $F'(x)=f(x)$

نستنتج أنه على المجال $]0;1]$: $F'(x)\le 0$ ومنه F متناقصة تماما على $]0;1]$.

و على المجال $[1;+\infty[$: $F'(x)\ge 0$ ومنه F متزايدة تماما على $[1;+\infty[$. و هذه النتائج تتوافق مع التمثيل البياني المعطى.

ب– $F'(\sqrt{e})=f(\sqrt{e})=\frac{\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2}=\frac{1}{2e}$



جـ– $A=\int_1^e f(x)dx=F(e)-F(1)=\frac{2e-2}{e}-1=\frac{e-2}{e}(u.a)$

د–من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $F(x)=G(x)+k$ حيث k ثابت حقيقي .

لدينا: $F(e)=G(e)+k$ و منه $\frac{2e-2}{e}=\frac{-1-\ln e}{e}+k$ و منه $k=2$

إذن من أجل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $F(x)=\frac{-1-\ln x}{x}+2$.

مسائل

90 $C_T(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{9}{2}\ln(x+1)$

الجزء A : دالة مساعدة: نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;5]$ بـــ : $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{9x}{x+1}-9\ln(x+1)$

.1 $f'(x)=x+\frac{9x}{(x+1)^2}-\frac{9}{x+1}=\frac{x(x+1)^2+9-9(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{x^3+2x^2-8x}{(x+1)^2}=\frac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$

.2 إشارة $f'(x)$

x	0		2		5
$f'(x)$	0	−	0	+	

الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0;2]$ و متزايدة تماما على المجال $[2;5]$

x	0		2		5
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	0	↘	$6-9\ln 3$	↗	$20-9\ln 6$

3.على المجال $]0;2]$، f قابلة للاشتقاق و متناقصة و $f(2)<0$.إذن المعادلة $f(x)=0$ ليس لها حل على المجال $]0;2]$.

على المجال $[2;5]$ ، f قابلة للاشتقاق و متزايدة تماما و $f(2)\simeq -1,89$ و $f(5)\simeq 3,87$ و 0 ينتمي إلى $[f(2);f(5)]$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا α في المجال $]0;5]$.

4.باستعمال الحاسبة البيانية $f(3)\approx -1,2$ ، $f(4)\approx 0,7$ ، إذن $3<\alpha<4$

$f(3,6)\approx -0,2$ ، $f(3,7)\approx 0,002$ إذن $3<\alpha<4$ ، إذن $3,6<\alpha<3,7$

$f(3,699)\approx -0,0001$ ، $f(3,7)\approx 0,002$ إذن $3<\alpha<4$ ، إذن $3,699<\alpha<3,7$

5. إشارة $f(x)$

x	0		α		5
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	

الجزءB : دراسة الكلفة المتوسطة C_M : $C_M(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{9}{2}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

1. $$C'_M(x)=\frac{1}{4}+\frac{9}{2}\left[\frac{\frac{1}{x+1}\times x-\ln(x+1)}{x^2}\right]=\frac{1}{4}+\frac{9}{2}\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right]$$

$$\frac{1}{4}+\frac{9}{2}\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right]=\frac{\frac{x^2}{2}+\frac{9x}{x+1}-9\ln(x+1)}{2x^2}=\frac{f(x)}{2x^2}$$ ، إذن $C'_M(x)=\dfrac{f(x)}{2x^2}$

x	0		α		5
$C_M'(x)$		$-$	0	$+$	
$C_M(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

2. $C'_M(x)$ لها نفس إشارة $f(x)$

على $]0;\alpha[$ ، $f(x)$ موجبة و منه $C'_M(x)$ موجبة ومنه C_M متزايدة.

3.على $]0;5[$ ،مشتقة الكلفة المتوسطة تنعدم مغيرة إشارتها (سالبة ثم موجبة)إذن الكلفة المتوسطة تقبل قيمة حدية صغرى و تأخذها عند α.و بما أن $3,699<\alpha<3,7$.

الإنتاج يضمن كلفة متوسطة صغرى بين 3699 طن و 3700 طن لأن x مقدر بآلاف الأطنان.

الكلفة المتوسطة $C_M(x)$ مقدرة بملايين الدنانير ، $C_M(3,699)\approx 2,80717$ و $C_M(3,7)\approx 2,80717$

إذن الكلفة المتوسطة تقدر بـــ 2807,17دينار للطن.