الباب السابع

الدالة الأسية

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تعريف الدالة الأسية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم الفقرة " الدالة الأسية ".

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: تخمين خواص الدالة الأسية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الخواص الجبرية "

الحل: يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: التعرف على الدالة الأسية كحل لمعادلة تفاضلية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الخواص الجبرية.

الحل: بسيط.

الأعمال الموجهة

دوال الكلفة و الدالة الأسية

تصحيح: /

الهدف: توظيف دوال الكلفة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

دراسة دالة تتضمن الدالة الأسية

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة السية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

دراسة متتالية تتضمن الدالة الأسية

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة الأسية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - الدالة الأسية

9 1) $e^{x+3} \geq -2$. من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{x+3} > 0$. إذن مجموعة حلول المتراجحة هي $\mathbb{R}$

10 4) $\ln\left(\frac{1}{x-1}\right) > 1$. مجموعة التعريف هي $D =]1;+\infty[$

$\ln\left(\frac{1}{x-1}\right) > 1$ تعني $\frac{1}{x-1} > e$ و منه $\frac{1-ex+e}{x-1} > 0$ إذن مجموعة حلول المتراجحة هي $\left]1;1+\frac{1}{e}\right[$

2 - الخواص الجبرية

16 .1 $t^2 - 2t - 3 = 0$ تعني $(t=-1)$ أو $(t=3)$

.2 أ- بوضع $t = e^x$: المعادلة $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$ تصبح $t^2 - 2t - 3 = 0$

المعادلة $e^x = -1$ ليس لها حل لأن $e^x > 0$

$e^x = 3$ يعني $x = \ln 3$. إذن مجموعة حلول المعادلة $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$ هي $S = \{\ln 3\}$

ب) $e^x - 2 - 3e^{-x} = 0$ يعني $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$ (بضرب طرفي المعادلة في e^x).و هي نفس المعادلة السابقة.

3 - دراسة الدالة الأسية

44 f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 - e^{-x}$

.1أ- $f'(x) = \frac{1}{2} + e^{-x}$. من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$، $f'(x) > 0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

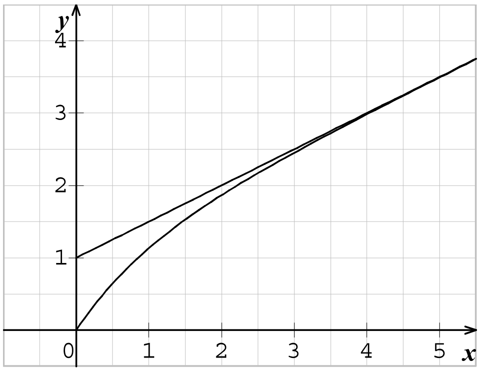
ب- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x + 1 - e^{-x} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

.2 أ- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} -e^{-x} = 0$

نستنتج أن المنحني (C) الممثل للدالة f في معلم يقبل مستقيما مقاربا D عند $+\infty$ معادلة $y = \frac{1}{2}x + 1$

ب- $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = -e^{-x}$ و $-e^{-x} < 0$. إذن المنحني (C) يقع أسفل المستقيم D.

.3 رسم المستقيم D و المحني (C): (انظر الشكل الموالي)



4 - دراسة الدالة $\exp\circ u$

53 .1 g و f لهما نفس اتجاه التغير .إذن g متزايدة على $]-\infty;2]$ و متناقصة على $[2;+\infty[$.

.2 القيمة الحدية المحلية هي $g\left(2\right)=e^{f(2)}=e^{\ln 4}=4$

.3 $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=0$ و بالتركيب $\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right)=1$ ،

$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=-\infty$ و بالتركيب $\lim\limits_{x\to-\infty} g\left(x\right)=0$ ،

و منه المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحني الممثل للدالة g عند $+\infty$ و محور الفواصل مقارب عند $-\infty$.

.4 جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	2		$+\infty$
$g(x)$	0 ↗	1 ↗	$\ln 4$	↘	1

تمارين للتعمق

65 .1 من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^x(2e^x+a)$

.2 أ- من جدول التغيرات لدينا: $f'(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=-3$

و بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=b$ فإن $b=-3$، زيادة على ذلك $f'(0)=2+a$ ، إذن $a=-2$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=e^x(e^x-2)-3$

ب- $f(0)=-4$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty$

جـ-

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↘	-4	↗	$+\infty$

.1 احسب $f'(x)$ بدلالة a .

.2 ا- عين a و b مستعينا بالمعلومات المتوفرة في جدول التغيرات.

ب- احسب $f(0)$ و عين نهاية f عند $+\infty$

جـ- أنقل ثم أكمل جدول التغيرات.

3. $f(x)=0$ تعني $\left(e^{x}\right)^{2}-2e^{x}-3=0$ و منه $\left(e^{x}+1\right)\left(e^{x}-3\right)=0$

$e^{x}+1=0$ ليس لها حل ، $e^{x}-3=0$ تعني $x=\ln 3$ و بالتالي مجموعة الحلول هي $S=\{\ln 3\}$

التفسير الهندسي: المنحني الممثل للدالة f يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $\ln 3$

4. أ) مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\geq -4$ هي $S=\mathbb{R}$

ب) مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\leq 0$ هي $S=\left]-\infty;\ln 3\right]$

مسائل

75 الجزء A :

1. لتكن h الدالة المعرفة على $[0;5]$ بـ: $h(x)=f(x)-g(x)$

أ- $h'(x)=f'(x)-g'(x)=-0,7e^{-0,7x+2,1}-0,5$

ب- إشارة $h'(x)$: من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;5]$ لدينا: $e^{-0,7x+2,1}>0$ و منه $-0,7e^{-0,7x+2,1}<0$

و منه $-0,7e^{-0,7x+2,1}-0,5<-0,5<0$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;5]$، $h'(x)$ سالبة تماما و منه الدالة h متناقصة تماما على $[0;5]$.

جـ- الدالة h قابلة للاشتقاق و رتيبة تماما على $[0;5]$ و $h(0)=f(0)-g(0)=e^{2,1}-0,7\approx 7,47$

و $h(5)=f(5)-g(5)=e^{-1,4}-3,2\approx -2,95$

أي $h(0)>0$ و $h(5)<0$ و 0 ينتمي إلى $\left[h(5);h(0)\right]$

إذن يوجد عدد حقيقي وحيد α ينتمي إلى $[0;5]$ بحيث $h(\alpha)=0$

الحاسبة البيانية تعطينا قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد α ، $\alpha\approx 2,172$

د-فاصلة إحداثيات نقطة التقاطع F لـ (C_f) و (C_g) تحقق $f(x)=g(x)$ أي $h(x)=0$

في السؤال السابق وجدنا أن حل المعادلة $h(x)=0$ هو α، إذن النقطة F فاصلتها α، ترتيب F هو $g(\alpha)$.

نعلم أن $2,171\,5<\alpha<2,172\,5$ و أن الدالة g متزايدة تماما على $[0;5]$ ،

إذن $g(2,171\,5)<g(\alpha)<g(2,172\,5)$.

القيمة المقربة للترتيب $g(\alpha)$ للنقطة F هي $1,79$.

2. أ- مساحة المستطيل $OCFE$ هي : $A=OE\times OC=\alpha\times f(\alpha)$

ومنه $A\approx 2,17\times 1,79$ أي $A\approx 3,88(u.a)$

ب-على المجال $[0;\alpha]$ المنحني البياني (C_f) يقع أعلى محور الفواصل ، إذن التكامل $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$ يساوي مساحة جزء المستوي المحدد بـ (C_f)، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\alpha$

جـ- دالة أصلية للدالة f على $[0;\alpha]$ هي الدالة γ المعرفة بـ $\gamma(x)=\frac{-1}{0,7}e^{-0,7x+2,1}+k$ حيث k ثابت حقيقي

إذن $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=\left[\gamma(x)\right]_0^{\alpha}=\gamma(\alpha)-\gamma(0)=\frac{-1}{0,7}\left[f(\alpha)-f(0)\right]=\frac{-1}{0,7}\left[f(\alpha)-e^{2,1}\right]$

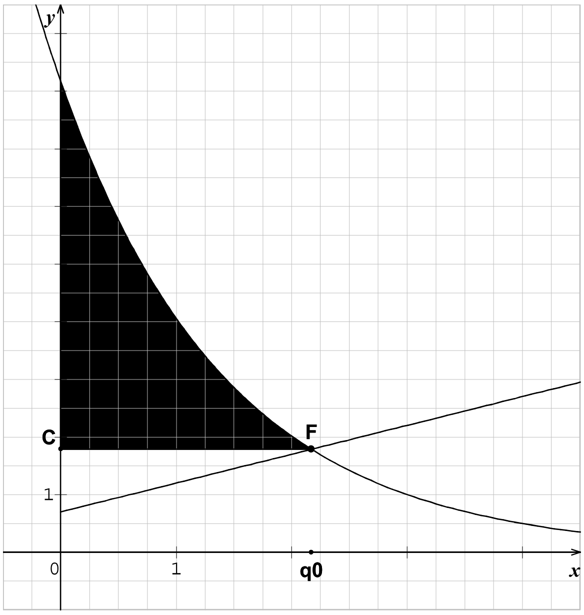
أي $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx \approx \frac{-1}{0,7}[1,79-8,17]$ أي $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx \approx 9,11$

الجزءB :

<u>**تصويب:**</u> $f(q_0)=g(q_0)$

$f(q_0)=g(q_0)$ ، إذن حسب الجزء A q_0 هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=g(x)$

أي هو الحل الوحيد للمعادلة $h(x)=0$ ، $q_0=\alpha$



العدد $p_0=f\left(q_0\right)=f\left(\alpha\right)=g\left(\alpha\right)$ ،

$q_0=\alpha$ و $p_0=f\left(\alpha\right)=g\left(\alpha\right)$

القيم المقربة لــ q_0 و p_0 هي $q_0\approx 2,172$ و $p_0\approx 1,79$

2.أ- العددان q_0 و p_0 هما على الترتيب فاصلة و ترتيب النقطة F.النقطة E احداثياها $\left(q_0;0\right)$ و النقطة C احداثياها $.\left(0;p_0\right)$

ليكن Δ الحيز الذي مساحته $\int_0^{q_0} f(x)\,dx-p_0\times q_0$

نلاحظ أن $\int_0^{q_0} f(x)\,dx=\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$ و نلاحظ أيضا أن

$p_0\times q_0=\alpha\times f\left(\alpha\right)$ و هي مساحة المستطيل $OCFE$

إذن الحيز Δ هو الجزء من المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ، القطعة المستقيمة $\left[CF\right]$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\alpha=q_0$

ب- $\int_0^{q_0} f(x)\,dx-p_0\times q_0=\int_0^{\alpha} f(x)\,dx-\alpha f\left(\alpha\right)=\frac{-1}{0,7}\left[f\left(\alpha\right)-e^{2,1}\right]-\alpha f\left(\alpha\right)$

و نجد حسب ما سبق $\int_0^{q_0} f(x)\,dx-p_0\times q_0\approx 9,11-3,88$ أي $\int_0^{q_0} f(x)\,dx-p_0\times q_0\approx 5,23$

فائض الإنتاج يرتفع إلى 5,23 آلاف دينار.