الباب الثامن

التزايد المقارن

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تعريف الدالة اللوغاريتم ذات أساس كيفي.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " دالة اللوغاريتم لأساس a ".

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: التمهيد لقوى عدد حقيقي موجب تماما.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " قوى عدد حقيقي موجب تماما "

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: التمهيد للدالة الجذر النوني.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الدالة الجذر النوني" .

الحل: بسيط.

النشاط الرابع

تصحيح: /

الهدف: مقارنة كل من $\ln x$ و e^x مع x^n .

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " التزايد المقارن " و يتم ضمن أفواج.

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

نموذج ديموغرافي

تصحيح: /

الهدف: توظيف قوى عدد حقيقي موجب تماما.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

فاتورة الهاتف

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدلالة الأسية و التزايد المقارن.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

دراسة دالة لوغاريتمية

تصحيح: /

الهدف: توظيف دالة اللوغاريتم النيبيري و التزايد المقارن.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

مسائل استمثال

تصحيح: /

الهدف: توظيف دالة اللوغاريتم النيبيري و التزايد المقارن.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

مقارنة الأعداد n^{n+1} **و** $(n+1)^n$

تصحيح: /

الهدف: توظيف دالة اللوغاريتم النيبيري و التزايد المقارن.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

الدوال $x \mapsto x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدوال الأسية و التزايد المقارن.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - دالة اللوغاريتم للأساس a

5 1 . مجموعة التعريف هي $D=]0;+\infty[$

$\log_3(2x+5)+\log_3\left(\frac{1}{x}\right)=3$ تعني $\frac{\ln(2x+5)}{\ln 3}+\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln 3}=3$ و منه $\ln(2x+5)-\ln(x)=3\ln 3$

و منه $\ln\left(\frac{2x+5}{x}\right)=\ln 27$ و منه $\left(x=\frac{1}{5}\right)$. إذن مجموعة الحلول هي $S=\left\{\frac{1}{5}\right\}$

2. مجموعة التعريف : $D=]-\infty;0[\,]1;+\infty[$

$\log_3\left(\frac{x}{x-1}\right)>1$ تعني $\frac{\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}{\ln 3}>1$ و منه $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)>\ln 3$ أي $\frac{x}{x-1}-3>0$

أي $x\in]-\infty;1[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$. إذن مجموعة الحلول هي $S=]-\infty;0[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

2 - قوى عدد حقيقي موجب تماما

27 1) مجموعة التعريف هي $\mathbb{R}$

$2^{2x+1}-10.2^x+12=0$ تعني $2\left(2^x\right)^2-10.2^x+12=0$ ومنه $\left(2^x\right)^2-5.2^x+6=0$

بوضع $X=2^x$ يكون لدينا $X^2-5X+6=0$

المعادلة $X^2-5X+6=0$ تقبل حلين هما $\left(X_1=2\right)$ و $\left(X_2=3\right)$

$(X=2)$ يعني $2^x=2$ و منه $x=1$

$(X=3)$ يعني $2^x=3$ و منه $x=\frac{\ln 3}{\ln 2}$. إذن مجموعة الحلول هي $S=\left\{1,\frac{\ln 3}{\ln 2}\right\}$

2) $2^{2x+1}-10.2^x+12>0$ تعني $X^2-5X+6>0$ مع $X=2^x$

$X^2-5X+6>0$ تعني $(X-2)(X-3)>0$

$(X-2)(X-3)>0$ تعني $\left(2^x-2\right)\left(2^x-3\right)>0$

x	$-\infty$ 1 $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ $+\infty$
2^x-2	$-$ 0 $+$ $+$
2^x-3	$-$ $-$ 0 $+$
$\left(2^x-2\right)\left(2^x-3\right)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

إذن مجموعة الحلول هي $S=]-\infty;1[\cup\left]\frac{\ln 3}{\ln 2};+\infty\right[$

3 - دراسة الدوال $x\mapsto a^x$ و $x\mapsto\sqrt[n]{x}$

53

1.معامل التناسب الإجمالي من 1980 إلى 1990 هو $k=\frac{972}{800}$

$$x=\left(\frac{972}{800}\right)^{\frac{1}{10}}-1\approx 0,0196$$

2. $x=\left(\frac{1230}{1050}\right)^{\frac{1}{3}}-1\approx 0,0541$

إذا بقي هذا التزايد على ما هو عليه ، عدد الطلاب عام 2007 هو $1230000\times(1,0541)^7\approx 1778598$

4 ـ التزايد المقارن

67 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x+1}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x+1}{e^x}=0$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1-x}=0$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)e^{1-x}=0$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x+1}=0$ و منه $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^2-x+1)e^{2x+1}=0$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{3x-1}=0$ و منه $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2-3)e^{3x-1}=0$

تمارين للتعمق

78 تصويب : لتكن الدالة f دالة المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ بـــ : $f(x)=\frac{5^x}{5^{2x}-1}$

المجموعة $\mathbb{R}^*$ متناظرة بالنسبة للصفر أي $x\in\mathbb{R}^*$ إذا وفقط إذا كان $-x\in\mathbb{R}^*$

و من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $f(-x)=\frac{5^{-x}}{5^{-2x}-1}=\frac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1}{5^{2x}}-1}=\frac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1-5^{2x}}{5^{2x}}}=-\frac{5^x}{5^{2x}-1}=-f(x)$

إذن الدالة f فردية ، و بالتالي مبدأ المعلم O هو مركز تناظر للمنحني (C)

2. أ- f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$،

$$f'(x)=-\frac{5^x\ln 5\times\left(5^{2x}-1\right)-2\times 5^{2x}\ln 5\times 5^x}{\left(5^{2x}-1\right)^2}=-\frac{5^x\ln 5\times\left(5^{2x}+1\right)}{\left(5^{2x}-1\right)^2}$$

ب- بما أن $5^x>0$ فمن الواضح أن $f'(x)<0$ إذن الدالة **f** متناقصة تماما على $]-\infty;0[$ و على $]0;+\infty[$

3. أ- $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}2x=0^+$ و $\lim\limits_{X\xrightarrow{>}0}5^X=1^+$ ومنه حسب نهاية مركب دالتين $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}5^{2x}=1^+$

و منه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(5^{2x}-1\right)=0^+$ و بالتالي $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{5^x}{5^{2x}-1}=+\infty$

التفسير الهندسي: المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=0$

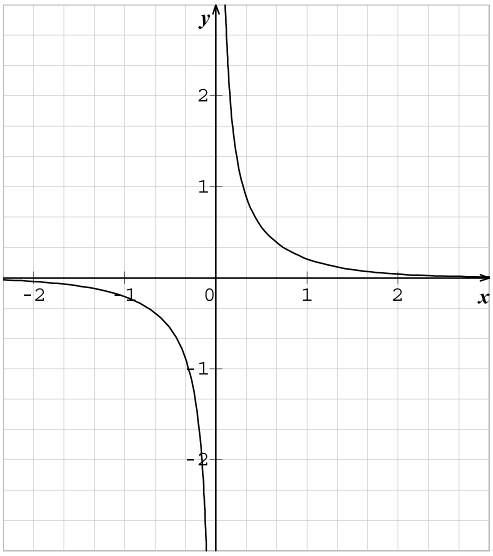
ب- من أجل كل $x>0$ ، $f(x)=\frac{5^x}{5^{2x}-1}=\frac{5^x}{5^{2x}\left(1-\frac{1}{5^{2x}}\right)}=\frac{1}{5^x\left(1-\frac{1}{5^{2x}}\right)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}5^X=+\infty$ ومنه حسب نهاية مركب دالتين $\lim\limits_{x\to+\infty}5^{2x}=+\infty$

و نستنتج أن $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{5^{2x}}\right)=1$ و $\lim_{x\to+\infty}5^x\left(1-\frac{1}{5^{2x}}\right)=+\infty$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{5^x\left(1-\frac{1}{5^{2x}}\right)}=0$

إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ و هذا يبين أن المستقيم الذي معادلته $y=0$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$

الدالة f فردية ، لدينا $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$



4. تصويب حل المعادلتين $f(x)=\frac{2}{3}$ و $f(x)=-\frac{2}{3}$

بوضع $X=5^x$ ، $f(x)=\frac{2}{3}$ تعني $\frac{X}{X^2-1}=\frac{2}{3}$

و منه $2X^2-3X-2=0$

حلي المعادلة $2X^2-3X-2=0$ هما $X_1=-\frac{1}{2}$ و $X_2=2$.

الحل السالب مرفوض لأن $X>0$

$f(x)=\frac{2}{3}$ تعني $5^x=2$ و منه $x=\frac{\ln 2}{\ln 5}$

بما أن الدالة f فردية فإن $f(x)=-\frac{2}{3}$ تعني $x=-\frac{\ln 2}{\ln 5}$

5. رسم المنحني (C) (انظر الشكل المقابل)

مسائل

83 لتكن C_m الدالة المعرفة على $[0;6]$ بـــ : $C_m(q)=0,8+4(1-2q)e^{-2q}$

الدالة $q\mapsto -2q$ قابلة للاشتقاق على $[0;6]$ و الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و منه $q\mapsto e^{-2q}$ قابلة للاشتقاق على $[0;6]$. $q\mapsto 4(1-2q)$ قابلة للاشتقاق على $[0;6]$.إذن C_m قابلة للاشتقاق على $[0;6]$

من أجل كل q من $[0;6]$ $C_m'(q)=-8e^{-2q}(1+1-2q)$ أي $C_m'(q)=16e^{-2q}(q-1)$

من أجل كل q من $[0;6]$ $e^{-2q}>0$ و منه إشارة $C_m'(q)$ هي من نفس إشارة $q-1$ و نستنتج أن:

$C_m'(q)<0$ إذا وفقط إذا كان $0\le q<1$

$C_m'(q)>0$ إذا وفقط إذا كان $1<q\le 6$

$C_m'(q)=0$ إذا وفقط إذا كان $q=1$

C_m متناقصة تماما على $[0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;6]$.

q	0		1		6
$C_m'(q)$		$-$	0	$+$	
C_m	$C_m(0)$	↘	$C_m(1)$	↗	$C_m(6)$

لدينا $C_m(0)=4,8$ ، $C_m(1)\approx 0,26$ و $C_m(6)\approx 0,8$

C_m تقبل عند 1 قيمة حدية صغرى موجبة تماما إذن C_m موجبة تماما على المجال $[0;6]$

2. g قابلة للاشتقاق على $[0;6]$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $[0;6]$.

من أجل كل q من $[0;6]$: $g'(q)=4e^{-2q}+4q(-2)e^{-2q}=4(1-2q)e^{-2q}$

ب- C_T هي دالة أصلية للدالة C_m على $[0;6]$ إذن $C'_T = C_m$

بما أن $C_m(q) = 0,8 + g'(q)$ فإن من أجل كل q من $[0;6]$ $C_T(q) = 0,8q + g(q) + k$ حيث k ثابت حقيقي

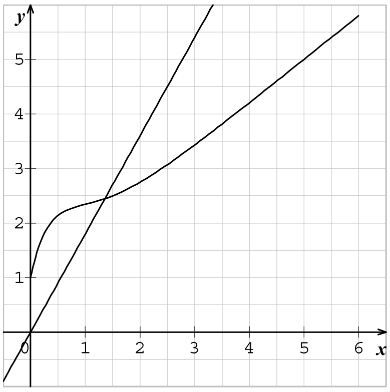
بما أن $C_T(0) = 1$ فإن $C_T(0) = g(0) + k = k$ و منه $k = 1$

إذن : $C_T(q) = 0,8q + 4qe^{2q} + 1$

3.أ- الدالة C_T هي دالة أصلية للدالة C_m على $[0;6]$ ، و سابقا رأينا أن C_m موجبة تماما على المجال $[0;6]$ ، إذن

الدالة C_T متزايدة تماما على $[0;6]$.

q	0 $\qquad\qquad$ 6
$C_T'(q)$	$+$
C_T	$1 \nearrow C_T(6)$



ب- التمثيل البياني للدالة " الكلفة الإجمالية " (انظر الشكل)

II . تصويب : ثمن البيع لهذا السائل هو $1,80$ للتر الواحد

المصنع ينتج يوميا q آلاف لتر و الكمية المنتجة تباع كلها، إذن الدخل اليومي هو $1,80q$

1. أ- تمثيل دالة الدخل اليومي (انظر الشكل)

ب- الفائدة $B(q)$ تساوي قيمة الداخل منزوع منها الكلفة الإجمالية أي $B(q) = 1,80q - C_T(q)$

و منه $B(q) = 1,80q - 0,8q - 4qe^{-2q} - 1 = q - 1 - 4qe^{-2q}$

2.لتكن الدالة h المعرفة على $[0;6]$ بــ : $h(q) = 1,8 - C_m(q)$

أ- من أجل كل q من $[0;6]$، $h'(q) = -C'_m(q)$ و نستنتج جدول تغيرات h كما يلي:

x	0 $\qquad$ 1 $\qquad$ 6
$h'(q)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
$h(q)$	$-3 \nearrow h(1) \searrow 1$

ب-h قابلة للاشتقاق و متزايدة على $[0;1]$ و $h(0) < 0$ و $h(1) \approx 1,54$

إذن المعادلة $h(q) = 0$ تقبل حلا واحدا α على $[0;1]$

جــ- h متزايدة تماما على $[0;1]$ إذن إذا كان $0 \le q < \alpha$ فإن $h(q) < h(\alpha)$ أي $h(q) < 0$

و إذا كان $\alpha < q \le 1$ فإن $0 < h(q)$

إذا كان q ينتمي إلى $[1;6]$ فإن $h(q) > 0$

خلاصة: $h(q) < 0$ إذا وفقط إذا كان $q \in [0;\alpha[$

$h(q) > 0$ إذا وفقط إذا كان $q \in]\alpha;6]$ ، $h(q) = 0$ إذا وفقط إذا كان $q = \alpha$

3. $B'(q) = h(q)$ ومنه $B'(q)$ و $h(q)$ لهما نفس الإشارة

إذن الدالة B متناقصة تماما على $[0;\alpha]$ و متزايدة تماما على $[\alpha;6]$

ب- $\alpha \approx 0,28$ ، $B(\alpha) \approx -1,36$.