الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

اللجنة الوطنية للمناهج	المجموعة المتخصصة لمادة الرياضيات

الوثائق المرافقة لبرنامج الرياضيات

- رياضيات
- تقني رياضيات
- العلوم التجريبية

السنة الثالثة من التعليم الثانوي العام والتكنولوجي

المحتويات

1. تقديم الوثيقة

أعدت هذه الوثيقة خصيصا للأستاذ، فهي ترمي إلى مساعدته على مواصلة العمل الذي شرع فيه في السنتين الأولى والثانية بما تقدمه من نماذج لأنشطة مختارة للإنجاز في القسم، يستعين بها في إعداد وضعيات تعلّمية. وقد راعينا في اختيار هذه الأنشطة ثلاثة أبعاد متكاملة تعطي للمستوى النهائي طبيعته وهي:

1. السنة الثالثة هي سنة تتويج لمرحلة التعليم الثانوي بحيث يتم فيها استكمال دراسة بعض المفاهيم الرياضياتية بما يسمح للتلميذ باكتساب مستوى معرفي يؤهله لفهم المحيط الذي يعيش فيه ولعب دور إيجابي نحو هذا المحيط.
2. السنة الثالثة هي سنة تقويم لكفاءات التلاميذ حيث يخضعون في نهايتها إلى تقويم إشهادي يتمثل في امتحان البكالوريا.
3. السنة الثالثة هي سنة البداية لمرحلة جديدة بالنسبة للتلميذ سواء بدخوله عالم الجامعة لخوض الدراسات العليا أو بدخوله عالم الحياة المهنية، وفي كلا الحالتين نجده يواجه تحد من نوع جديد لم يعهده من قبل .

كما تتضمن هذه الوثيقة المستجدات التي جاءت بها برامج مختلف الشعب، سواء كان ذلك من ناحية المضامين أو الطرائق والممارسات البيداغوجية وكذا الوسائل المستعملة. وفي هذا الإطار تتطرق الوثيقة إلى كل ميدان من برنامج كل شعبة، فتقترح أفكارا لمقاربة بعض المفاهيم ونماذج لأنشطة تعلميّة خصوصا في المواضيع التي أدرجت حديثا، كحساب الاحتمالات باستعمال شجرة احتمالات والتلاؤم مع قانون احتمال في كل من الشعب العلمية و الرياضياتية والعلوم الاقتصادية، إضافة إلى الاحتمالات المستمرة في الشعب العلمية والرياضياتية و موضوع الموافقات والتشفير في الشعب الأدبية. أما فيما يتعلق ببقية المواضيع في الشعب العلمية و الرياضياتية، كالأعداد المركبة والتحويلات النقطية والهندسة الفضائية والاشتقاقية والمتتاليات العددية فإنه تم التركيز فيها على كيفية تناولها وكيفية توظيفها كما هو الحال بالنسبة للأعداد المركبة في الهندسة حيث يكتشف التلميذ أنّها أداة فعالة في معالجة التحويلات النقطية. كما تم اقتراح نماذج لأنشطة إدماجية تهدف إلى تقويم مكتسبات التلاميذ وفق المقاربة بالكفاءات في كل شعبة. و لم نغفل عن إعطاء دور أساسي في كثير من الحالات لاستعمال تكنولوجيات الإعلام والاتصال في كل هذه الميادين.

نأمل أن تؤدي هذه الوثيقة الدور الذي أعدّت من أجله والمتمثل في تقديم إيضاحات مستفيضة فيما يخص تناول مختلف المواضيع المقررة في برنامج كل شعبة وتجيب على تساؤلات ما فتئ يطرحها الأساتذة في الميدان.

2. توجيهات عامة

إنّ إعطاء معنى للمعارف المدروسة وبنائها يتم من خلال مختلف الوضعيات والمشكلات التي يحلّها التلميذ بنفسه، كما أن تقديم هذه المعارف في قوالب إجرائية يسهل امتلاكها. و في هذا الإطار يوفر الحاسوب و الحاسبة للتلميذ فرصا عديدة للتجريب سواء كان ذلك في الميدان العددي أو في ميدان الإحصاء والاحتمالات من جهة، ومن جهة أخرى كون وسائل التقنيات الجديدة

حاضرة أكثر فأكثر في محيط التلميذ وباعتبار أن كل التلاميذ مطالبون باستعمال هذه الوسائل في حياتهم المهنية مستقبلا، فإنّ تعلّم الرياضيات يمكن، في هذا الإطار، أن يستغّل ويستفيد من مختلف لتجارب حول المواضيع المدروسة وهو ما يجعل هذه الأدوات تساهم في التكوين العلمي للتلاميذ .
إن الأنشطة المقترحة في هذه الوثيقة عبارة عن أمثلة ترمي إلى توضيح روح البرنامج وكيفية تفسيره قصد الوصول إلى التعلمات المرغوبة. فهي إذن غير حاصرة لما يتطلبه البرنامج، والأستاذ يعمل على الاستفادة منها، و تكييف ما جاء فيها، في حالة الضرورة، وفق قدرات التلاميذ وظروف عملهم. وبصفة عامة نقترح في الفقرة الموالية كيفية لتسيير الأنشطة المقترحة في هذه الوثيقة، وهي صالحة لمعظم الأنشطة خاصة الاستكشافية منها.

3. كيفية لتسيير أنشطة تعلّميّة مع التلاميذ:

عند معالجة الأنشطة المشتركة بين مختلف الشعب يعمل الأستاذ على الأخذ بعين الاعتبار طبيعة الشعبة المعنية بحيث يكيف الطرح والنقاش حسب تلاميذ كل شعبة، فيوسع النقاش مثلا مع تلاميذ شعبة العلوم التجريبية فيما يتعلق بأنشطة تميل إلى وضعيات إدماجية مرتبطة بمادة العلوم الطبيعية، بينما يوسعه مع تلاميذ شعبة الرياضيات أو التقني رياضيات فيما يتصل بمادة الفيزياء، في حين يتم هذا التوسع في شعبة التسيير واقتصاد فيما يتعلق بالأنشطة المرتبطة بالمحاسبة والاقتصاد.
لتسيير الأنشطة التعلّميّة الاستكشافية أي تلك التي تساعد على اكتشاف المفهوم وبنائه، يمكن للأستاذ إتباع المراحل التالية:

§ فترة تقديم النشاط والتعليمات.

يراعي الأستاذ في هذه الفترة جملة من العوامل منها:
- أن يتأكد من فهم الجميع للتعليمة.
- أن يثير عند التلاميذ الفضول والرغبة في البحث.
- أن يمنح لهم وقتا كافيا للبحث في حل المشكلة.
- أن يرتكز على وسائل مناسبة ومتوفرة يضعها تحت تصرف التلاميذ.
- تبعا لطبيعة النشاط والصعوبة ووظيفته في التعلّم، يمكن جعل التلاميذ يعملون فرديا أو في أفواج صغيرة.

§ فترة البحث

تحتل هذه الفترة مكانة هامة في نشاط التعلّم، وينبغي أن يخصص لها وقتا كافيا حتى يتمكن كل تلميذ (أو كل فوج) من القيام بالمهمة المقترحة عليه وذلك بالقيام بإجراء ذاتي. والهدف ليس أن يصل التلاميذ من البداية إلى الحل المثالي للمشكل المطروح، ولكن أن يتمكن كل واحد منهم إنهاء عمله. يمر الأستاذ بين الصفوف، ويراقب الإجراءات المختلفة المستعملة ويسجلها، كما يسجل الأخطاء المرتكبة، وهو ما يسمح له باستباق تنظيم مرحلة العرض والمناقشة.

§ فترة العرض والمناقشة

في فترة العرض و المناقشة يقوم الأستاذ بالإجراءات التالية:

- إحصاء الإجراءات المختلفة المستعملة، وعرض أهمها على السبورة.
- تشجيع التلاميذ على التصريح بإجراءاتهم وشرح الإجراءات والطرائق التي سمحت لهم بالوصول إلى نتائجهم (تصديق أعمالهم).
- حث التلاميذ على التبادل حول الإجراءات المختلفة ومقارنتها، بإظهار نقائص بعض الإجراءات، وكذا الأخطاء المرتكبة فيها، والصعوبات المعترضة.
- تخصيص وقت كاف لتحليل الأخطاء وتسييرها فللتلاميذ الحق في الخطأ، قصد تمكينهم من فهم وإدراك أخطائهم ومن ثم تصويبها.

§ فترة الحوصلة

الهدف من هذه الفترة هو الوصول بالتلاميذ إلى حوصلة الأعمال المنجزة وتحديد المعرفة موضوع التعلّم والسعي إلى تحقيق تجانس المعارف داخل القسم، تمهيدا للتأسيس للمعرفة في المرحلة الموالية.

إن التعلّم الذاتي مهم للتلميذ، إلا أنه غير كاف، ولا بد من ضبطه ودعمه بتمارين تدريبية ثم بتمارين لاستثمار معارفه.

4. مكانة التكنولوجيات الجديدة للإعلام والاتصال

إنّ إعطاء معنى للمعارف المدروسة وبنائها من خلال مختلف الوضعيات والمشكلات التي يحلّها التلميذ، يسمح له بجعل هذه المعارف إجرائية مما يسهل امتلاكها. وباعتبار أنّ الحاسبة والحاسوب يمنحان للتلميذ فرصا عديدة للتجريب سواء كان ذلك في الميدان العددي أو في ميدان الإحصاء والاحتمالات من جهة، ومن جهة أخرى كون الإعلام الآلي حاضرا أكثر فأكثر في محيط التلميذ وباعتبار أن كل التلاميذ مطالبون باستعمال هذه الوسائل في حياتهم المهنية مستقبلا، فإنّ تعلّم الرياضيات يمكن، في هذا الإطار، أن يستغّل ويستفيد من مختلف التجارب حول الأشياء المدروسة وبهذا تساهم هذه الأدوات في التكوين العلمي للتلاميذ.

- **الحاسبة البيانية**

كما كان الحال في السنتين الأولى والثانية، تمنح الحاسبة البيانية للتلميذ المساعدة الضرورية لتحقيق تعلّمات عديدة في الميادين المختلفة للمادة. في هذا المستوى، نستمر في استعمالها للحصول على التمثيلات البيانية لدوال والعمل عليها، أو في إعطاء جداول قيم متتاليات عددية وتمثيلها.

تعتبر الحاسبة البيانية وسيلة ضرورية في ميدان الإحصاء والاحتمالات، ويتجلى ذلك عند حساب المؤشرات المختلفة لسلسلة إحصائية أو إعداد تمثيلات بيانية لها أو عند القيام بمحاكاة تجارب عشوائية.

- **المجدولات وراسمات المنحنيات**

تساعد المجدولات وراسمات المنحنيات في المستوى النهائي على القيام بنشاطات رياضياتية فعلية. فعند "توكيل" إجراء الحسابات للحاسوب، يمكن للتلميذ مضاعفة محاولات البحث عن الحـلّ أو تحسين تقريب أو مراقبة النتائج المحصّل عليها.

عندما ينظم التلميذ ويهيكل معطيات المشكلة بنفسه ويجد القوانين الرياضياتية التي يحوّلها إلى طلبيات يحجزها، فإنه بذلك يتعمق رياضياتيا في ممارسة الحساب الحرفي والأساليب المنهجية الجديدة في البحث عن حل للمشكلات التي تطرح عليه. إنّ هذا النّوع من البرمجيات يسمح بفهم نمذجة المشكلات فهما إجرائيا و تسمح بتطبيق سريع للخوارزميات، كما يمثّل مرتكزا للتعميق المكتسبات إن على مستوى المفاهيم أو الخوارزميات.

وإذا كانت المجدولات في السنتين الأولى والثانية وبالضبط في ميدان الإحصاء والاحتمالات تسمح بحساب مختلف مؤشرات سلسلة إحصائية كالوسط الحسابي، الوسيط، التباين، الانحراف المعياري، الربيعيات والعشيريات بسرعة. و تسمح بتمثيل المعطيات المختارة على ورقة الحساب بكيفيات مختلفة وتتيح للتلميذ فرصة مشاهدة تغيّر التمثيل البياني تبعا لتغيّر قيم السلسلة الموافقة و في وقت واحد، كما هو الحال في مشاهدة تذبذب العيينات. فإنّها في هذه السنة تسمح بالربط بين مفاهيم في الإحصاء وأخرى في الاحتمالات من خلال اكتشاف مفهوم التلاؤم مع قانون احتمال بمقاربة تجريبية تستند إلى مفاهيم درست سابقا في الإحصاء وترتكز عل المحاكاة.

1.ميدان الحســـاب

يهتم علم الحساب، باعتباره فرع من فروع الرياضيات، بدراسة الأعداد حيث يعد من أقدم ميادينها وأول من أعطى أسس هذا العلم هو إقليدس، غيرأنه لم يأخذ هذا العلم حظه إلا عندما توصل العرب إلى أنظمة تعداد بينما كان إقليدس في عهده يمثل الأرقام بقطع مستقيمة، الشيء الذي لم يكن ملائما للوصول إلى بناء "نظريه للأعداد".

وقد أعتبر علم الحساب منذ بدايته كمحفز جيد للتكون العقلي لدى الإنسان، إضافة إلى ذلك فقد استفاد المهتمين به من تدريبات فذة بالنسبة للعمليات الذهنية، وهي اليوم تجد مجالا أوسع في تطبيقه في الواقع، نذكر على سبيل المثال التشفير

وتطور أدوات وطرق الحساب نحو حل مسائل أكثر تجريدا سمحت بالمقابل باستعمالها في حل مشاكل الواقع المعيش.

وقد كان الحساب عاملا مهما في تطوير الميادين الرياضياتية الأخرى. وفي برنامج السنة الثالثة ثانوي تنفرد شعب الاختصاص في الرياضيات بدراسة هذا الفرع دون غيرها، حيث أن الأهداف على مستوى المعارف تبقى متواضعة نسبيا لكن الاستدلالات المستخدمة لحل المسائل تكون ذات مستوى فكري لا بأس به. كما أن التدريبات المكثفة للتلاميذ، والتعلّمات الصارمة تكسبهم ما أكسبت المهتمين به قديما من مهارة في الفكر وسرعة في البديهة، والتي يمكن أن نلمسها من خلال الحساب الذهني أو الحساب المتمعن فيه، ...

تتطرق هذه الفقرة إلى أنشطة تهدف إلى استعمال بعض مضامين هذا الميدان مثل القواسم و المضاعفات والترديدات وحل معادلات من الشكل $ax+by=c$ في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ قصد توظيفها في حل مسائل ذات علاقة بالواقع .

نشــاط 1

يهدف هذا النشاط إلى توظيف خواص القواسم والمضاعفات.

1- لتكن B علبة على شكل متوازي مستطيلات ارتفاعها L وقاعدتها مربعة طول ضلعها l
حيث L و l عددان طبيعيان غير معدومين و $l < L$.

نريد ملء العلبة B بمكعبات كلها متطابقة وذات الحرف a ، حيث a عدد طبيعي غير معدوم (يجب ملء العلبة B بهذه المكعبات دون ترك أي فراغ)

أ) في هذا السؤال نفرض $l=630$ و $L=675$

ما هي أكبر قيمة ممكنة للعدد a؟ ما هي القيم الممكنة للعدد a؟

ب) في هذا السؤال نفرض أنّ حجم العلبة B هو $V=123480$. نعلم أنه عند ملأ العلبة B،تكون القيمة الكبرى للعدد a هي 14.

بين أنّه يوجد نوعان من العلبة B،يطلب إعطاء L و l في كل حالة.

2- نريد ملء صندوق مكعب C حرفه c (c عدد طبيعي غير معدوم) بالعلب B المذكورة في السؤال 1- (العلب B، مرتبة أفقيا) يملأ الصندوق C دون ترك أي فراغ.

أ) في هذا السؤال نضع $l=630$ و $L=675$.

ما هو أصغر حرف c للصندوق C؟

ما هي مجموعة القيم الممكنة للحرف c ؟

ب) نفرض أن حجم العلبة B هو $V=23040$ ونعلم أن أصغر حرف c للصندوق C هو 120

ما هما البعدان l و L للعلبة B؟

حـــل

1-أ) حتى يتم رصف المكعبات في العلبة يجب أن يكون بعداها l و L قابلين للقسمة على الحرف a وبالتالي تمثل أكبر قيمة للعدد a القاسم المشترك للعددين l و L ومنه:

$a = PGCD(l;L)$ أي $a = PGCD(675;630)$ ومنه $a=45$.

لقيم الممكنة للعدد a هي قواسم القاسم المشترك الأكبر 45 وهي 1، 3، 5، 9، 15، 45.

- ب) بما أن $a=14$ فإن حجم المكعب الصغير هو $a^3=14^3=2744$

إذن عدد المكعبات الصغيرة في العلبة هو $\frac{V}{a^3}=\frac{123480}{2744}=45$

لكن حجم العلبة B هو $L\times l^2$ أي هذا الحجم يقبل القسمة على l^2.(أي قاعدة العلبة مربعة)

ولدينا $45=3^2\times5$ و $45=1^2\times45$ وبالمطابقة نجد:

j l يمثل 3 أحرف أي $l=3.14=42$ و L يمثل 5 أحرف أي $L=5\times14=70$

k l يمثل حرفا واحدا أي $l=1.14=14$ و L يمثل 45 حرفا أي $L=45\times14=630$

2- أ) عند رصف العلب في الصندوق المكعب الشكل فإن حرفه c يكون مضاعفا لبعدي العلبة l و L، إذن البحث عن أصغر قيمة للعدد c هي البحث عن المضاعف المشترك الأصغر للعددين l و L، ومنه: $c=PPCM(L;l)$ أي $c=PPCM(675;630)$ فنجد $c=9450$

القيم الممكنة للحرف c هي القيم من الشكل 9450k باعتبارها مضاعفات مشتركة للعددين l و L وهي مضاعفات المضاعف المشترك الأصغر لها.

ب) عدد العلب في هذه الحالة المتواجدة في الصندوق هو $\frac{120^3}{v}=\frac{1728000}{23040}=75$

وبنفس الطريقة السابقة فإن $75=5^2\times3$ وعدد العلب على القاعدة هو $\left(\frac{120}{l}\right)^2$ وعلى الارتفاع هو $\left(\frac{120}{L}\right)$ أي عدد العلب هو $75=\left(\frac{120}{l}\right)^2\times\left(\frac{120}{L}\right)$ وبالمطابقة نجد $\frac{120}{l}=5$ و $\frac{120}{L}=3$ بالتالي

$l=\frac{120}{5}=24$ و $L=\frac{120}{3}=40$.

لا توجد حلول أخرى لأنه لا توجد كتابة أخرى غير $75=1^2\times75$، لكن 120 لا يقبل القسمة على 75.

نشاط 2

الهدف من هذا النشاط هو توظيف الترديدات و المعادلات من الشكل $ax+b\ y= c$

لاحظ فلكي جسمين A و B في الفضاء الخارجي يظهران بشكل دوري؛ حيث يظهر الجسم A كل 105أيام بينما يظهر الجسم B كل 81 يوما .

في اليوم J_0 ظهر للفلكي الجسم A ثم ظهر له الجسم B بعد ستة أيام.

يريد الفلكي حساب (توقع) اليوم J_1 الذي يظهر فيه الجسمان معا.

1. ليكن u و v عدد الدورات التامة في الفترة $[J_0 ; J_1]$ للجسمين A و B على الترتيب.بين أن الثنائية (u ،v) حل للمعادلة(E_1) حيث : $(E_1)\quad 35x-27y = 2$

2.

أ) عين ثنائية (X_0,Y_0) من الأعداد الصحيحة النسبية بحيث تكون حلا للمعادلة: $35X-27Y=1$

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E_1).

ت) عين كل الحلول (u،v) للمعادلة (E_1).

3.

أ) ما هو عدد أيام الفترة $[J_0 ; J_1]$ ؟

ب) إذا كان اليوم J_0 هو يوم الخميس 9 ديسمبر 1999، فما هو بالضبط تاريخ اليوم J_1 علما أنّ السنة 2000 هي سنة كبيسة.

جـ) إذا تعذر على الفلكي الملاحظة في هذا الموعد، فما هو عدد الأيام التي سينتظرها حتى يحدث الاقتران الموالي للجسمين A و B؟

حل

1- كل دورة للجسم A تمثل 105 يوما إذن عدد أيام الفترة $[J_0 ; J_1]$ هو 105 u.

وكل دورة للجسم B تمثل 81 يوما إذن عدد أيام الفترة $]J_0+6; J_1]$ هو 81 v.

نستنتج أن: $105u=81v+6$ وبالقسمة على 3 نجد: $35u-27v = 2$

2- أ) باستخدام خوارزمية إقليدس نجد $(x_0,y_0)= (-10 ;-13)$

ومنه $(u_0,v_0)=(-20 ;-26)$

ب) باستخدام نظرية غوص نجد: $(u;v)=(27k-20;35k-26)$ مع $k \in \mathbb{N}^*$

3-أ) من أجل $k=1$ أي أول اقتران نجد $u=7$ ومنه نجد طول الفترة $[J_0 ;J_1]$ هو $105\times 7+1$ وهذا يساوي 736يوما.

ب) لدينا $J_1-J_0=735$ و $735 \equiv 0[7]$ إذن اليوم J_1 هو يوم ثلاثاء.

وبما أن $735=366+365+4$ فإن تاريخ J_1 هو سنتين كاملتين وأربعة أيام بعد J_0 أي J_1 هو الخميس 13 ديسمبر 2001.

جـ) حتى نجد عدد أيام الانتظار للاقتران الموالي نحل المعادلة 105u=81v+0 لأن هذه المرة لا يوجد فرق في الأيام وبالتالي نحل المعادلة $35u = 27v$ ومنه عدد الأيام هو:

$$105 \times 27 = 81 \times 35 = 2835$$

نشاط 3:

يهدف هذا النشاط إلى توظيف المضاعف المشترك الأصغر و خواصه لحل مسائل من الواقع.

نريد تصفيف تلاميذ ثانوية في الساحة.
عندما ننشئ صفوفا ذات 45 تلميذا يبقى 44 و عندما ننشئ صفوفا ذات 50 تلميذا يبقى 49 و عندما ننشئ صفوفا ذات 75 تلميذا يتبقى 74.
أحسب N عدد تلاميذ الثانوية علما أن N محصور بين 1000 و1500 .

حـــل

نعلم أن كل عدد، يوافق بترديد n، باقي قسمته على n .

إذن: $N \equiv 44[45]$ و $N \equiv 49[50]$ و $N \equiv 74[75]$

وبإضافة العدد 1 (خواص الموافقات) نحصل على:

$N+1 \equiv 0[45]$ و $N+1 \equiv 0[50]$ و $N+1 \equiv 0[75]$

وهذا يعني أن العدد $N+1$ يقبل القسمة على كل من الأعداد 45، 50، 75 فهو مضاعف مشترك لها، وبالتالي مضاعف للمضاعف المشترك الأصغر لها.

لدينا : $PPCM(45;50;75) = 5 \times PPCM(9;10;15) = 5 \times (9 \times 2 \times 5)$

وبالتالي: $PPCM(45;50;75) = 450$ ومنه $N+1 = 450 \times k$ حيث k عدد طبيعي غير معدوم.

لكن $1000 < N < 1500$

إذن $999 < 450 \times k < 1499$

وبالتالي $\frac{999}{450} < k < \frac{1499}{450}$

فنجد $k \in]2,22;3,332[$ و منه $k = 3$

وبذلك نحصل على $N = 450 \times 3 - 1$ أي $N = 1349$

نشاط 4

يهدف هذا النشاط إلى برهان المبرهنة المسماة باسم:« مبرهنة *Fermat* الصغيرة ».

<u>الجزء الأول</u>

1) تحقق أن :
3 يقسم 4^2-1 وأن 7 يقسم 3^6-1 وأن 5 يقسم 6^4-1 وأن 11 يقسم $2^{10}-1$.

تعميم: نريد الوصول إلى النتيجة التالية :

"إذا كان p عددا أوليا و a عددا طبيعيا لا يقبل القسمة على p فإن p يقسم العدد $\left(a^{p-1}-1\right)$ " وتسمى هذه النتيجة « المبرهنة الصغيرة لِـ *Fermat* ».

2) تحقق من أن :

6 لا يقسم 2^5-1 و 3 لا يقسم 9^2-1 و 10 لا يقسم 2^9-1 .

اشرح لماذا لا يمكن تطبيق المبرهنة الصغيرة لِـ : *Fermat* في الحالات الثلاث السابقة؟

3) هل يمكن تطبيق هذه المبرهنة من أجل $p=4$ و $a=5$؟

في هذه الحالة الخاصة هل يقسم p العدد $\left(a^{p-1}-1\right)$ ؟. ماذا يمكن أن نستنتج؟

الجزء الثاني

ليكن $a=8$ و $p=5$ ونسمي E المجموعة: $E=\{1\ ;2\ ;3\ ;4\}$

1) من أجل كل عنصر من E، نرمز بالرمز r_k إلى باقي القسمة الإقليدية للعدد ka على p.

عين r_1،r_2، r_3، r_4 ثم بين أن المجموعة $\{r_1;r_2;r_3;r_4\}$ هي E .

2) استنتج أن: $8\times16\times24\times32\equiv1\times2\times3\times4\ [5]$

و أن: $(8^4-1)\ (1\times2\times3\times4)\equiv0\ [5]$

3) استنتج أن 5 يقسم العدد 8^4-1 .

الجزء الثالث

ليكن p عددا أوليا و a عددا طبيعيا لا يقبل القسمة على p.

نسمي E المجموعة : $\{1\ ;2\ ;3\ ;\ldots\ldots\ ;p-1\}$

1) نرمز بالرمز r_k إلى باقي القسمة الإقليدية للعدد ka على p.

برر أنه من أجل كل عنصر k من E ؛ $r_k\neq0$

2) ليكن k و k' عنصرين من E بحيث: $r_k=r_{k'}$

أثبت أن $\left(k-k'\right)a$ يقبل القسمة على p و أن $k=k'$.

3) نعتبر F مجموعة البواقي r_k عندما يتغير k في المجموعة E.

بين أن F تشمل $\left(p-1\right)$ عنصرا و أن F=E .

4 – باعتبار الجداء $a\times2a\times3a\times\ldots\ldots\ldots\times(p-1)a$ و بملاحظة أن:

$$r_1\times r_2\times r_3\times\ldots\times r_{p-1}=1\times2\times3\times\ldots\times(p-1)$$

برهن ان : $(a^{p-1}-1)\times(1\times2\times3\times\ldots\times(p-1))\equiv0\ \ [p]$

5 - استنتج أن p يقسم $a^{p-1}-1$.

الجزء الرابع

بين انه من أجل كل عدد طبيعي a ومن أجل كل عدد أولي p فإن العدد $\left(a^p-a\right)$ يقبل القسمة على p.

حل

الجزء الأول:

يمكن التحقق بسهولة من نتائج السؤالين1) و 2).

3) لا يمكن تطبيق المبرهنة الصغيرة لِـ *Fermat* من أجل $p = 4$ و $a = 5$ لأنه يجب أن يكون p أوليا

لكن في هذه الحالة الخاصة لدينا 4 يقسم 5^3-1.

نستنتج ان الشرط : « p أولي » كاف لكنه ليس لازما حتى يكون $(a^{p-1}-1)$ قابلا للقسمة على p.

الجزء الثاني:

1) لدينا $k \in \{1;2;3;4\}$ إذن $ka \in \{8;16;24;32\}$ لأن $a = 8$ وبقسمة العدد ka على 5 نجد البواقي :

$r_1 = 3$ ، $r_2 = 1$ ، $r_3 = 4$، $r_4 = 2$.

لدينا إذن $\{r_1; r_2; r_3; r_4\} = \{3;1;4;2\}$

ومنه $E = \{r_1; r_2; r_3; r_4\}$

2) ومما سبق جداء الأعداء ka يوافق جداء البواقي r_k عندما يتغير k في E

أي $8\times16\times24\times32 \equiv 1\times2\times3\times4 \; [5]$

من هذه العلاقة الأخيرة نلاحظ أن : $8\times8\times2\times8\times3\times8\times4 \equiv 1\times2\times3\times4 \; [5]$

أي $8^4\times(1\times2\times3\times4) \equiv 1\times2\times3\times4 \; [5]$

ومنه $8^4\times(1\times2\times3\times4)-(1\times2\times3\times4) \equiv 0 \; [5]$

وبالتالي $(8^4-1)\times(1\times2\times3\times4) \equiv 0 \; [5]$ وهو المطلوب.

3) بما أن الأعداد 1،2،3،4 أصغر من العدد الأولى 5 في أولية معه وبالتالي 5 أولى مع الجداء $(1\times2\times3\times4)$

لكن $(8^4-1)\times(1\times2\times3\times4) \equiv 0 \; [5]$

إذن بتطبيق نظرية *GAUSS* نجد $(8^4-1) \equiv 0 \; [5]$.

الجزء الثالث

1) لدينا p لا يقسم k (لأن $0 < k < p$) و p لا يقسم a (لأن a ليس مضاعفا للعدد p) وبما أن p أولي فان p لا يقسم الجداء ka. و منه $r_k \neq 0$

طريقة أخرى : نستعمل البرهان بالخلف وفصل الحالات.

نفرض أن p يقسم $k.a$ فبما أن p أولي فهو يقسم أحد العددين على الأقل k أو a

وفي الحالتين نصل إلى تناقض لأن p أكبر من k فهو لا يقسمه ولا يقسم a لأن a ليس من مضاعفاته (من المعطيات).

2) ليكن k و k' عنصرين من E بحيث $r_k = r_{k'}$

لدينا : $ka - k'a \equiv (r_k - r_{k'})[p]$

ومنه: $(k-k')a$ $(k-k')a \equiv 0[p]$

أي: $(k-k')a$) يقبل القسمة على p

وبما أن p يقسم $(k-k')a$ و p أولي مع a فانه يقسم $(k-k')$.

لكن $-p < k-k' < p$ و $(k-k')$ مضاعف للعدد p

إذن k-k' = 0 أي k=k' و هو المطلوب .

3) حسب ما سبق لكل عددين متمايزين k و k' من المجموعة E باقيين متمايزين r_k و r_k'

ومنه عدد البواقي هو نفسه عدد عناصر E ومنه المجموعة F تشمل $(p-1)$ عنصرا.

لدينا $1 \le r_k \le p-1$ من أجل كل عنصر k من E

إذن r_k ينتمي إلى E ومنه F هو جزء من E

و بما أن F و E لديهما نفس عدد العناصر فان E=F

4) نعلم أنه من اجل كل عنصر k من E لدينا : $ka \equiv r_k[p]$

إذن $\prod_{k=1}^{k=p-1} k.a \equiv \prod_{k=1}^{k=p-1} r_k[p]$

أي $a^{p-1}.\prod_{k=1}^{k=p-1} k \equiv \prod_{k=1}^{k=p-1} r_k[p]$

لكن E=F إذن $\prod_{k=1}^{k=p-1} k = \prod_{k=1}^{k=p-1} r_k$

إذن يعني $a^{p-1}.\prod_{k=1}^{k=p-1} k - \prod_{k=1}^{k=p-1} k \equiv 0[p]$

ومنه $(a^{p-1}-1).\prod_{k=1}^{k=p-1} k \equiv 0[p]$

أي $(a^{p-1}-1)(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times p-1) \equiv 0[p]$.

5) نستنتج من السؤال السابق أن p يقسم $(a^{p-1}-1)(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times p-1)$

وبما أن p أولي مع $(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times p-1)$

فان p يقسم $(a^{p-1}-1)$ حسب مبرهنة *Gauss*

لدينا: $a^p - a = a(a^{p-1}-1)$.

(1 إذا كان p يقسم a فإنه يقسم $a(a^p-1)$ أي p يقسم العدد (a^p-a).

(2 إذا كان p لا يقسم a أي أن a ليس من مضاعفات العدد الأولى p فانه ، حسب "المبرهنة الصغيرة لِـ *Fermat*" ، p يقسم $(a^{p-1}-1)$.

و منه p يقسم $a(a^{p-1}-1)$.

أي p يقسم العدد (a^p-a)

وهكذا نستنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي a و كل عدد أولي p يكون (a^p-a) قابلا القسمة على p.

2.ميدان التحليل

تنقسم المفاهيم الواردة في التحليل، حسب ما جاء به برنامج السنة الثالثة ثانوي، إلى قسمين جزء منها تم التقديم له في السنة الثانية بغرض التواصل والتطور والتجانس مع المفاهيم الجديدة الخاصة بمستوى السنة الثالثة ثانوي نذكر منها: النهايات، المشتق وتطبيقاته، المتتاليات ...؛ والجزء الآخر يتضمن مفاهيم جديدة على التلميذ إلا أنها مبنية على تعلمات سابقة بغرض التمهيد أو الربط بين شتى الأفكار الخاصة بالبرنامج منها: المعادلات التفاضلية التي تتأسس من خلال مفهوم المشتقات المتتابعة (من رتب متزايدة) والتي بدورها تمهد إلى الدوال الأصلية ومنها الدوال الأسية ، الدوال اللوغاريثمية؛ مفهوم التكامل والمساحات ....

يسمح بناء البرنامج الخاص بمستوى الثالثة ثانوي أو السنوات الأخرى بمواجهة مختلف المشكلات التي تناسب فكر التلميذ عن طريق حل المسائل والتي توضح الكفاءات التي باستطاعته أن يبرزها تحقيقا للهدف النهائي (الكفاءات الختامية) حسبما ورد في ملامح التخرج من التعليم الثانوي.

نشير إلى أن بعض المفاهيم ،مثل حلول المعادلات التفاضلية (وجود الدالة الأسية) ، تقبل دون برهان، غير أن مقاربتها بطريقة تجريبية باستعمال برمجيات أوالآلة الحاسبة البيانية، يسمح بتقديم هذه المفاهيم بطريقة يسهل على المتعلم تقبلها، كما يجدر الذكر أن ترجمة الفكرة الرياضية على شكل طلبيات في البرمجيات إنما يعبر عن عمق في فهم هذه الفكرة والتحكم فيها ومعرفة الهدف المراد منها.

نذكر فيما يلي بعض المفاهيم الجديدة مع اقتراح نشاطات في كيفية التمهيد لها وبعض الأفكار التي تبنى بها المسائل مع بعض التعاليق:

1) الإستمرارية:

عند التطرق لموضوع الاستمرارية نتجنب كل توسع نظري ونكتفي بالقدر الذي يسمح بإدراج المصطلحات وعرض النظريات الخاصة بالموضوع.

فنعرف الاستمرار على النحو التالي:

> من أجل كل عدد حقيقي a غير معزول في مجموعة تعريف الدالة f؛ القول أن الدالة f مستمرة عند a يعني: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

يمكن تناول الإستمرارية من جانبيين:

1) من خلال دوال معروفة لدى التلاميذ نجعلهم يلاحظون أن الدالة تكون مستمرة على مجال، عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم.

2) وبما أن الشيئ بضده يعرف، نعطي أمثلة لبعض الدوال غير المستمرة.

نشاط1

الهدف من هذا النشاط هو الدراسة البيانية لدالة وتوظيف نظرية القيم المتوسطة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I يحوي $[-1;1]$

f' الدالة المشتقة للدالة f ، $C_{f'}$ المنحني الممثل للدالة f' في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ في المجال $[-1;1]$ حيث $f(0)=0$.

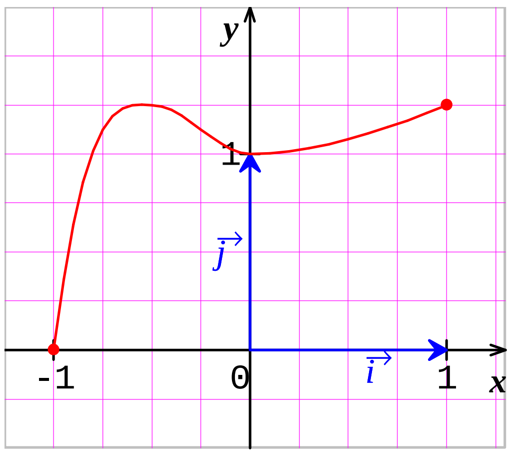
اذكر صحة أو خطأ ما يلي مع التبرير.

1) $f(-1)<f(1)$

2) 0 هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=0$ على المجال $[-1;1]$.

3) المنحني C_f الممثل للدالة f يقبل بالضبط مماسين موازيين للمستقيم الذي معادلته $y=x$.

4) المنحني C_f يقع فوق مماسه Δ عند النقطة O.



حـــل

1) صحيح: لأن الدالة المشتقة f' للدالة f موجبة على المجال $[-1;1]$ مما يعني أن الدالة f متزايدة تماما وبما أن $-1<1$ فإن $f(-1)<f(1)$.

2) صحيح: لأن الدالة f مستمرة على المجال $[-1;1]$ لأنها دالة قابلة للإشتقاق.

ولدينا f متزايدة تماما و $f(-1)<f(0)<f(1)$ وبما أن $f(0)=0$ فإن $f(-1)<0<f(1)$ إذن حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد a من $]-1;1[$ وبالتالي من $[-1;1]$ يحقق $f(a)=0$.

عندئذ a هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[-1;1]$ مع $a=0$ لأن $f(a)=0=f(0)$.

3) صحيح: لأن من المنحني $C_{f'}$ الممثل للدالة f' نجد المستقيم الذي معادلته $y=1$ يقطعه في نقطتين متمايزتين فاصلتاهما 0، x_0 حيث $x_0\in]-1;-0,25[$ وبالتالي $f'(0)=f'(x_0)=1$ وكل منهما يمثل معامل توجيه المماس وهما يساويان معامل توجيه المستقيم ذي المعادلة $y=x$ إذن فالمماسين يوازيانه.

4) خطأ: لأن f' تقبل قيمة حدية عند الصفر هي $f'(0)=1$ إذن دالتها المشتقة تنعدم مغيرة إشارتها وهي f'' وهذا يعني أن منحنى الدالة f يقبل نقطة انعطاف هي المبدأ $O(0;0)$ للمعلم (لأن $f(0)=0$ ب) إذن المنحني يغير وضعيته بالنسبة لمماسه عند المبدأ $O(0;0)$

بطريقة أخرى واضح أنه في المجال $\left]\frac{-1}{2};0\right[$ لدينا f' متناقصة إذن f'' سالبة وفي لمجال $]0;1[$ لدينا f' متزايدة إذن f'' موجبة.

x	$-0,5$	0	1
$f''(x)$	$-$	0	$+$

هذا يعني أن النقطة $O(0;0)$ هي نقطة انعطاف لأن $f(0)=0$ وبالتالي المماس Δ يقطع المنحني مغيرا وضعيته.

نشاط2

الهدف من هذا النشاط هو توضيح مفهوم الاستمرارية من خلال مقارنة منحنيين لدالتين إحداهما مستمرة وأخرى غير مستمرة من دراسة نفس الظاهرة

نريد ملء إناء بعشرة غرامات من سائل معين. لدينا إمكانيتان لذلك.

- نستعمل صنبورا يتدفق منه السائل بشكل مستمر على شكل خيط رفيع يعطي غراما واحدا في الثانية ، نفرض $f(t)$ كمية السائل المحصل عليها بعد t ثانية.
- نستعمل صنبورا يتدفق منه السائل بشكل قطرات بحيث يتراكم السائل عند فتحة الصنبور ثم ينزل بعد كل ثانية على شكل قطرات تزن كل واحدة غراما واحدا ، نفرض $g(t)$ كمية السائل المحصل عليها بعد t ثانية.

1) ما هي صور الأعداد 0، 1، 2، $0,1$، $0,5$، $0,9$، $1,6$؟
اشرح لماذا حلول المعادلة $f(t)=g(t)$ هي الأعداد الطبيعية التي تحقق $t\leq 10$.

2) n عدد طبيعي حيث $0\leq n<10$
نضع $t=n+k\times(0,1)$ مع $0\leq k<10$. احسب كلا من $f(t)$ و $g(t)$.
نفس السؤال من أجل $t=n+k\times(0,01)$ حيث $0\leq k<100$.

3) بين أنه مهما كان العدد الطبيعي h يكون $g(n+k\times 10^{-h})=n$ حيث $0\leq k<10^{h}$.

4) أنشئ C_f و C_g التمثيلين البيانيين للدالتين f و g في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;I;J)$ في كل حالة مما يلي: $t\in[0;1]$، $t\in[1;2]$ ماذا تلاحظ بالنسبة للمنحنى C_g عند النقطتين اللتان فاصلتاهما 1 و2.
هل يمكن تعميم النتيجة من أجل كل عدد طبيعي n أقل من 10؟
أنشئ المنحنيين C_f و C_g في نفس المعلم في المجال $[0;10]$، ماذا تلاحظ ؟

حــــل

1) لدينا كل ثانية تقابل غراما واحدا، إذن كمية السائل متناسبة مع الزمن بالثانية، وعليه يمكن تلخيص النتائج في الجدول التالي:

t	$f(t)$	$g(t)$	التبرير
0	0	0	لحظة بدء الملء.
1	1	1	بعد ثانية نحصل على غرام واحد من السائل من الصنبور الأول وقطرة من الصنبور الثاني وزنها **1** غرام.
2	2	2	بعد ثانيتين نحصل على غرامين من السائل من الصنبور الأول وقطرتين من الصنبور الثاني وزنهما معا **2** غرام.
0,1	0,1	0	عند جزء من العشر من الثانية نحصل على جزء من العشر من الغرم و تكون القطرة من الصنبور الثاني لم تنزل بعد لعدم اكتمالها الوزن المحدد **1** غرام.
0,5	0,5	0	نفس التبرير.
0,9	0,9	0	نفس التبرير.
1,6	1,6	1	بالنسبة للصنبور الثاني نزلت قطرة واحدة والقطرة الثانية لم تنزل بعد لنفس السبب السابق.

كتلة السائل النازل من الصنبور الأول متناسبة مع الزمن و النسبة هي $\frac{1}{1}=1$ وبالتالي $f(t)=t$

كتلة السائل من الصنبور الثاني نحصل عليها على شكل وحدات كاملة (مقدرة بالغرام) وبالتالي $g(t)=t$ في كل فترة من الشكل $[t;t+1[$.

وبالتالي $f(t)=g(t)=t$ من أجل $t\leq 10$

2) لدينا $0\leq k<10$ إذن $0\leq k\times(0,1)<1$ وبالتالي $n\leq n+k\times(0,1)<n+1$ و هي الفترة $[n;n+1[$

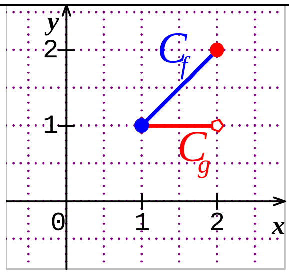
$f(t)=t=n+k\times(0,1)$ بينما $g(t)=n$ (فترة الحصول على n قطرة)

بنفس الطريقة إذا كان $t=n+k\times(0,01)$ فإن $t\in[n;n+1[$ فنحصل على نفس النتيجة.

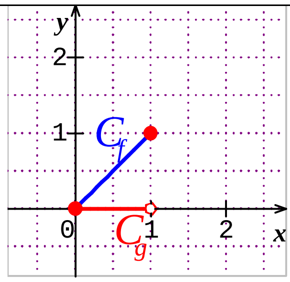
3) بما أن $0\leq k<10^h$ فإن $0\leq k\times10^{-h}<10^h\times10^{-h}$ وبالتالي $0\leq k\times10^{-h}<10^h\times10^{-h}$

نعلم أنه مهما كان العدد الطبيعي h فإن $10^h*10^{-h}=1$ نجد عندئذ $t\in[n;n+1[$ ومنه $g(t)=n$.

4) الرسم:



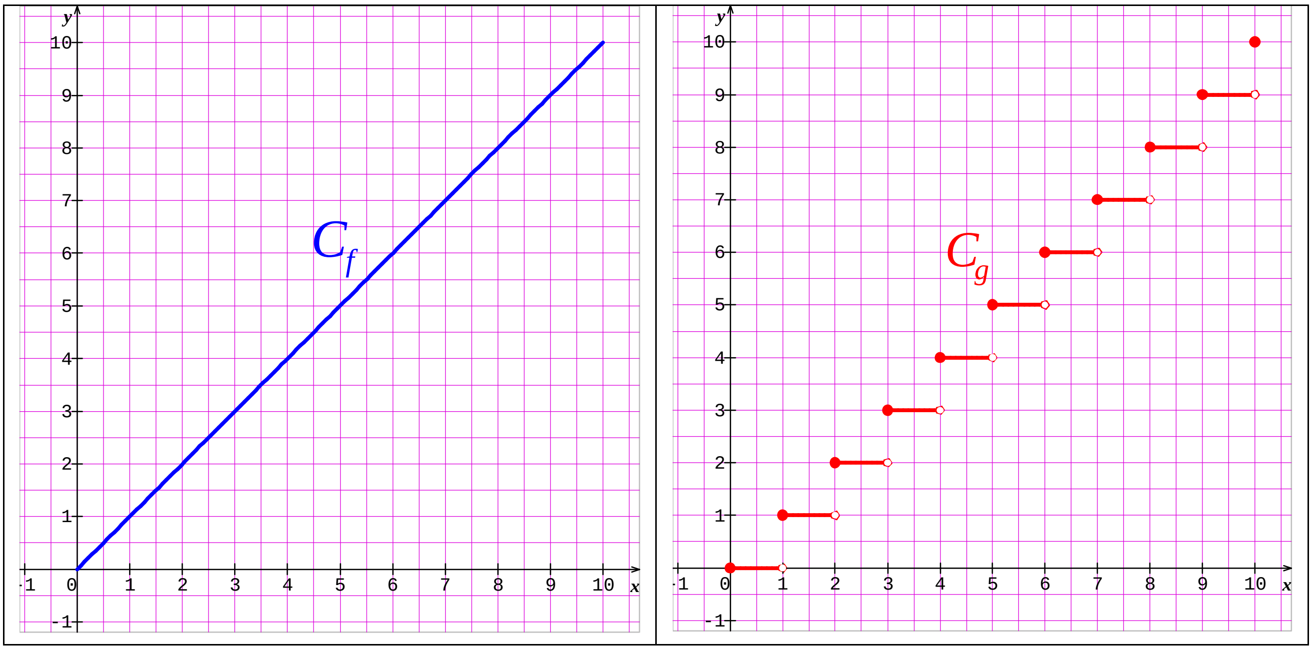
في المجال $[1;2]$



في المجال $[0;1]$

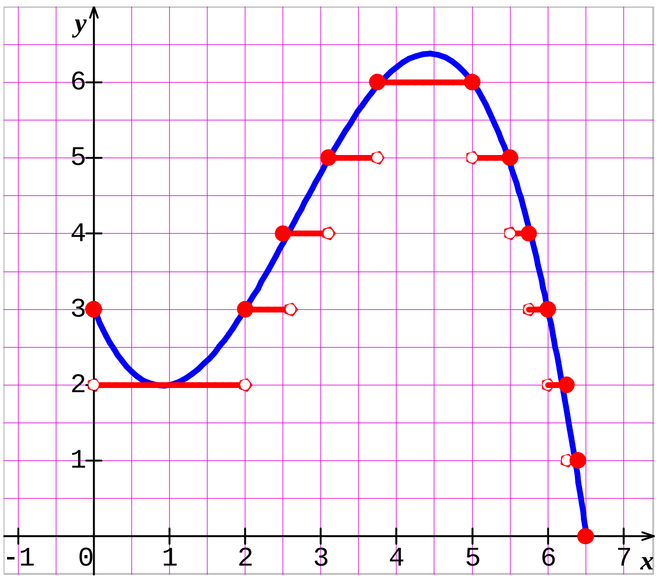
المنحنى C_g متقطع عند كل من النقطتين اللتين فاصلتاهما 1، 2.

ويمكن تعميم النتيجة على كل عدد طبيعي لأن كتلة السائل في الفترة $[n;n+1[$ هي n.



نلاحظ أن المنحني C_f هو خط مستمر فيمكن رسمه دون رفع القلم أما المنحني C_g فمكون من اتحاد قطع مستقيمة فهو متقطع أي غير مستمر ولا يمكن رسمه دون رفع القلم.

نقول عن الدالة f أنها مستمرة عند كل قيمة من المجال $[0;10]$ والدالة g غير مستمرة عند القيم الطبيعية من المجال $[0;10]$.



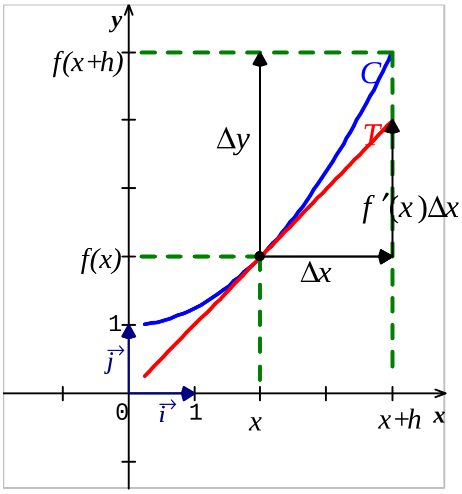
تسمى الدالة g دالة الجزء الصحيح . نرمز عادة للجزء الصحيح للعدد x بالرمز $E(x)$ أو $[x]$ وهو معرف كما يلي: من أجل العدد الصحيح k فإنه مهما كان العدد الحقيقي x من المجال $[k;k+1[$ فإن k هو الجزء الصحيح للعدد x

ملاحظة: يمكن تركيب نشاط بالمثل من الواقع باعطاء المنحني البياني للسرعة اللحظية لسيارة بدلالة الزمن بالدقائق ومقارنته مع المنحني الممثل لنتائج العداد في السيارة الذي يتكون من خلايا رقمية والوحدة هي عشرة كيلومتر في الساعة $10Km/h$ (أي لا يعطي العداد أجزاء الوحدة)

كان العداد يظهر العدد 3 لحظة بداية قياس السرعات ثم توقفت السيارة في اللحظة $6{,}5$ دقيقة.

2) المعادلات التفاضلية:

♦ نتعرض إلى رمز التفاضل قبل كل شيء من خلال تناول الأعداد اللامتناهية في الصغر ومفهوم المشتق.



نكتفي بإدراج الرمز $\frac{df}{dx}$ بالتذكير بتعريف المشتق كما يلي:
في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر المنحنى C الذي معادلته $y=f(x)$ حيث f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I
نضع T مماس المنحنى C في نقطة M ذات الفاصلة x.
كل تغير طفيف $h=\Delta x$ $(h\neq 0)$ في المتغير x يؤدي إلى تغير طفيف في الصور $\Delta y=f(x+h)-f(x)$
وبما أن $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ باعتبار الدالة قابلة للاشتقاق، فبوضع $e(h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)$ نجد $f(x+h)-f(x)=f'(x)h+he(h)$

وبالتالي: $\lim\limits_{h\to 0}e(h)=0$

حيث يمكن صياغتها على الشكل $\Delta y=f'(x)\Delta x+\Delta x.e(\Delta x)$

بذلك ، عندما يكون Δx بجوار 0، $\Delta y\approx f'(x)\Delta x$ بخطأ مهمل بالنسبة للعدد Δx.

نصطلح على كتابة المشتق على صيغته التفاضلية بالترميز $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ أو $dy=f'(x)dx$.

و هو الترميز المستعمل عادة في العلوم الفيزيائية، و على وجه العموم توظف التراميز التالية:

$\frac{df}{dx}$ بدلا من f'، وإذا كانت الدالة المشتقة للدالة f قابلة للاشتقاق بدورها فنرمز بالرمز $\frac{d^2f}{dx^2}$ للمشتقة الثانية بدلا من f''، و هكذا بالرمز $\frac{d^nf}{dx^n}$ بدلا من $f^{(n)}$.

♦ باستخدام مفهوم التقريبات يمكن استعمال الكتابة $\Delta y\approx f'(x).\Delta x$ للحصول على بعض القيم التقريبية لقيم يتعذر حسابها مباشرة أو لتقريب بعض الحلول للمعادلات التفاضلية.

§ مثلا : $\sqrt{100{,}2}=\sqrt{100}+0{,}2(\frac{1}{2\sqrt{100}})$ أي $\sqrt{100{,}2}=10+0{,}2(\frac{1}{20})$

حيث $\Delta y=\sqrt{100{,}2}-\sqrt{100}$ و $\Delta x=h=0.2$ و هو صغير بمقارنته بالعدد 100

و $f'(100)=\frac{1}{2\sqrt{100}}$ من مشتقة دالة الجذر التربيعي.

فنجد $\sqrt{100{,}2}=10{,}01$

تعطي الآلة الحاسبة النتيجة 10.009995004

يمكن استعمال هذا التقريب بالدوال الأخرى (أنظر المثال الوارد في الوثيقة المرافقة للسنة الثانية)

§ مثال على حل معادلات تفاضلية:

نتعرف من خلال هذا التقريب على حل للمعادلة التفاضلية $y'=y$ مع الشرط $y(0)=1$

$\Delta y \approx f'(x).\Delta x$ تعني $f(x+h)-f(x)\approx f'(x).h$ أو $f(x-h)-f(x)\approx f'(x).h$ مع $h>0$

وبما أن $y'=y$ فإن $f(x)=f'(x)$ فنحصل على $f(x+h)\approx f(x).(1+h)$ أو $f(x-h)\approx f(x).(1-h)$.

نتحصل بالعبارة الأولى $f(x+h)\approx f(x).(1+h)$ قيم الدالة (الحل) من أجل $x>0$ وتعطي العبارة الثانية $f(x-h)\approx f(x).(1-h)$ قيم الدالة (الحل) من أجل القيم $x<0$ وذلك باعتبار $f(0)=1$ في الانطلاقة وجعل h صغيرا بالقدر الذي يضمن تقريبا جيدا.

نستخدم مجدول Excel لمقاربة التمثيل البياني للدالة الحل . نبحث عن الحل في مجال $[a;b]$ بحيث $a<0<b$ أي المجال $[a;b]$ يشمل 0.

j التعامل مع الأعداد

نحجز الخطوة h في الخانة A3 مثلا.

1) على الجزء $[a;0]$

نحجز في الخانة A4 قيمة إبتدائية للمتغير و هو 0

نحجز في الخانة A5 القاعدة $=x-h$ التي تعطي قيم المتغير x التي هي قبل 0 بطرح الخطوة في كل مرة حتى الحصول على العدد a فنحجز: $=A4+A\$3$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود A إلى غاية الحصول على القيمة a أو أقرب قيمة لها.

نحجز في الخانة B4 العدد 1 و هو قيمة الدالة من أجل 0 لأن $f(0)=1$

نحجز في الخانة B5 القيمة التقريبية للعدد $y=f(x-h)$ ولدينا $f(x-h)\approx f(x).(1-h)$ فنحجز : $=B4*(1-A\$3)$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود B حتى الوصول إلى آخر قيمة للمتغير من العمود A

2) على الجزء $[0;b]$

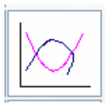
نحجز في الخانة C4 قيمة ابتدائية للمتغير و هو 0

نحجز في الخانة C5 القاعدة $=x+h$ التي تعطي قيم المتغير x التي هي بعد 0 بإضافة الخطوة في كل مرة حتى الحصول على العدد a فنحجز: $=C4+A\$3$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود C إلى غاية الحصول على القيمة b أو أقرب قيمة لها.

نحجز في الخانة D4 العدد 1 و هو قيمة الدالة من أجل 0 لأن $f(0)=1$

نحجز في الخانة D5 القيمة التقريبية للعدد $y=f(x+h)$ ولدينا $f(x+h)\approx f(x).(1+h)$ فنحجز : $=D4*(1+A\$3)$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود D حتى الوصول إلى آخر قيمة للمتغير من العمود B

k تمثيل هذه الأعداد

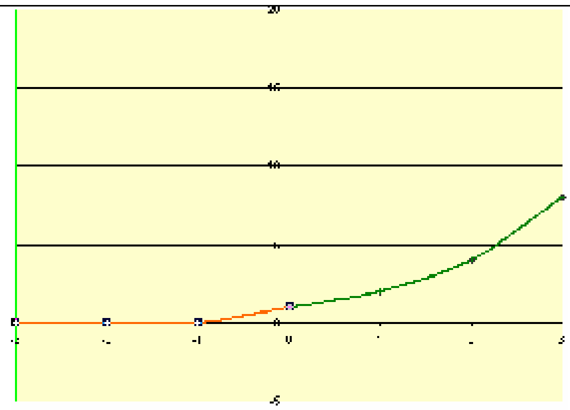
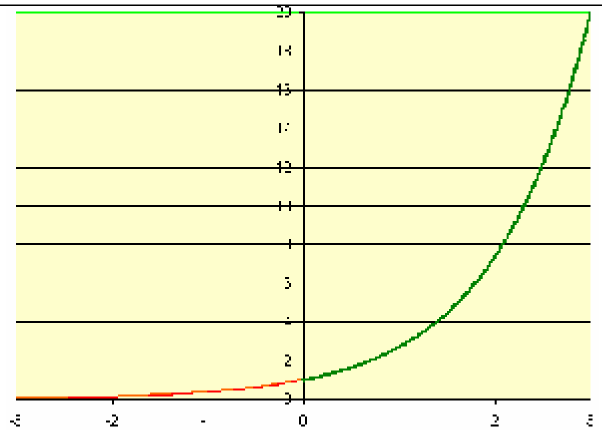
نختار العمودين A و B نضغط على المساعد البياني  ونختار Nuages de points ثم المنحنى من النوع  ، نواصل العملية بالضغط على Suivant > ثم اختيار السلسلة بالضغط على Série نجد السلسلة الأولى التي تخص تمثيل الدالة (الحل) على المجال الأول $[a;0]$ محجوزة باسم Série1. ثم نضغط على Ajouter لإضافة السلسلة الثانية التي تعطي التمثيل البياني على المجال الثاني $[0;b]$ كما يلي:

نضع مؤشر الكتابة على خانة قيم x ثم نحجز قيم العمود C بالضغط بالفأرة من القيمة الأولى في C4إلى آخر قيمة من نفس العمود.

نضع مؤشر الكتابة على خانة قيم y ثم نحجز قيم العمود D بالضغط بالفأرة من القيمة الأولى في D4 إلى آخر قيمة من نفس العمود.

نضغط بعدها على التالي Suivant > فيظهر المنحنيان مكملان لبعضهما بلونين مختلفين ،حيث يشكلان منحنى الدالة (الحل) على المجال $[a;b]$، ثم الإنهاء Terminer

بعد إدخال تحسينات على المنحنى (ضبط محوري الإحداثيات و التلوين) نحصل من أجل $a=-3$ و $b=3$ المنحنيين :

$h=1$	$h=0,005$
	

لاحظ أنه كلما كانت الخطوة أصغر كلما كان التمثيل أدق و القيم أقرب للواقع.

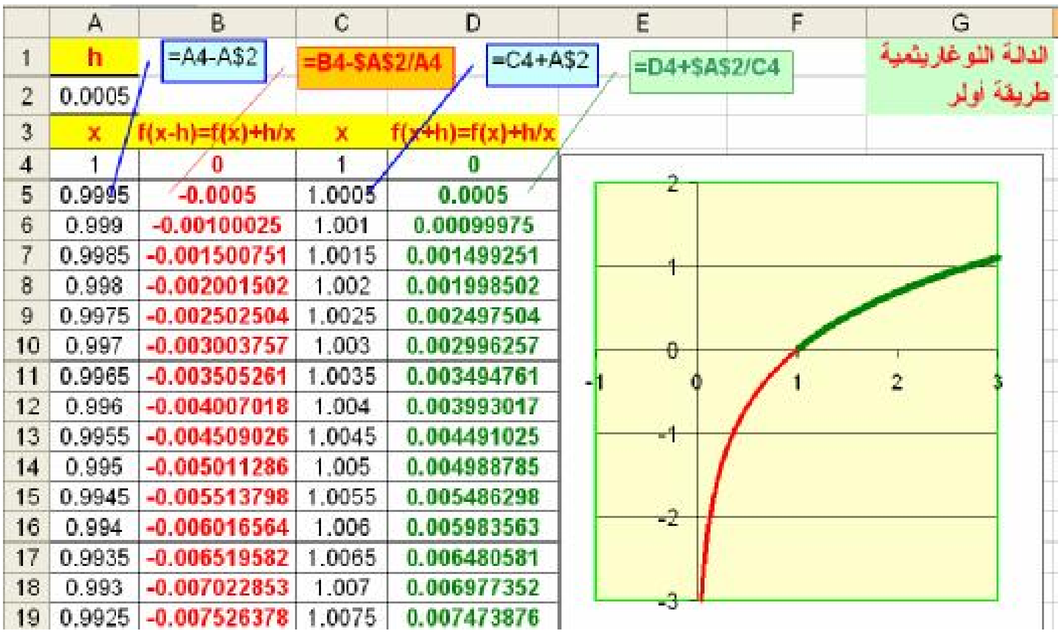
يسمى حل هذه المعادلة الدالة الأسية النيبرية.

1 الإنجاز

1) أنجز العمل السابق باستعمال مجدول Excel لإيجاد حل المعادلة $y'=y$ و $y(0)=1$ في المجال $[-3;3]$ والخطوة $h=0.005$.

2) عين بنفس الطريقة التمثيل البياني للمعادلة: $y'=\frac{1}{x}$ مع الشرط $y(1)=0$.

حـــل



	A	B	C	D	E	F	G
1	h	=A4-A$2	=B4-$A$2/A4	=C4+A$2	=D4+$A$2/C4		الدالة اللوغاريثمية طريقة أولر
2	0.0005						
3	x	f(x-h)=f(x)+h/x	x	f(x+h)=f(x)+h/x			
4	1	0	1	0			
5	0.9995	-0.0005	1.0005	0.0005			
6	0.999	-0.00100025	1.001	0.00099975			
7	0.9985	-0.001500751	1.0015	0.001499251			
8	0.998	-0.002001502	1.002	0.001998502			
9	0.9975	-0.002502504	1.0025	0.002497504			
10	0.997	-0.003003757	1.003	0.002996257			
11	0.9965	-0.003505261	1.0035	0.003494761			
12	0.996	-0.004007018	1.004	0.003993017			
13	0.9955	-0.004509026	1.0045	0.004491025			
14	0.995	-0.005011286	1.005	0.004988785			
15	0.9945	-0.005513798	1.0055	0.005486298			
16	0.994	-0.006016564	1.006	0.005983563			
17	0.9935	-0.006519582	1.0065	0.006480581			
18	0.993	-0.007022853	1.007	0.006977352			
19	0.9925	-0.007526378	1.0075	0.007473876			

نشاط

الهدف من هذا النشاط هو التحقق من وجود حل للمعادلة التفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ بطريقة أولر

تتكون دارة كهربائية من مقاومة R مقياسها 5 أوم، ومكثفة C مقياسها 0,05 فاراد ومدخرة بجهد كهربائي ثابت U مقداره 60 فولط.

كمية الكهرباء مقدرة بالكولومب هي دالة q بدلالة الزمن t تحقق المعادلة $Rq' + \frac{1}{C}q = U$ حيث q هو المجهول في هذه المعادلة.

هذه المعادلة هي مثال لمعادلة تفاضلية، أي لا ندري عبارة الدالة $q(t)$ ، نقترح تقدير كمية الكهرباء q خلال 1,5 ثانية في الحالة $q(0) = 0$.

1) أثبت أن: $q' = -4q + 12 \ldots\ldots(1)$

2) للوصول إلى التقدير المطلوب نتبع طريقة أولر باختيار كخطوة 0.1 وإنشاء منحني تقريبي للتمثيل البياني للدالة q على المجال $[0;1,5]$.

ننشئ متتالية الأعداد $M_n(x_n;y_n)$ بدء بالنقطة $M_0(0;0)$.

أثبت أن: $x_{n+1} = x_n + 0.1$ و $y_{n+1} = 0,6y_n + 1.2$ من أجل $n \le 15$.

3) يمكن الاستعانة بمجدول أو حاسبة لحساب الأعداد x_n و y_n .

أنشئ المنحنى C التي نتحصل عليها بإيصال النقط المتتابعة بخط مستمر(يمكن إنشاء C باستخدام المساعد البياني لمجدول) ثم انشئ في نفس المعلم المستقيم Δ ذي المعادلة $q = 3$.

ما هي القيمة التقريبية لكمية الكهرباء خلال 1,5 ثانية؟

4) باستعمال المعادلة (1) أكتب معادلة لمماس المنحنى C في اللحظة $t = 0$ ثم أرسم هذا المماس تحقق أن فاصلة نقطة تقاطع المماس مع المستقيم Δ تساوي $R \times C$ أي 0,25ثانية.

5) نضع $t = R \times C$

تحقق أنه من أجل $t = 5t$ ثمثل كمية‌الكهرباء ما يقرب 99% من كمية الكهرباء النهائية وهي3.

حـــل

1) لدينا $Rq' + \frac{1}{C}q = U$ ، وبالتعويض نجد $5q' + \frac{1}{0,05}q = 60$ أي$5q' + 20q = 60$ وبالإختزال على 5 نجد : $q' + 4q = 12$ ومنه المطلوب $q' = -4q + 12$.

2) طول المجال $[0;1,5]$ هو $1,5$ وبما أن طول الخطوة 0,1فإن $n \le \frac{1,5}{0,1}$ أي $n \le 15$

المقدار $x_{n+1} - x_n$ يساوي0,1 لأنه يمثل الخطوة وبالتالي $x_{n+1} = x_n + 0,1$.

ولدينا $q' = -4q + 12$ أي $q'(t) = -4q(t) + 12$ وباستخدام الصيغة التفاضلية للمشتق (التقريبات)

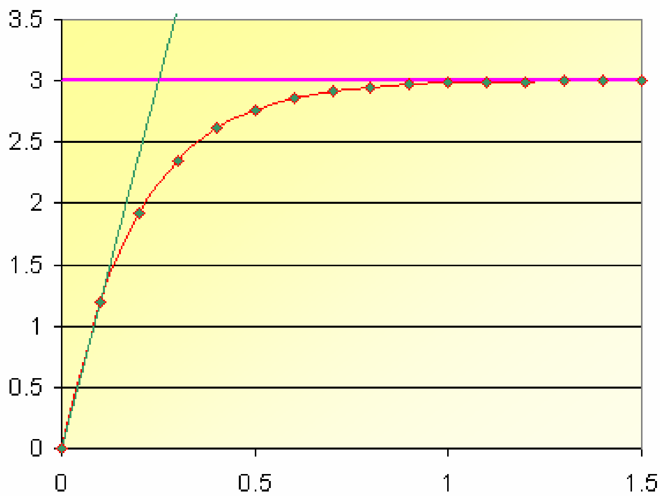
فإن $\frac{y_{n+1} - y_n}{0,1} = \frac{q(x_{n+1}) - q(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = q'(t)$ مع $q(t) = q(x_n)$

عندئذ نحصل على $\frac{y_{n+1} - y_n}{0,1} = -4y_n + 12$ أي $y_{n+1} - y_n = -0,4y_n + 1,2$

ومنه نصل إلى المطلوب $y_{n+1} = 0,6y_n + 1,2$.

3) نستخدم مجدول *Excel*:

	A	B	C	D
1	الخطوة	=A4+A$2	=0.6*B4+1.2	=12*A4
2	0.1			
3	Xn	yn	y=3	y=12x
4	0	0	3	0
5	0.1	1.2	3	1.2
6	0.2	1.92	3	2.4
7	0.3	2.352	3	3.6
8	0.4	2.6112	3	4.8
9	0.5	2.76672	3	6
10	0.6	2.860032	3	7.2
11	0.7	2.9160192	3	8.4
12	0.8	2.94961152	3	9.6
13	0.9	2.96976691	3	10.8
14	1	2.98186015	3	12
15	1.1	2.98911609	3	13.2
16	1.2	2.99346965	3	14.4
17	1.3	2.99608179	3	15.6
18	1.4	2.99764908	3	16.8
19	1.5	2.99858945	3	18



كمية الكهرباء التقريبية عند الزمن 1,5ثانية هي 3 كولومب.

4) كتابة معادلة المماس للمنحنى C عند النقطة $M_0(0;0)$ المقابلة للزمن $t = 0$

في هذه الوضعية $q(0) = 0$ وبالتالي $q'(0) = 0 + 12$ وبما أن $y = q'(0).(x - 0) + q(0)$ فإننا نجد $y = 12x$

فاصلة نقطة تقاطع المماس مع المستقيم Δ هي العدد x الذي يحقق $12x = 3$ أي $x = \frac{1}{4} = 0,25$

و هي مطابقة لقيمة $R \times C$ لأن $R \times C = 5 \times 0,05 = 0,25$

5) من أجل $t = 5t = 1,25$ فإن $1.2 < t < 1,3$ و 2.993469653<q<2.996081792

وباتالي $\frac{2.996081792}{3} < \frac{q}{3} < \frac{2.993469653}{3}$ نجد $0.997823218 < \frac{q}{3} < 0.998693931$

ومنه نجد كمية الكهرباء تمثل قيمة بجوار النسبة 99% من القيمة المحصل عليها كنهاية و هي3.

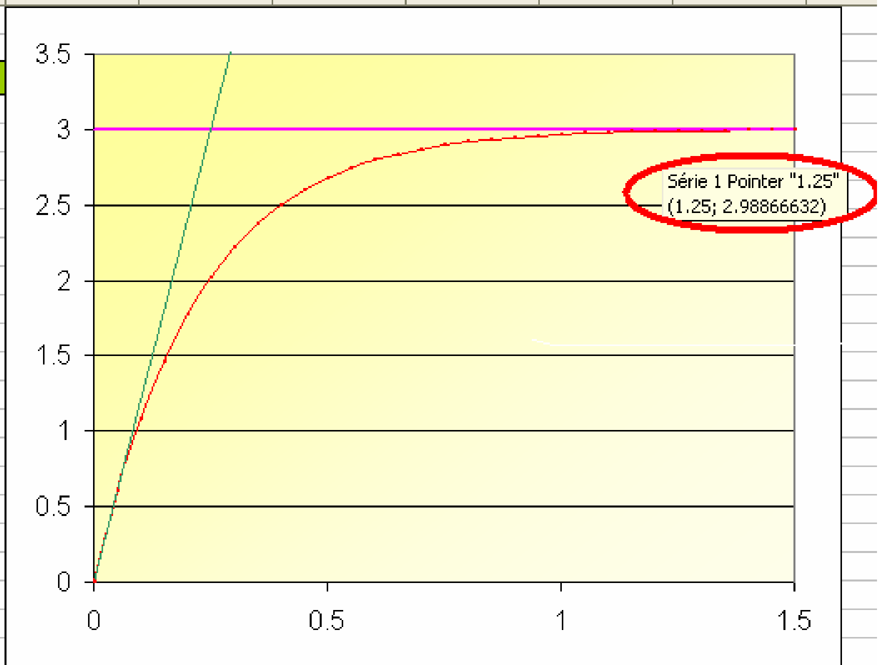
طريقة أخرى

يمكن أن نحصل على قيمة q المقابلة للقيمة $t = 1,25$ بإعادة إنشاء المنحني بحيث نحصل على القيمة $t = 1,25$ يمكن من أجل ذلك جعل الخطوة 0,05.

يعطي المجدول $q = 2.98866632$ وبالتالي $\frac{q}{3} = \frac{2.98866632}{3} = 0.996222107$ ومنه النتيجة

تفوق 99% من القيمة المحصل عليها كنهاية و هي 3.

	A	B	C	D
1	الخطوة			
2	0.05			
3	Xn	yn	y=3	y=12x
4	0	0	3	0
5	0.05	0.6	3	0.6
6	0.1	1.08	3	1.2
7	0.15	1.464	3	1.8
8	0.2	1.7712	3	2.4
9	0.25	2.01696	3	3
10	0.3	2.213568	3	3.6
11	0.35	2.3708544	3	4.2
12	0.4	2.49668352	3	4.8
13	0.45	2.59734682	3	5.4
14	0.5	2.67787745	3	6
15	0.55	2.74230196	3	6.6
16	0.6	2.79384157	3	7.2
17	0.65	2.83507326	3	7.8
18	0.7	2.8680586	3	8.4
19	0.75	2.89444688	3	9
20	0.8	2.91555751	3	9.6
21	0.85	2.93244601	3	10.2
22	0.9	2.9459568	3	10.8
23	0.95	2.95676544	3	11.4
24	1	2.96541235	3	12
25	1.05	2.97232988	3	12.6
26	1.1	2.97786391	3	13.2
27	1.15	2.98229113	3	13.8
28	1.2	2.9858329	3	14.4
29	1.25	2.98866632	3	15
30	1.3	2.99093306	3	15.6



3) الإستدلال بالتراجع

تنص البرامج على أن تناول مبادئ المنطق عامة وأنماط البرهان خاصة لا يتم من خلال تخصيص دروس لها، بل لا بد أن تكون حاضرة في كل مراحل عرض المفاهيم الرياضياتية والتبريرات المتعلقة بالنتائج التي يتم الوصول إليها.

نعلم أنه في التفكير المنطقي يوجد نوعان من البراهين (الاستنتاج والاستقراء) أما الاستقراء فموضوعه الإحصاء الوصفي حيث لا يمكن الاستغناء عنه لأن من مهامه استقراء النتائج المتحصل عليها للتمكن من تمثيلها ثم مقارنتها مع منحنيات لدوال مرجعية أو لدوال غير معقدة مركبة من دوال مرجعية ، وأما الاستنتاج فهو يشمل أنماط البرهان المعروفـــــة (الاستنتاج المباشر، البرهان بالخلف، ....) وفي هذا المستوى، يضاف نمط جديد إلى سلسلة أنماط البرهان المعروفة عند التلاميذ هو البرهان (الإستدلال) بالتراجع .

يستعمل هذا النمط من البرهان لإثبات صحة خواص معرفة على مجموعات لها خاصيتين:

- تملك المجموعة عنصرا أولا(العنصر الأصغر)
- لكل عنصر n من هذه المجموعة عاقب هو $n+a$ حيث a عدد معلوم.

لكننا نقتصر في برنامج السنة الثالثة ثانوي على المجموعات الجزئية من $\mathbb{N}$ وبحيث يكون $a = 1$.

إن هذا النوع من الاستدلال جديد على التلاميذ يدخل في جميع ميادين الرياضيات كأي نمط من أنماط البرهان الأخرى.

يعتمد مبدأ الاستدلال بالتراجع على إثبات مرحلتين:

> الانطلاقة: وتنص على أن تكون الخاصية المراد برهانها محققة من أجل العنصر الأول.
> صحة الاستلزام: إذا كانت تلك الخاصية محققة من أجل عدد n فهي محققة من أجل عاقبه $n+1$.

ميدان الاستدلال بالتراجع: يشبه الاستدلال بالتراجع في تدخله المنهج التجريبي (الملاحظة، التجربة وهي تشمل البرهان، استخلاص النتيجة أو القانون)

مثال: نريد أن نحسب الحد العام لمتتالية حسابية.

من التعريف لدينا العلاقة التراجعية: مهما كان n من $\mathbb{N}$ فإن $U_{n+1} = U_n + r$ حيث r هو الأساس.

نعوض بقيم n الأولى.

من أجل $n = 0$ لدينا $U_1 = U_0 + r$

من أجل $n = 1$ لدينا $U_2 = U_1 + r = U_0 + r + r = U_0 + 2r$

من أجل $n = 2$ لدينا $U_3 = U_2 + r = U_0 + 2r + r = U_0 + 3r$

من أجل $n = 3$ لدينا $U_4 = U_3 + r = U_0 + 3r + r = U_0 + 4r$

فنلاحظ ما يلي: $U_1 = U_0 + 1.r$ ، $U_2 = U_0 + 2.r$ ، $U_3 = U_0 + 3.r$ ، $U_4 = U_0 + 4.r$

وأيضا $U_0 = U_0 + 0.r$

إذن يمكن أن نجزم أنه مهما كان n من $\{0;1;2;3;4\}$ لدينا $U_n = U_0 + n.r$.

السؤال المطروح: هل من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}$ يكون لدينا : $U_n = U_0 + n.r$؟

يسمح الاستدلال بالتراجع بالإجابة عن هذا التساؤل.

- الخاصية محققة من أجل $n = 0$ لأن $U_0 = U_0 + 0.r$
- إذا فرضنا أن $U_n = U_0 + n.r$ فهل يكون $U_{n+1} = U_0 + (n+1).r$؟

طبعا $U_n = U_0 + n.r$ يؤدي إلى أن $U_n + r = U_0 + n.r + r$ وذلك بإضافة r إلى الطرفين
ومن التعريف لدينا $U_n + r = U_{n+1}$ ومنه $U_{n+1} = U_0 + (n+1).r$
يمكن الآن أن نستنتج بأن الخاصية محققة من أجل كل قيمة يأخذها العدد الطبيعي n.
و هذا ما نعنيه الانتقال من العام إلى الخاص.

نشاط 1:

نرمز بالرمز $Arg(z)$ لعمدة العدد المركب غير المعدوم z و بالرمز $|z|$ لطويلته.

1) أثبت من أجل كل عددين مركبين z و z' غير معدومين:
$$Arg(z \times z') \equiv Arg(z) + Arg(z')[2\pi]$$
و $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.

2) بين بالتراجع على n من $\mathbb{N}$ أنه مهما كان العددان المركبان غير المعدومين z و z':
$$Arg(z^n) \equiv n \times Arg(z)[2\pi] \text{ و } |z^n| = |z|^n$$

حـــل:

1) إذا فرضنا أن $Arg(z) \equiv a\,[2\pi]$ و $Arg(z') \equiv b\,[2\pi]$ فإن:
$$z = |z|.(\cos(a) + i\sin(a)) \text{ و } z' = |z'|.(\cos(b) + i\sin(b))$$
وبالتالي $z \times z' = |z|.|z'|(\cos(b) + i\sin(b)).(\cos(a) + i\sin(a))$
أي $z \times z' = |z|.|z'|((\cos(b).\cos(a) - \sin(a)\sin(b)) + i((\cos(a)\sin(b)) + \sin(a).\cos(b)))$
ومنه $z \times z' = |z|.|z'|(\cos(a+b) + i\sin(a+b))$.
نستنتج عندئذ أن $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ وأن $Arg(z \times z') \equiv Arg(z) + Arg(z')[2\pi]$

2)

- من أجل $n = 0$ فإن $|z^0| = |1| = 1 = |z^0|$.
نفرض أن $|z^n| = |z|^n$ ونبين أن $|z^{n+1}| = |z|^{n+1}$
لدينا $|z^{n+1}| = |z^n \times z| = |z^n| \times |z|$ من خواص القوة وخاصية طويلة جداء السابقة.
ومن فرضية التراجع $|z^n| = |z|^n$ إذن $|z^{n+1}| = |z|^n \times |z| = |z|^{n+1}$
- من أجل $n = 0$ فإن. $Arg(z^0) \equiv Arg(1)[2\pi]$ وبما أن عمدة العدد الحقيقي المعدوم
توافق 0 بتردد 2π فإن $Arg(z^0) \equiv 0[2\pi]$ أي $Arg(z^0) \equiv 0 \times z\,[2\pi]$
نفرض أن $Arg(z^n) \equiv n \times Arg(z)[2\pi]$ ونبين أن $Arg(z^{n+1}) \equiv (n+1) \times Arg(z)[2\pi]$
لدينا $Arg(z^{n+1}) \equiv Arg(z^n \times z)[2\pi]$ ومن عمدة الجداء نجد
$$Arg(z^n \times z) \equiv Arg(z^n) + Arg(z)[2\pi]$$
ومن فرضية التراجع $Arg(z^n) + Arg(z) \equiv n \times Arg(z) + Arg(z)[2\pi]$
ومنه $Arg(z^{n+1}) \equiv (n+1) \times Arg(z)[2\pi]$

ملاحظات:

1) يستند هذا النوع من البرهان على مبرهنة تدعى مبرهنة الاستدلال بالتراجع التي يعتبر برهانها خارج البرنامج، لذلك فهي تقبل بدون برهان.

2) يمكن أن يدخل البرهان بالتراجع في جميع ميادين الرياضيات باعتباره وسيلة من وسائل التبرير.

3) يمكن أن يحضر مع البرهان بالتراجع أي نوع آخر من البراهين الاستنتاجية (قاعدة العكس النقيض ، فصل الحالات،...)

4) البرهان بالتراجع هو برهان بسيط من حيث المبدأ إلا أن كثير من التلاميذ يعتقدون بصعوبته والسر أن الصعوبة تكمن في قواعد الحساب التي صيغت عليها الخاصية التي يراد برهانها.

أمثلة:

1) أثبت أنه مهما كان n من $\mathbb{N}$ فإن $2^n > n$.

طريقة أولى : واضح أنه من اجل $n = 0$ لدينا $2^0 > 0$ أي $1 > 0$ فهي محققة.

نفرض أن $2^n > n$ ونبين أن $2^{n+1} > n+1$.

لدينا $n \in \mathbb{N}$ إذن $n \geq 0$ وبالتالي $2^n \geq 2^0$ أي $2^n \geq 1$.

ومن فرضية التراجع لدينا $2^n > n$

إذن بالجمع طرفا إلى طرف نجد $2^n + 2^n > n+1$ أي $2 \times 2^n > n+1$ ومنه $2^{n+1} > n+1$

طريقة أخرى: يمكن أن نستعين بالبرهان بفصل الحالات بوضع $\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$.

نبين في الحالة الأولى أن الخاصية محققة من أجل $n = 0$.

نبين في الحالة الثانية بالتراجع صحتها على $\mathbb{N}^*$ كما يلي:

الخاصية محققة من اجل $n = 1$ لأن $2 > 1$.

نفرض صحتها من أجل n أي $2^n > n$ ونبين صحتها من اجل $n+1$ أي $2^{n+1} > n+1$.

إذن $2^n > n$ أي $2 \times 2^n > 2 \times n$ أي $2^{n+1} > n+n$ وبما ان $n \in \mathbb{N}^*$ فإن $n \geq 1$ وبالتالي $n+n \geq n+1$

ومنه $2^{n+1} > n+n \geq n+1$ ينتج بذلك $2^{n+1} > n+1$

2) استعمال البرهان بقاعدة العكس النقيض مع البرهان بالتراجع.

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 2$ و بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1}$

أثبت أنه مهما كان العدد الطبيعي n فإن $u_n \neq 1$

من اجل $n = 0$ واضح أن $u_0 \neq 1$ لأن $u_0 = 2$

نبين أنه إذا كان $u_n \neq 1$ فإن $u_{n+1} \neq 1$ وباستعمال قاعدة العكس النقيض يكفي أن نبين أنه إذا كان $u_{n+1} = 1$ فإن $u_n = 1$.

وفعلا: $u_{n+1} = 1$ يعني $2u_n + 1 = u_n + 2$ (البسط والمقام متساويان)

وينتج من ذلك ان $u_n = 1$ ومنه البرهان.

4) المتتاليات العددية

نواصل موضوع المتتاليات على المنوال الذي قدمت به في السنة الثانية مع بعض التعمق وبعض الإضافات حيث ندرج المتتاليات المتجاورة، مثلا، قصد استغلالها في الحساب التكاملي.

نقول عن متتاليتين (u_n) و (v_n) أنهما متجاورتان عندما تكون إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة ولهما نفس النهاية أي $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

يمكن على سبيل المثال أن يكون تعريف متتالية متعلق بشرط (كنوع جديد من الطرح) ونطلب من التلميذ أن يمثل بعض الحدود الأولى ويلاحظ تغيراتها ثم يستعين بمجدول لتمثيلها.

نشـــاط:

يهدف هذا النشاط إلى إبراز قوة التفكير المنطقي إلى جانب الحساب والتعرف على المتتاليات المتجاورة

نعرف متتاليتين (u_n) و (v_n) على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ على النحو التالي.

إذا كان $\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 \le 2$ فإن $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ و $v_{n+1} = v_n$ مهما كان n من $\mathbb{N}$

إذا كان $\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 > 2$ فإن $u_{n+1} = u_n$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ مهما كان n من $\mathbb{N}$

مع $u_0 = 1$ و $v_0 = 2$

1) أحسب u_0، u_1، u_2 ، u_3 ، u_4 وv_0، v_1، v_2 ، v_3، v_4.

2) بين أنه مهما كان العدد الطبيعي n لدينا $u_n < v_n$

3) أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة وأن (v_n) متناقصة.

4) نضع $w_n = u_n - v_n$.

أ- أثبت أن (w_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الأول.

ب- استنتج أن (w_n) مقاربة . ماذا يمكن القول عن المتتاليتين (u_n) و (v_n)؟

جـ - مثل العشرة حدود الأولى لكل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

حــل

(1

n	0	1	2	3	4
الشرط على $\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2$	$\frac{9}{4} > 2$	$\frac{25}{16} \le 2$	$\frac{121}{64} \le 2$	$\left(\frac{23}{16}\right)^2 = \frac{529}{256} > 2$	
الحد u_n	$u_0 = 1$	$u_1 = u_0 = 1$	$u_2 = \frac{5}{4}$	$u_3 = \frac{11}{8}$	$u_4 = u_3 = \frac{11}{8}$
الحد v_n	$v_0 = 2$	$v_1 = \frac{2+1}{2} = 1{,}5$	$v_2 = v_1 = 1{,}5$	$v_3 = v_2 = 1{,}5$	$v_4 = \frac{23}{16}$

2) لدينا $u_0 = 1$ و $v_0 = 2$ إذن $u_0 < v_0$

نفرض أن $u_n < v_n$ ونبين $u_{n+1} < v_{n+1}$

إذا كان $\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 \le 2$ فإن $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ و $v_{n+1} = v_n$

بما ان $u_n < v_n$ فإن $u_n + v_n > 2v_n$ وبالقسمة على 2 نجد $u_{n+1} < v_n$ ولكن $v_{n+1} = v_n$ إذن $u_{n+1} < v_{n+1}$

إذا كان $\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 > 2$ فإن $u_{n+1} = u_n$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

بما ان $u_n < v_n$ فإن $2u_n > u_n + v_n$ وبالقسمة على 2 نجد $u_n < v_{n+1}$ ولكن $u_{n+1} = u_n$ إذن $u_{n+1} < v_{n+1}$

ومنه $u_n < v_n$ مهما كان العدد الحقيقي n.

ملاحظة: لاحظ أننا استعملنا البرهان بالتراجع والبرهان بفصل الحالات في آن واحد.

(3

j نبين أن (u_n) متزايدة.

- إذا كان $\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 \le 2$ فإن $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ وبالتالي $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}$ وبما ان $u_n < v_n$

فإن $u_{n+1} - u_n > 0$.

- وإذا كان $\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 > 2$ فإن $u_{n+1} = u_n$ وبالتالي $u_{n+1} - u_n = 0$

ومنه $u_{n+1} - u_n \ge 0$ أي (u_n) متزايدة.

k نبين أن (v_n) متناقصة.

- إذا كان $\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 > 2$ فإن $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ وبالتالي $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$ وبما ان $u_n < v_n$

فإن $v_{n+1} - v_n < 0$.

- وإذا كان $\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 \le 2$ فإن $v_{n+1} = v_n$ وبالتالي $v_{n+1} - v_n = 0$

ومنه $v_{n+1} - v_n \le 0$ أي (v_n) مناقصة.

4) أ- لدينا إذا كان $\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 > 2$ فإن $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ و $u_{n+1} = u_n$

بالطرح نجد $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2}$ وهذا يعني ان $w_{n+1} = \frac{1}{2} w_n$

أما إذا كان $\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 \le 2$ فإن $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ و $v_{n+1} = v_n$

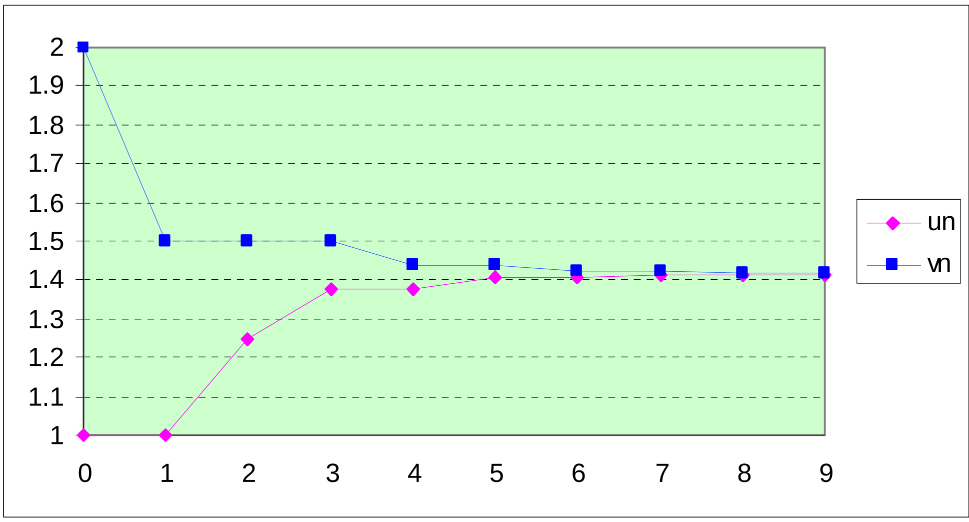
بالطرح نجد $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2}$ وهذا يعني ان $w_{n+1} = \frac{1}{2} w_n$ أيضا.

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $w_0 = u_0 - v_0$ أي $w_0 = 1 - 2 = -1$.

ب- بما أن (w_n) متتالية هندسية أساسها ينتمي إلى المجال $]-1;1[$ فهي متقاربة.

تتقارب (w_n) نحو 0 إذن $\lim_{n \to +\infty}(u_n - v_n) = 0$ وبما أن (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة إذن (u_n) و (v_n) هما متتاليتان متجاورتان

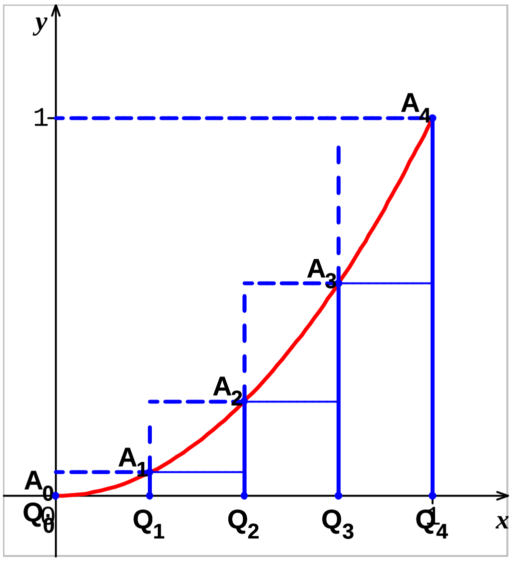
جـ- التمثيل



5) حساب المساحات

نشاط 1:

الهدف من هذا لنشاط هو مقاربة حساب المساحة باستخدام المتتاليات المتجاورة



ننشئ الجزء A_0A_4 من القطع المكافئ P الذي معادلته $y = x^2$ حيث $0 \le x \le 1$

النقط A_0 ، A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 تنتمي إلى القطع المكافئ P فواصلها، على الترتيب، هي 0، $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{2}$، $\frac{3}{4}$، 1.

والنقط Q_0، Q_1، Q_2 ، Q_3، Q_4 مساقطها العمودية على حامل محور الفواصل $(x'x)$ على الترتيب.

1) أ- نعتبر المستطيلات التي أضلاعها $[Q_pQ_{p+1}]$ و $[A_pQ_p]$ حيث p عدد طبيعي يأخذ القيم من 0 إلى 3. لهذه المستطيلات قواعد متقايسة طول كل منها 0,25.

احسب مساحة كل مستطيل ثم المجموع S_2 لهذه المساحات.

ب- نقسم كل من المجالات الأربعة السابقة إلى النصف ونعيد انشاء المستطيلات بنفس الكيفية فتكون قواعدها متقايسة طول كل منها 0,125. احسب مساحة كل مستطيل ثم المجموع S_3 لهذه المساحات.

بين أن $S_3 > S_2$.

جـ - نقسم، مجددا، كل من المجالات الثمانية السابقة إلى النصف فنحصل على 2^4 مجالا ونكرر العملية إلى 2^5 مجالا و هكذا...

إذا عبرنا بالرمز S_n لمجموع مساحات المستطيلات الموافقة للعدد 2^n مجالا نتحصل عندئذ على متتالية (S_n). ماهي المخمنة التي يمكن وضعها من أجل اتجاه تغير المتتالية (S_n)؟

2) أ- نعتبر المستطيلات التي أضلاعها $[Q_pQ_{p+1}]$ و $[A_{p+1}Q_{p+1}]$ حيث p عدد طبيعي يأخذ القيم من 0 إلى 3. احسب المجموع S_2' لمساحات هذه المستطيلات.

ب- نقسم كل من المجالات الأربعة السابقة إلى النصف ونعيد انشاء المستطيلات بنفس الكيفية.

احسب المجموع S_3' لمساحات المستطيلات المحصل عليها.

بين أن $S_3' < S_2'$.

جـ -نقسم، مجدد، كل من المجالات الثمانية السابقة إلى النصف فنحصل على 2^4 مجالا ونكرر العملية إلى 2^5 مجالا و هكذا... إذا عبرنا بالرمز S_n' لمجموع مساحات المستطيلات الموافقة للعدد 2^n مجالا نتحصل، عندئذ، على متتالية (S_n'). ماهي المخمنة التي يمكن وضعها من أجل اتجاه تغير المتتالية (S_n)؟

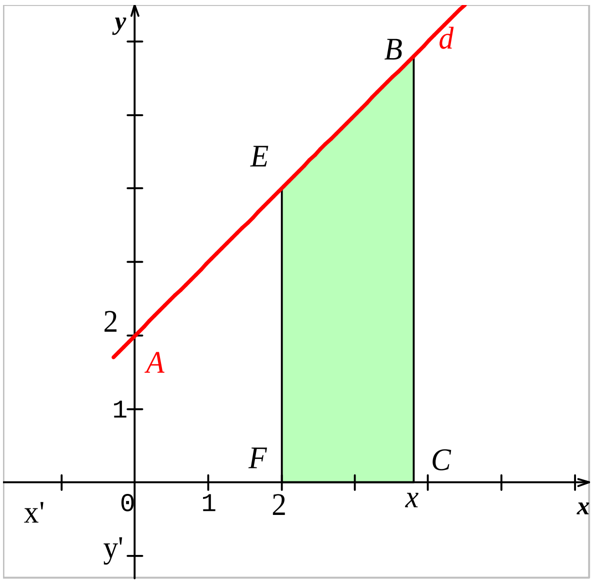
3) أ- بين أن $S_3' - S_3 = 2^{-3}$

أعط مخمنة تخص عبارة $S_n' - S_n$. ماهي نهاية $S_n' - S_n$؟

ب- ماهي المخمنة التي يمكن أن نضعها تتعلق بنهايتي (S_n) و (S_n')

نشاط 2: الدالة المشتقة لدالة مرفقة بمساحة.

يهدف هذا النشاط إلى ربط مساحة الحيز الذي يقع تحت منحني C_f بالدالة الأصلية للدالة f



f دالة معرفة بالعبارة $f(x)=x+2$ ، d المستقيم هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

يقطع المستقيم d المحور (yy') في النقطة $A(0;2)$ ونقطة من المستقيم d فاصلتها x حيث $x>0$.

C المسقط العمودي للنقطة B على المحور (xx').

1) بين أن المساحة $S(x)$ لشبه المنحرف $OABC$ تساوي $\frac{x(x+4)}{2}$

2) تحقق أن $S'(x)=f(x)$

3) نعتبر النقطة E من المستقيم d فاصلتها 2 و F مسقطها العمودي على $(x'x)$.
احسب بدلالة x المساحة $G(x)$ لشبه المنحرف $EFCB$. أحسب $G'(x)$.
4) اعد الحسابات السابقة مع اختيار النقطة B بحيث $-2 < x < 0$.
هل نتحصل على نفس النتيجة $G'(x)$؟

حــل

1) مساحة شبه المنحرف تساوي جداء الارتفاع بالمتوسط الحسابي لقاعدتيه $OC \times \frac{OA + CB}{2}$

ولدينا $OC = x$، $OA = 2$، $CB = f(x) = x + 2$ ومنه $S(x) = \frac{x(x+4)}{2}$

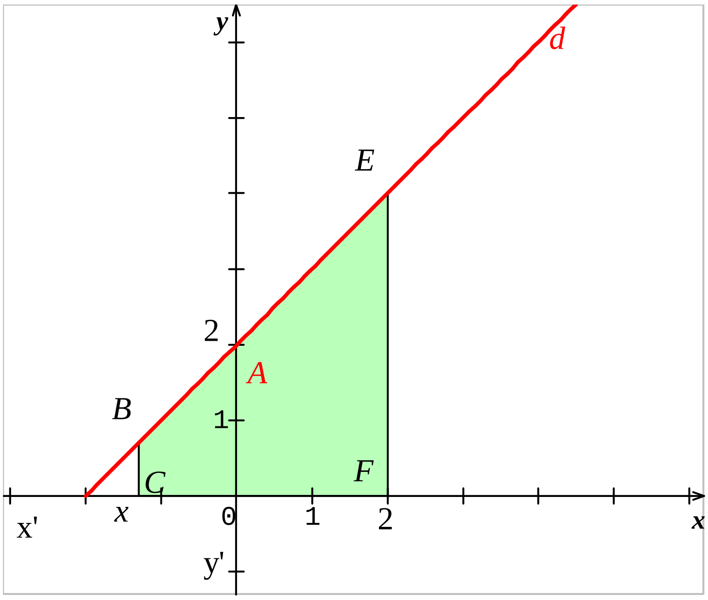
2) ننشر عبارة $S(x)$ فنجد $S(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$ وبالتالي $S'(x) = x + 2$ ومنه $S'(x) = f(x)$.

3) بنفس الطريقة نجد مساحة شبه المنحرف $EFCB$ هي: $FC \times \frac{EF + CB}{2}$ ولدينا أيضا

$FC = x - 2$، $EF = f(2) = 4$، $CB = f(x) = x + 2$ ومنه $G(x) = (x-2)\frac{4 + (x+2)}{2}$

أي $G(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x+6)$ ومنه $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$.

واضح $G'(x) = x + 2$ أي $G'(x) = f(x)$



4) من أجل $-2 < x < 0$ فإن مساحة شبه المنحرف $EFCB$ هي $FC \times \frac{EF + CB}{2}$

لكن $FC = 2 - x$، $EF = f(2) = 4$،

$CB = f(x) = x + 2$

ومنه $G(x) = (2 - x)\frac{4 + (x+2)}{2}$

أي $G(x) = \frac{1}{2}(2 - x)(x + 6)$ ومنه

$G(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

ويكون عندئذ $G'(x) = -x - 2$ أي

$G'(x) = -f(x)$ و هي نتيجة ليست مطابقة للنتيجة السابقة بل نظيرتها.

مساحة حيز واقع تحت قطع مكافئ

عندما نريد حساب مساحة حيز محدود بمنحنى دالة f ومحور الفواصل والمستقيمات التي معادلاتها $x = a$ و $x = b$ على مجال $[a;b]$ يمكن مقاربة ذلك كما يلي

نجزئ مجال $[a;b]$ إلى n جزء فنحصل على النقط A_0 ،A_1 ،...،A_{n-1} ،A_n من منحني الدالة فواصلها على الترتيب 0، $\frac{1}{n}$ ،... ،$\frac{n-1}{n}$ ،1 مساقطها العمودية على محور الفواصل هي على الترتيب Q_0 ،Q_1 ،...،Q_{n-1} ،Q_n فإننا نجد المساحة المطلوبة S محصورة بين العددين S_n و S'_n حيث: S_n هي مجموع مساحات المستطيلات التي قواعدها $[Q_pQ_{p+1}]$ وارتفاعاتها $[Q_pA_p]$.

S'_n هي مجموع مساحات المستطيلات التي قواعدها $[Q_pQ_{p+1}]$ وارتفاعاتها $[Q_{p+1}A_{p+1}]$.

المتتاليتان (S_n) ،(S'_n) هما متتاليتان متجاورتان أي إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة ولهما نفس النهاية.

نشاط 3.

C جزء من القطع المكافئ الذي معادلته $y = x^2$ في المجال $[0;1]$.

نريد حساب المساحة S للحيز المستوي المحدد بالقطع C والمستقيمات التي معادلاتها $y = 0$ $x = a$ و $x = b$

نجزئ المجال إلى n جزء فنحصل على النقط التي فواصلها x_k حيث $0 \le k \le n$

S_n هي مجموع مساحات المستطيلات التي طول قواعدها طول الجزء المحصل عليه وارتفاعاتها $(x_k)^2$ حيث $0 \le k \le n-1$.

S'_n هي مجموع مساحات المستطيلات التي طول قواعدها طول الجزء المحصل عليه وارتفاعاتها $(x_k)^2$ حيث $1 \le k \le n$.

1) بين من الشكل أن $S_n < S < S'_n$.

2) أثبت بالتراجع أنه مهما كان n من ¥ فإن $\sum_{p=0}^{p=n} p^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

استنتج المجموع $\sum_{p=0}^{p=n-1} p^2$.

3) اكتب بدلالة n عبارتي S_n و S'_n ثم أثبت أن المتتالية (S_n) متزايدة .

4) بين أن المتتاليتين (S_n) ،(S'_n) متجاورتين.

5) بين أن: $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{3}$ ثم استنتج بذلك المساحة S.

حـل

1) S_n هو مجموع مستطيلات تقع تحت القطع المكافئ لأن $0 \le k \le n-1$ وبالتالي $S_n < S$

بينما S'_n هو مجموع مستطيلات تقع فوق القطع المكافئ لأن $1 \le k \le n$ وبالتالي $S < S'_n$

نستنتج عندئذ أن $S_n < S < S'_n$.

2) من أجل $n = 0$ الطرفان متساويان وكل منهما يساوي الصفر(بالتعويض)

نفرض أن $\sum_{p=0}^{p=n} p^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ونبين أن $\sum_{p=0}^{p=n+1} p^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$

لدينا $\sum_{p=0}^{p=n+1} p^2 = \sum_{p=0}^{p=n} p^2 + (n+1)^2$ ومن فرضية التراجع نجد $\sum_{p=0}^{p=n+1} p^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$

أي $\sum_{p=0}^{p=n+1} p^2 = \frac{1}{6}(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]$ وبالنشر $\sum_{p=0}^{p=n+1} p^2 = \frac{1}{6}(n+1)\left[2n^2+7n+6\right]$

وبما أن $(n+2)(2n+3) = n^2+7n+6$ فإن $\sum_{p=0}^{p=n+1} p^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$ ومنه المطلوب.

نستنتج عبارة $\sum_{p=0}^{p=n-1} p^2$ باستبدال كل n بالعدد $n-1$ فنجد $\sum_{p=0}^{p=n-1} p^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$.

3) لدينا $x_k = \frac{k}{n}$ لأن الخطوات متساوية ومساوية $\frac{1}{n}$ أي $x_k = 0+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}$ (مع $x_0 = 0$).

مساحة كل مستطيل هي $\frac{1}{n}\times(\frac{k}{n})^2$ من أجل $0 \le k \le n-1$ إذن $S_n = \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{1}{n}(\frac{p}{n})^2$ أي

$S_n = (\frac{1}{n})^3 \sum_{p=0}^{p=n-1} p^2$ ومنه $S_n = (\frac{1}{n})^3 \times \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$

أي $S_n = \frac{2n^2-3n+1}{6n^2}$.

بنفس الطريقة نجد مساحة كل مستطيل هي $\frac{1}{n}\times(\frac{k}{n})^2$ من اجل $1 \le k \le n$ وبالتالي $S'_n = (\frac{1}{n})^3 \sum_{p=1}^{p=n} p^2$

أي $S'_n = (\frac{1}{n})^3 \times \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ و منه $S'_n = \frac{2n^2+3n+1}{6n^2}$.

نبين أن المتتالية (S_n) متزايدة.

لدينا $S_n = \frac{1}{3} + \frac{-3n+1}{6n^2}$ إذن $S_{n+1} - S_n = \frac{-3(n+1)+1}{6(n+1)^2} - \frac{-3n+1}{6n^2}$

أي $S_{n+1} - S_n = \frac{-3n-2}{6(n+1)^2 n^2}\times n^2 - \frac{-3n+1}{6n^2(n+1)^2}\times(n+1)^2$

$S_{n+1} - S_n = \frac{-3n^3-2n^2}{6(n+1)^2 n^2} - \frac{-3n^3-5n^2-n+1}{6n^2(n+1)^2}$

$S_{n+1} - S_n = \frac{3n^2-n+1}{6n^2(n+1)^2}$ مقدار موجب إذن (S_n) متتالية متزايدة.

4) حتى تكون المتتاليتان (S_n) و (S'_n) متجاورتان يكفي أن نبين أن (S_n) متناقصة و أن $\lim_{n\to\infty}(S'_n - S_n) = 0$

نبين بالطريقة نفسها ان (S'_n) متزايدة .

$S'_n - S_n = \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} - \frac{2n^2-3n+1}{6n^2}$ إذن $S'_n - S_n = \frac{6n}{6n^2} = \frac{1}{n}$

طريقة أخرى: من تعريف المساحتين S_n و S'_n فإن S'_n هي مجموع مساحة المستطيل الأخير ومجموع مساحات صور المستطيلات ذي المساحة S_n بالإنسحاب الذي شعاعه $-\frac{1}{n}\vec{i}$.

وبما أن $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty}(S'_n-S_n)=0$ ومنه ا لمتتاليتان (S_n) و (S'_n) متجاورتان.

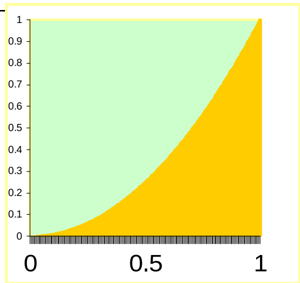
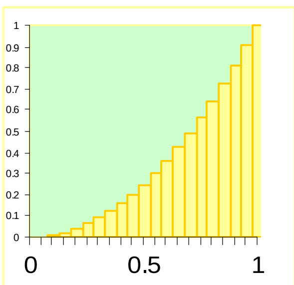
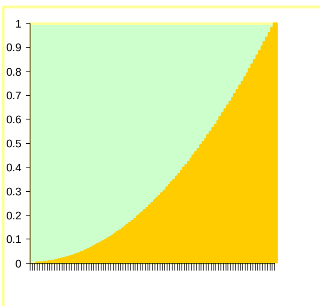
لدينا $S_n=\frac{1}{3}+\frac{-3n+1}{6n^2}$ فبما أن $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3n+1}{6n^2}=0$ إذن $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}$.

بما أن ا لمتتاليتين (S_n) و (S'_n) متجاورتان فإن $\lim\limits_{n\to\infty}(S'_n-S_n)=0$ وبما أن $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty}S'_n=\frac{1}{3}$.

لكن $S_n<S<S'_n$ فبالمرور إلى نظرية الحصر نجد $S=\frac{1}{3}$

ملاحظة: لاحظ أنّ مجموع مساحات المستطيلات يقترب من المساحة التي تقع تحت القطع المكافئ كلما كان n (عدد المستطيلات) أكبر. إذن مساحة كل مستطيل هي $\frac{1}{n}\times\left(k\times\frac{1}{n}\right)^2$.

يمكن حساب المجموع في الحالات الأربعة السابقة كما هو مبين أسفل الجدول.

S=0.3358375 S=0.385		من أجل $h=0.005$ من أجل $h=0,1$
S=0.35875		من أجل $h=0.05$
S=0.33835		أجل $h=0.01$

3. ميدان الإحصاء والاحتمالات

في برنامج السنة الثانية ثانوي، وبالضبط في باب الإحصاء، انصب التركيز على جدوى تلخيص سلسلة إحصائية بواسطة الثنائية الوسيط والانحراف الربيعي (Me ; Q3-Q1) أو بواسطة الوسط الحسابي والانحراف المعياري (m ; s) وتمثيل ذلك بيانيا بواسطة مدرج تكرار أو بمخطط بالعلبة.

أمّا فيما يخص باب الاحتمالات نسجل أن برنامج السنة الثانية ثانوي سمح للمقاربة التواترية ذات البعد المحسوس بالتمهيد لإبراز مفهوم الاحتمال من خلال ربطه بمفهوم التواتر عبر خاصية "قانون الأعداد الكبيرة" *(Loi des grands nombres)*. وقد كان لمحاكاة بعض التجارب المرجعية (كإلقاء حجر نرد أو قطعة نقدية) دورا بارزا في ذلك حيث سمحت بدراسة خواص التواترات و ربطها بخواص الاحتمال. كما تم التطرق إلى مفهوم تجربة عشوائية وإلى مفهوم نمذجة تجربة عشوائية.

في المستوى النهائي الذي يعتبر برنامج الرياضيات فيه تتويجا للمعارف الرياضياتية عند التلميذ في التعليم الثانوي وفي الأطوار السابقة له، يلتحم الإحصاء والاحتمالات أكثر من خلال مفهوم تلاؤم سلسلة إحصائية مشاهدة مع نموذج احتمالي يفترض أنّه مؤهل لوصفها والتعبير عن هذه السلسلة. إذ يصل التلميذ في هذا المستوى إلى قبول أو رفض نموذج احتمالي وفق مقياس (مؤشر) معيّن وبناءً على عتبة يحددها سلفا. كما أنّ هذا البرنامج يسمح للتلميذ بتوسيع مفهوم الاحتمالات المتقطعة إلى قانون برنولي والقانون الثنائي مما يمكنه من معالجة مسائل من الواقع تتعلق بالاحتمالات الشرطية يستعمل فيها مفهوم شجرة الاحتمالات. كما يسمح للتلميذ بالتطرق إلى

مفهوم الاحتمالات المستمرة الذي يمكنه من معالجة ظواهر مستمرة من الواقع كانتشار الحرارة مثلا أو مدة صلاحية جهاز.

بالنسبة إلى شعبتي الرياضيات وتقني رياضيات نجد أن البرنامج يركز على العدّ إذ يجعل منه أداة قوية في حل مسائل في الاحتمالات.

نسعى من خلال الأنشطة المقترحة في ما يلي إلى تغطية ميدان الإحصاء والاحتمالات، فهي أمثلة مختارة بعناية موجهة للأستاذ ليستعين بها في تقديم المفاهيم الواردة أعلاه، وهي تمثل له نماذج يَحْسُنُ به السير بتلاميذه على منوالها وأن يخص الملاحظات المتعلقة بكيفية إنجازها و بعض التعاليق المرفقة بها، بالدراسة والتمحيص حتى تكون له قاعدة انطلاق في تجسيد طموحا هذا البرنامج مع تلاميذه.

لقد تم تقسيم هذه الأنشطة إلى أربعة عناوين رئيسة هي:

I- حساب الاحتمالات

II- قوانين الاحتمالات المتقطعة

III- التلاؤم مع قانون احتمال متقطع

IV- أمثلة في الاحتمالات المستمرة

I- حساب الاحتمالات

نشاط1:

يهدف هذا النشاط إلى استعمال قوانين التحليل التوفيقي و/أو شجرة الاحتمالات لحل مسائل في الاحتمالات

يحتوي وعاء على ثلاث كرات حمراء وأربع كرات خضراء، نسحب من هذا الوعاء كرتين على التوالي.

1) احسب، في كل من لحالتين الآتيتين، احتمال تحقق كل من الحدثين A و B حيث:

A : " الحصول على اللونين معا "

B : " الحصول على لون واحد "

الحالة الأولى: نعيد الكرة المسحوبة أولا إلى الوعاء قبل أن نسحب الثانية.

الحالة الثانية: لا نعيد الكرة المسحوبة أولا إلى الوعاء.

2) استعمل شجرة الاحتمالات لنمذجة كل من الوضعيتين السابقتين ولحساب احتمال تحقق كل من الحدثين A و B في كل حالة من الحالتين السابقتين.

3) نسحب في هذه المرّة ثلاث كرات على التوالي أجب عن السؤالين 1) و 2) السابقين.

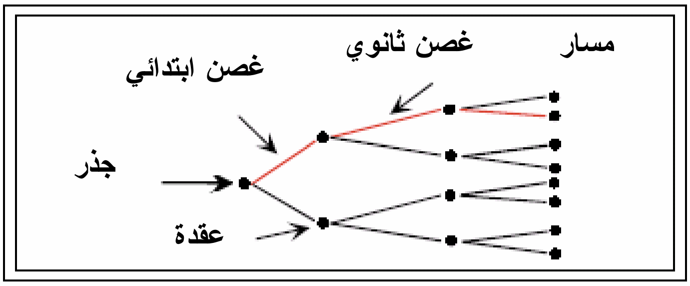
حل للنشاط 1 وتعليق :

1) للإجابة عن السؤال الأوّل نستعمل المفهوم البسيط للاحتمال وهو عدد الحالات المناسبة على عدد الحالات الممكنة ونوظف لأجل ذلك قوانين التحليل التوفيقي في الحالة الأولى نعمل بمفهوم القوائم وفي الحلة الثانية نعمل بمفهوم الترتيبات.

2) استعمال شجرة الاحتمالات تمكن التلميذ من التعامل مع مفهوم الحوادث المستقلة والحوادث المرتبطة بطريقة طبيعية ومتوافقة مع معارفه السابقة باعتبارها أداة حساب مألوفة عنده.

وصف لشجرة الاحتمالات

- تُنشأ شجرة الاحتمالات وتقرأ من اليسار إلى اليمين.
- يسمى مبدأ الشجرة **جذر** الشجرة.
- تسمى نقطة الوصل بين غصنين **عقدة**.
- تسمى الخطوط التي تنطلق من الجذر وتصل إلى العقد، **أغصان ابتدائية** للشجرة.
- تسمى الأغصان الواصلة بين عقدتين **أغصان ثانوية**.
- يسمى الطريق الواصل بين الجذر وعقدة ما **مسارا**.
- كل مسار يعبر عن حادثة.



قواعد الحساب بشجرة الاحتمالات

1. **وزن** غصن ابتدائي هو **احتمال** تحقق الحادثة الموجودة في طرف هذا الغصن أي الموجودة في العقدة.
2. **وزن غصن** ثانوي هو **الاحتمال الشرطي** للحادثة المتواجدة في طرف هذا الغصن علما أن المسار الذي يصل إلى مبدئه قد تحقق.
3. وزن (أو احتمال) مسار يساوي **جداء** أوزان (احتمالات) الأغصان التي تشكل هذا المسار.
4. احتمال حادثة مرفقة بعدة مسارات كاملة يساوي **مجموع** احتمالات هذه المسارات.

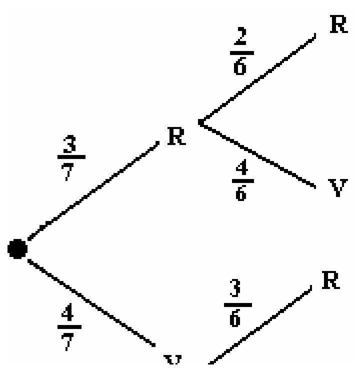
خواص لشجرة الاحتمالات:

1. مجموع أوزان الأغصان الابتدائية يساوي 1.
2. مجموع أوزان الأغصان الثانوية النابعة من نفس العقدة يساوي 1.

ملاحظة: نكتفي في الإجابة عن السؤال الثاني من هذا النشاط بمعالجة الحالة الثانية على اعتبار أنّ الحالة الأولى تعالج بكيفية مشابهة.

الحالة الثانية: لا نعيد الكرة المسحوبة أولا إلى الوعاء.

- عند نمذجة الوضعية المطروحة في هذا النشاط نجد شجرة الاحتمالات كما



هي مبيّنة في المخطط المقابل، حيث
يشير الحرف R إلى كرة حمراء
ويشير الحرف V إلى كرة خضراء.

حساب احتمال الحادثة A:

نعلم أنّ الحادثة A هي : " الحصول على اللونين معا " أي كرة حمراء وأخرى خضراء بغض النظر عن اللون الذي يظهر أوّلا.

- من الواضح أن الحادثة A تتكوّن من مسارين يمكن أن نرمز لهما بالرمزين $(R;V)$ و $(V;R)$.
- حسب القاعدة 3 أعلاه من قواعد الحساب بشجرة الاحتمالات فإنّ احتمال تحقق المسار $(R;V)$ هو $\frac{4}{6}\times\frac{3}{7}$ و احتمال تحقق المسار $(V;R)$ هو $\frac{3}{6}\times\frac{4}{7}$.
- إذا رمزنا بالرمز $p(A)$ إلى احتمال تحقق الحادثة A فإنّ: $p(A)=\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}+\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{24}{42}$ و هذا حسب القاعدة الرابعة من قواعد الحساب بشجرة الاحتمالات.
- العدد $\frac{3}{7}$ مثلا هو احتمال الحصول على كرة حمراء في السحب الأوّل بينما العدد $\frac{4}{6}$ فهو احتمال شرطي و هو بالضبط احتمال الحصول على كرة خضراء في السحب الثاني علما أنّ السحب الأوّل أعطى كرة حمراء.

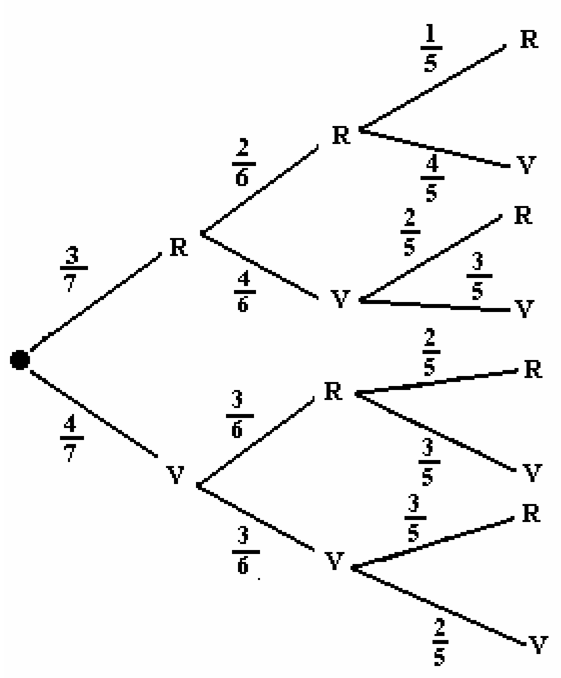
حساب احتمال الحادثة B :

نعلم أنّ الحادثة B هي : " الحصول على لون واحد " أي كرتين من لون أحمر أو كرتين من لون أخضر.

- من الواضح أن الحادثة B تتكوّن من مسارين يمكن أن نرمز لهما بالرمزين $(R;R)$ و $(V;V)$.
- حسب القاعدة 3 أعلاه من قواعد الحساب بشجرة الاحتمالات فإنّ احتمال تحقق المسار $(R;R)$ هو $\frac{2}{6}\times\frac{3}{7}$ و احتمال تحقق المسار $(V;V)$ هو $\frac{3}{6}\times\frac{4}{7}$.
- إذا رمزنا بالرمز $p(B)$ إلى احتمال تحقق الحادثة B فإنّ: $p(B)=\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}+\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{18}{42}$ و هذا حسب القاعدة الرابعة من قواعد الحساب بشجرة الاحتمالات.
- العدد $\frac{3}{7}$ مثلا هو احتمال الحصول على كرة حمراء في السحب الأوّل بينما العدد $\frac{2}{6}$ فهو احتمال شرطي و هو بالضبط احتمال الحصول على كرة حمراء في السحب الثاني علما أنّ السحب الأوّل أعطى كرة حمراء.
- العدد $\frac{4}{7}$ مثلا هو احتمال الحصول على كرة خضراء في السحب الأوّل بينما العدد $\frac{3}{6}$ فهو احتمال شرطي و هو بالضبط احتمال الحصول على كرة خضراء في السحب الثاني علما أنّ السحب الأوّل أعطى كرة خضراء.

3) نسحب في هذه المرّة ثلاث كرات على التوالي أجب عن السؤالين 1) و 2) السابقين.
جواب للسؤال 1) نفس الإجابة السابقة.
جواب السؤال 2) أي استعمال شجرة الاحتمالات.
نكتفي هنا أيضا بالتعامل مع الحالة الثانية التي يتم فيها السحب على التوالي دون الإعادة قبل السحب الموالي.

ننمذج الوضعية باستعمال هذه الشجرة فنجدا حسب المخطط أدناه:



نلاحظ هنا أنّ خواص شجرة الاحتمالات متوفرة في هذا المخطط، حيث نجد:

- مجموع أوزان الأغصان الابتدائية هو: $\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=1$.

مجموع أوزان الأغصان الثانوية النابعة من نفس العقدة يساوي 1.

مثلا: $\frac{2}{6}+\frac{4}{6}=1$ أو $\frac{3}{6}+\frac{3}{6}=1$ أو $\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=1$ أو $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=1$.

<u>حساب احتمال الحادثة A:</u>

نعلم أنّ الحادثة A هي : " الحصول على اللونين معا " أي كرة حمراء وكرتين خضراوين أو كرتين حمراوين وكرة خضراء. بغض النظر عن اللون الذي يظهر أوّلا.

- من الواضح أن الحادثة A تتكوّن من 6 مسارات نرمز لهما بالرموز $(R;R;V)$ ، $(R;V;R)$، $(R;V;V)$ ، $(V;R;R)$، $(V;R;V)$ ، $(V;V;R)$.
- حسب القاعدة 3 أعلاه من قواعد الحساب بشجرة الاحتمالات فإنّ احتمال تحقق كل مسار هو حسب الجدول الآتي :

المسار	$(R;R;V)$	$(R;V;R)$	$(R;V;V)$	$(V;R;R)$	$(V;R;V)$	$(V;V;R)$
احتمال تحقق المسار	$\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}$	$\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}$	$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}$	$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}$	$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}$

- إذا رمزنا بالرمز $p(A)$ إلى احتمال تحقق الحادثة A فإنّ:

$$p(A)=\left(\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\right)=\frac{180}{210}$$

وهذا حسب القاعدة الرابعة من قواعد الحساب بشجرة الاحتمالات.

- العدد $\frac{3}{7}$ مثلا هو احتمال الحصول على كرة حمراء في السحب الأوّل بينما العدد $\frac{2}{6}$ فهو احتمال الحصول على كرة حمراء في السحب الثاني علما أنّ السحب الأوّل أعطى كرة حمراء والعدد $\frac{4}{5}$ هو احتمال الحصول على كرة خضراء في السحب الثالث علما أنّ السحبين الأوّل والثاني أعطيا كرتين حمراوين. من الواضح هنا أنّ العددين $\frac{2}{6}$ و $\frac{4}{5}$ هما احتمالين شرطيين.

حساب احتمال الحادثة $\boldsymbol{B}$:

نعلم أنّ الحادثة $\boldsymbol{B}$ هي : " الحصول على لون واحد " أي ثلاث كرات حمراء أو 3 كرات خضراء. من الواضح أن الحادثة $\boldsymbol{B}$ تتكوّن من مسارين هما $(R;R;R)$ ، $(V;V;V)$.

- حسب القاعدة 3 أعلاه من قواعد الحساب بشجرة الاحتمالات فإنّ احتمال تحقق كل مسار هو حسب الجدول الآتي :

المسار	$(R;R;R)$	$(V;V;V)$
احتمال تحقق المسار	$\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}$	$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}$

- إذا رمزنا بالرمز $p(B)$ إلى احتمال تحقق الحادثة $\boldsymbol{B}$ فإنّ:

$$p(B)=\left(\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\right)=\frac{30}{210}$$

وهذا حسب القاعدة الرابعة من قواعد الحساب بشجرة الاحتمالات.

ملاحظة : يمكن اعتبار الحادثة $\boldsymbol{B}$ هي الحادثة النافية للحادثة $\boldsymbol{A}$ وبالتالي:

$$P(B)=P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{180}{210}=\frac{30}{210}$$ و.هـ.م

II- قوانين الاحتمالات المتقطعة

1- قانون برنولي (Bernoulli)

تعريف:

- نسمي تجربة برنولي ذات الوسيط p ($p\in]0;1[$) كل تجربة لها مخرجين فقط، هما نجاح أو فشل مع احتمال النجاح هو p واحتمال الفشل هو $1-p$.
- نرفق بتجربة برنولي ذات الوسيط p المتغير العشوائي X الذي يأخذ القيمة 0 إذا كانت النتيجة فشل والقيمة 1 إذا كانت النتيجة نجاح.

يسمى X متغير عشوائي لبرنولي ذو وسيط p. ويسمى قانون احتماله P_X قانون برنولي ذو وسيط p وهو معرف كما يلي: $P_X(1)=p$ و $P_X(0)=1-p$.

2- الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي لبرنولي.

خاصية:

ليكن X متغير برنولي ذو الوسيط p. وليكن $E(X)$ و $V(X)$ الأمل الرياضي والتباين على الترتيب للمتغير X لدينا إذن: $E(X)=p$ و $V(X)=p(1-p)$.

الانحراف المعياري σ يعرف بأنه الجذر التربيعي للتباين أي $\sigma=\sqrt{V}$.

3- القانون الثنائي (Loi binomiale)

خاصية:

نكرر تجربة برنولي ذات الوسيط p، n مرّة حيث $(n \geq 1)$ في نفس الظروف المستقلة عن بعضها.
يعرّف قانون الاحتمال P_X للمتغير العشوائي X الذي يحصي عدد النجاحات خلال n تجربة كما يلي: $P_X(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ من أجل $k \in \{0,...,n\}$.

4- الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري لمتغير عشوائي يتبع القانون الثنائي.

خاصية:

ليكن X متغير عشوائي يتبع القانون الثنائي ذو الوسيطين n و p. وليكن $E(X)$ و $V(X)$ الأمل الرياضي والتباين على الترتيب للمتغير X لدينا إذن: $E(X)=np$ و $V(X)=np(1-p)$.

يعرف الانحراف المعياري σ بأنّه الجذر التربيعي للتباين أي $\sigma=\sqrt{V}$.

نشاط 2:

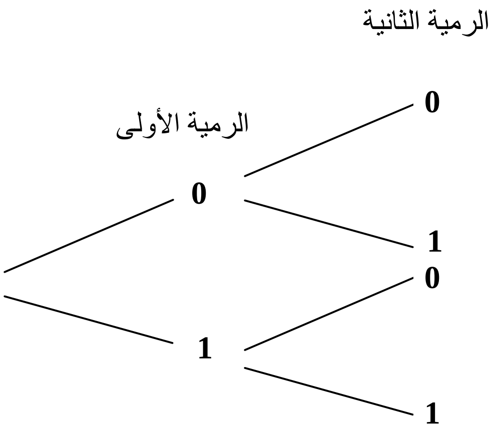
يهدف هذا النشاط إلى نمذجة وضعية باستعمال المتغير العشوائي وإلى معالجة تجربة برنولي *(Bernoulli)* والقانون الثنائي *(Loi binomiale)*

يقوم لاعب بإلقاء حجر نرد بحيث يعتبر رابحا إذا تحصل على الرقم 5.

1) ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ القيمة 1 إذا كانت نتيجة الرمية هي الرقم 5 ويأخذ الرقم 0 إذا كانت نتيجة الرمية غير ذلك.عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

2) في هذه المرحلة يلقي اللعب حجر النرد أربع مرات متتالية في نفس الشروط.
ليكن Y المتغير العشوائي الذي يحصي عدد المرات التي يربح فيها هذا اللعب.
أ- ما هي القيم التي يمكن لـِ Y أن يأخذها؟

ب-نمثل المخارج الممكنة لهذه التجربة بالمخطط الآتي:



أتمم تمثيل هذه الشجرة وأعط عند نهاية كل فرع منها القيمة التي يأخذها Y.

ت-عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي Y.

حل للنشاط 2 مع بعض التعاليق:

1) تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

لدينا X المتغير العشوائي الذي يأخذ القيمة 1 إذا كانت نتيجة الرمية هي الرقم 5 ويأخذ الرقم 0 إذا كانت نتيجة الرمية غير ذلك.

بما أنّ لهذه التجربة مخرجين هما :

- الحادثة ***A*** " ظهور الوجه الذي يحمل الرقم 5 "
- الحادثة ***B*** " ظهور وجه يحمل أحد الأرقام 6،1،2،3،4 "

نعلم أنّ احتمال تحقق الحادثة ***A*** هو $P(A)=\frac{1}{6}$ واحتمال تحقق الحادثة ***B***

هو $P(B)=1-P(A)=\frac{5}{6}$

إذن هذه التجربة هي تجربة برنولي ذات الوسيط P حيث $P=\frac{1}{6}$ ومنه ينتج قانون الاحتمال

للمتغير العشوائي X كما يلي: $P_X(1)=\frac{1}{6}$ و $P_X(0)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

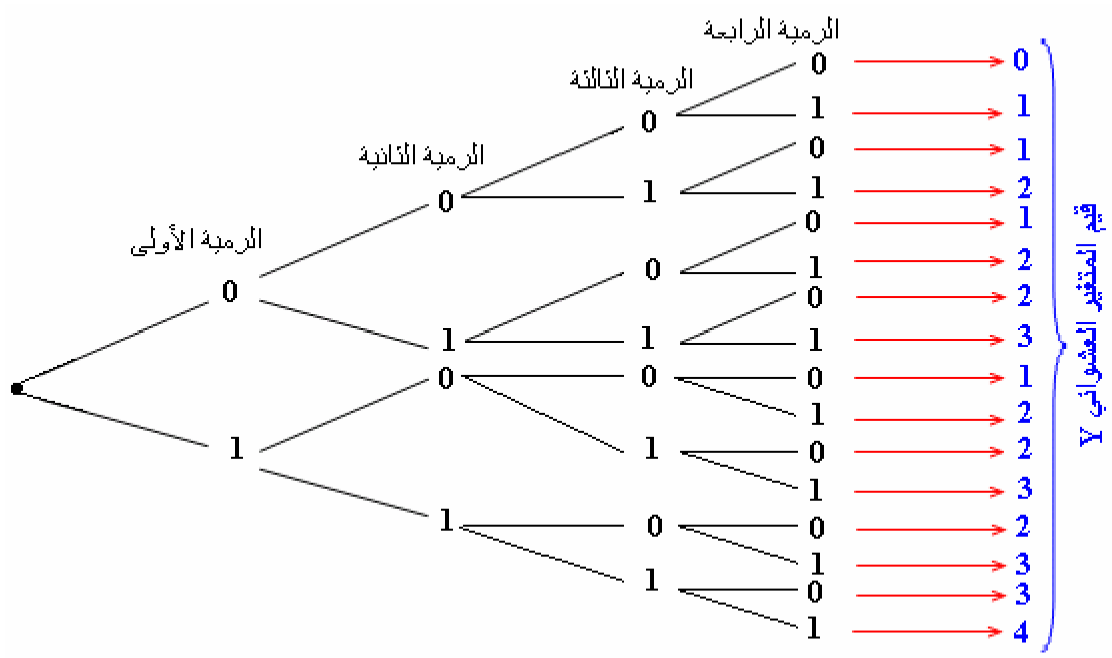
2) يلقي اللعب حجر النرد أربع مرات متتالية في نفس الشروط.

لدينا Y المتغير العشوائي الذي يحصي عدد المرات التي يربح فيها هذا اللعب.

أ- تعيين القيم التي يمكن أن يأخذها Y ؟

القيم الممكنة لـِ Y هي 0،1،2،3،4

ب-نتمم تمثيل الشجرة ونعطي عند نهاية كل فرع منها القيمة التي يأخذها Y.



ت-تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي Y.

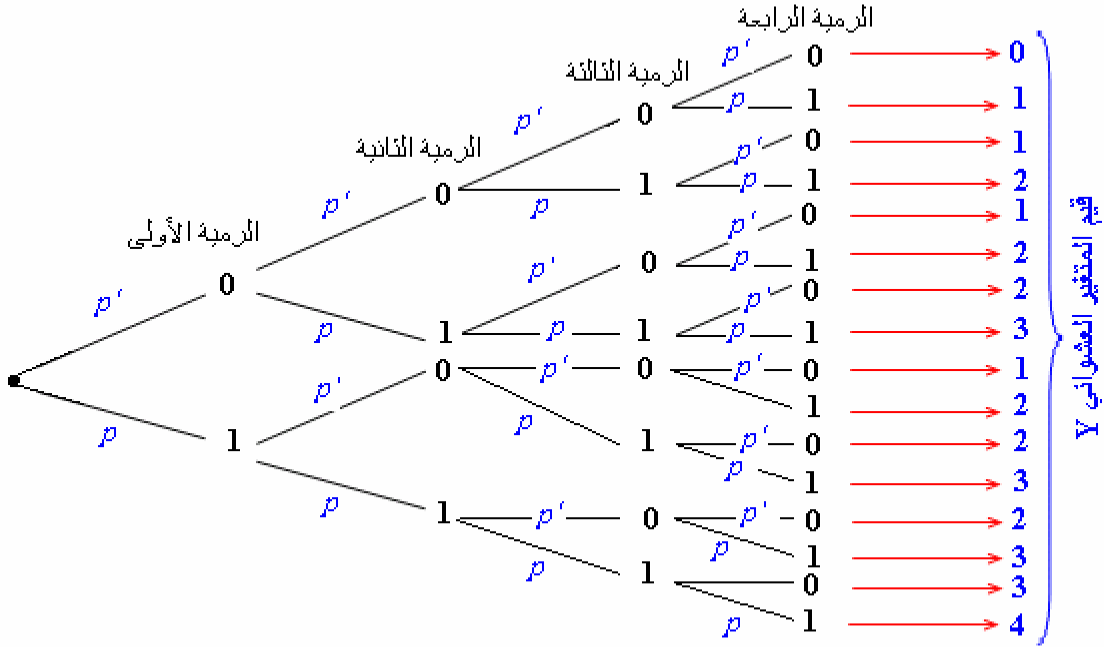
- لدينا وزن الغصن الابتدائي الذي ينتهي بالقيمة 1 هو احتمال النجاح في الرمية الأولى وهو :

$$P = P_X\ (1) = \frac{1}{6}$$

- وزن الغصن الابتدائي الذي ينتهي بالقيمة 0 هو احتمال الفشل في الرمية الأولى وهو :

$$P = P_X\ (1) = \frac{1}{6}\ P' = P_X\ (0) = \frac{5}{6}$$

- وزن الغصن الثانوي الذي ينتهي بالقيمة 1 هو احتمال النجاح في الرمية الثانية أو الثالثة أو الرابعة وهو $P = \frac{1}{6}$
- وزن الغصن الثانوي الذي ينتهي بالقيمة 0 هو احتمال الفشل في الرمية الثانية أو الثالثة أو الرابعة وهو $P' = \frac{5}{6}$



حساب $P_Y(0)$: يأخذ المتغير Y القيمة 0 عندما نسجل الفشل في 4 رميات (أي لا نسجل أي نجاح) حيث نلاحظ أنّ هذه الحالة تظهر مرّة واحدة في الشجرة أعلاه ومنه ينتج:

$$P_Y(0) = p^0 (p')^4 = \left(\frac{1}{6}\right)^0 \times \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} \simeq 0,4822$$

حساب $P_Y(1)$: يأخذ المتغير Y القيمة 1 من أجل نجاح واحد في رمية واحدة والفشل في ثلاث رميات حيث نلاحظ أنّ هذه الحالة تتكرر 4 مرّات في الشجرة أعلاه ومنه ينتج:

$$P_Y(1) = 4 \times p (p')^3 = 4 \times \left(\frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 4 \times \frac{125}{1296} \simeq 0,3858$$

حساب $P_Y(2)$: يأخذ المتغير Y القيمة 2 من أجل نجاحين في رميتين وفشلين في رميتين حيث نلاحظ أنّ هذه الحالة تتكرر 6 مرّات في الشجرة أعلاه ومنه ينتج:

$$P_Y(2) = 6 \times p^2 (p')^2 = 4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 6 \times \frac{1 \times 25}{1296} \simeq 0,1157$$

حساب $P_Y(3)$: يأخذ المتغير Y القيمة 3 من أجل 3 نجاحات في ثلاث رميات وفشل في رمية واحدة حيث نلاحظ أنّ هذه الحالة تتكرر 4 مرّات في الشجرة أعلاه ومنه ينتج:

$$P_Y(3) = 4 \times p^3 (p') = 4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right) = 4 \times \frac{5}{1296} \simeq 0,0154$$

حساب $P_Y(4)$: يأخذ المتغير Y القيمة 4 من أجل 4 نجاحات ودون أي فشل حيث نلاحظ أنّ هذه الحالة تظهر مرّة واحدة في الشجرة أعلاه ومنه ينتج:

$$P_Y(1) = 4 \times p^4 (p')^0 = 4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 4 \times \frac{1}{1296} \simeq 0,0007$$

لاحظ أنّ : $P_Y(0) + P_Y(1) + P_Y(2) + P_Y(3) + P_Y(4) = 1$

طريقة أخرى لتعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي Y.

بما أننا نكرر التجربة ذات المخرجين 4 مرات في نفس الشروط فهذا يعني أننا نكرر تجربة برنولي ذات الوسيط $P=\frac{1}{6}$، 4 مرات مما يسمح لنا بتطبيق القانون الثنائي الذي يعطينا قانون الاحتمال P_Y كما يلي:

$$P_Y(k)=\binom{4}{k}p^k(1-p)^{4-k}=\binom{4}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$$

ومنه بالتعويض نجد :

$$P_Y(0)=\binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{4-0}=\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{625}{1296};\ 0,4822$$

$$P_Y(1)=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{4-1}=4\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3=4\times\frac{125}{1296};\ 0,3858$$

$$P_Y(2)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{4-2}=6\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2=6\times\frac{25}{1296};\ 0,1157$$

$$P_Y(3)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{4-3}=4\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1=4\times\frac{5}{1296};\ 0,0154$$

$$P_Y(4)=\binom{4}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^{4-4}=\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{1296};\ 0,0007$$

نشاط 3:

يهدف هذا النشاط إلى استعمال شجرة الاحتمالات في حل مسائل تتعلق بتجربة برنولي والقانون الثنائي

يقوم لاعب برمي قطعة نقدية متوازنة 10 مرّات متتالية بحيث يتحصل على 5 دنانير عن كل رمية يظهر فيها وجه القطعة.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يحصي عدد المرات التي يظهر فيها الوجه.

1) احسب احتمال أن يتحصل اللاعب على 5 دنانير.
2) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .
3) احسب احتمال أن يتحصل اللاعب على 10 دنانير.
4) احسب احتمال أن يتحصل اللاعب على 40 دينارا.
5) مثل بمخطط بالأعمدة قانون احتمال المتغير العشوائي X .

حل للنشاط 3 مع بعض التعاليق:

1) حساب احتمال أن يتحصل اللاعب على 5 دنانير.

- بما أن القطعة النقدية متوازنة فإنّ احتمال أن يتحصل اللاعب على 5 دنانير هو احتمال ظهور وجه هذه القطعة مرّة واحدة فقط (9 رميات يظهر فيها ظهر القطعة) في خلال 10 رميات.

- قد يكون ظهور الوجه في الرمية الأولى أو الثانية أو الثالثة و هكذا إلى غاية الرمية العاشرة ومنه نلاحظ في شجرة الاحتمالات لهذه التجربة أن الحادثة " ظهور الوجه مرّة واحدة " تتكوّن من 10 مسارات مختلفة كل مسار يتكوّن من غصن ابتدائي و9 أغصان ثانوية.
- كل مسار يتكوّن من غصن ابتدائي و9 أغصان ثانوية، وحيث أنّ وزن كل غصن الابتدائي هو $0,5$ ووزن كل غصن ثانوي هو أيضا $0,5$ فإنّ وزن (احتمال) المسار الواحد هو $0,5\times(0,5)^9$.

و هذا حسب قواعد الحساب باستعمال الشجرة حيث تنص إحدى القواعد على أنّ:

وزن (أو احتمال) مسار يساوي جداء (احتمالات) أوزان الأغصان التي تشكل هذا المسار.

- الاحتمال المطلوب هو **مجموع** احتمالات المسارات العشرة أي:

$$10\times\left(0,5\times(0,5)^9\right)=10\times(0,5)^{10}\ ;\ 0,00097$$

و هذا حسب قواعد الحساب باستعمال الشجرة حيث تنص إحدى القواعد على أنّ:

احتمال حادثة مرفقة بعدة مسارات كاملة يساوي مجموع احتمالات هذه المسارات.

2) تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X .

- بما أن لرمي القطعة النقدية مخرجين فقط هما الوجه أو الظهر، فإننا أمام تجربة برنولي ذات الوسيط p حيث $p=0,5$.

وبتطبيق القانون الثنائي نجد أنّ : $P_X(k)=\binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}$ ومنه

$$P_X(k)=\binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

و هو قانون الاحتمال للمتغير العشوائي Y.

3) حساب احتمال أن يتحصل اللاعب على 10 دنانير.

- بما أن القطعة النقدية متوازنة فإنّ احتمال أن يتحصل اللاعب على 10 دنانير هو احتمال ظهور وجه هذه القطعة مرّتين فقط (8 رميات يظهر فيها ظهر القطعة) في خلال 10 رميات. يكفي إذن التعويض عن k بالعدد 2 لنجد الاحتمال المطلوب و هو $P_X(2)$ حيث

$$P_X(2)=\binom{10}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

منه $P_X(2)=45\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{45}{1024}\ ;\ 0,0439$.

4) حساب احتمال أن يتحصل اللاعب على 40 دينارا.

- بما أن القطعة النقدية متوازنة فإنّ احتمال أن يتحصل اللاعب على 40 دنانير هو احتمال ظهور وجه هذه القطعة 8 مرّات (رميتان يظهر فيهما ظهر القطعة) في خلال 10 رميات.

يكفي إذن التعويض عن k بالعدد 8 لنجد الاحتمال المطلوب وهو $P_X\ (8)$ حيث

$P_X\ (8)=\binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ ومنه $0{,}0439$; $P_X\ (8)=45\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{45}{1024}$.

5) نمثل بمخطط بالأعمدة قانون احتمال المتغير العشوائي X .

لأجل ذلك نحتاج إلى حساب قانون الاحتمال.

$P_X\ (0)=\binom{10}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{1024}$ ، $P_X\ (1)=\binom{10}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{10}{1024}$ ، $P_X\ (2)=\binom{10}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{45}{1024}$

$P_X\ (3)=\binom{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{120}{1024}$ ، $P_X\ (4)=\binom{10}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{210}{1024}$ ، $P_X\ (5)=\binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{252}{1024}$

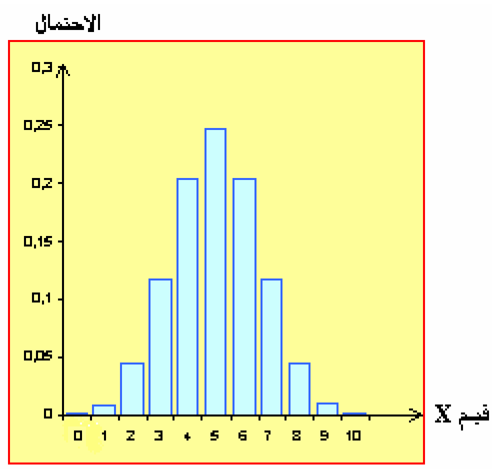
$P_X\ (6)=\binom{10}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{210}{1024}$ ، $P_X\ (7)=\binom{10}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{120}{1024}$ ، $P_X\ (8)=\binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{45}{1024}$ ،

$P_X\ (9)=\binom{10}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{10}{1024}$ ، $P_X\ (10)=\binom{10}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{1024}$.

نلخص النتائج في الجدول أدناه:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_X\ (k)$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

ومنه نجد المخطط بالأعمدة المقابل.



نشاط 4 :

يهدف هذا النشاط إلى نمذجة وضعية من الحياة اليومية باستعمال مفاهيم في الاحتمالات خصوصا مفهوم المتغير العشوائي والقانون الثنائي

لاحظ مسير مكتبة أنّ من بين كل 4 زوار لها واحد منهم يقتني كتابا علميا. دخل المكتبة 12 زائرا. عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي الذي يعطي النسبة المئوية للزوار الذين سيقتنون كتابا علميا.

حل للنشاط 4:

- يمكن ربط زيارة كل شخص للمكتبة بتجربة برنولي (فهو إما يقتني كتابا علميا و هذا يمثل مخرج النجاح في هذه التجربة وإما لا يقتني كتابا علميا و هذا يمثل مخرج الفشل في التجربة).
- بما أنّه لوحظ من بين 4 زوار واحد منهم يقتني كتابا علميا، فإنّ وسيط تجربة برنولي هو p حيث $p = 0,25$ أي احتمال النجاح هو $0,25$ بينما يمثل احتمال الفشل فيها (عدم اقتناء كتاب علمي) هو $1-p$ أي $0,75$.
- بما أنّ عدد الزوار وصل إلى 12 فإنّه يمكن ربط ذلك بتكرار تجربة برنولي ذات الوسيط p 12 مرّة في نفس الشروط المستقلة.
- نعتبر X المتغير العشوائي الذي يحصي عدد الزوار، من بين 12 زائرا، الذين سيقتنون كتابا علميا. إذن المتغير العشوائي X يتبع القانون الثنائي ذو الوسيطين **12** و **0,25** .

ومنه حسب هذا القانون ينتج: $P_X(k) = \binom{12}{k} p^k (1-p)^{12-k}$ مع $k \in \{0,...,12\}$.

ومنه $P_X(k) = \binom{12}{k} (0,25)^k (0,75)^{12-k}$ مع $k \in \{0,...,12\}$.

نعوض قيم k في القانون أعلاه فنتحصل على النتائج التي نلخصها بعد الحساب في الجدول الآتي:

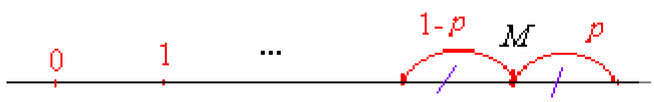
k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
$P_X(k)$	$(0,75)^{12}$	$12(0,25)^1(0,75)^{11}$	$66(0,25)^2(0,75)^{10}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	$(0,25)^{12}$

نشاط 5 :

يهدف هذا النشاط إلى نمذجة تجربة بواسطة متغير ثنائي

تتحرك نقطة M على محور انطلاقا من مبدئه O بحيث تقفز نحو اليمين أو نحو اليسار بوحدة واحدة (أي تقفز من المبدأ O نحو النقطة ذات الفاصلة 1 أو نحو النقطة ذات الفاصلة (-1) و هكذا، فإذا قفزت مرّتين متتاليتين نحو اليمين انطلاقا من المبدأ O صارت في النقطة ذات الفاصلة 2).

احتمال أن تقفز هذه النقطة نحو اليمين هو p $(0 < p < 1)$ واحتمال أن تقفز نحو اليسار هو $1-p$. نفرض أنّ كل قفزة مستقلة عن الأخرى وأنّ M تقفز n مرّة.



1. عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X الذي يحصي عدد القفزات نحو اليمين من بين n قفزة
2. احسب متوسط عدد القفزات نحو اليمين المنجزة من قبل النقطة M .
3. احسب احتمال أن تعود النقطة M إلى المبدأ O بعد القفزة الأخيرة أي القفزة ذات الرتبة n .

حل للنشاط 5:

1. تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X الذي يحصي عدد القفزات نحو اليمين من بين n قفزة.

- كل قفزة للنقطة M تمثل تجربة برنولي مخرجيها هما "القفز نحو اليمين" و "القفز نحو اليسار". نرفق بهذه التجربة المتغير العشوائي لبرنولي الذي يأخذ القيمة 1 حينما تقفز النقطة M بوحدة واحدة نحو اليمين ويأخذ القيمة 0 حينما تقفز هذه النقطة بوحدة واحدة نحو اليسار. نرمز بالرمز p إلى وسيط هذه التجربة.

ينتج مما سبق أنّ المتغير العشوائي X الذي يحصي عدد القفزات نحو اليمين من بين n قفزة يتبع القانون الثنائي ذو الوسيطين n و p. أي $P_X(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ من أجل $k\in\{0,\dots,n\}$.

2. حساب متوسط عدد القفزات نحو اليمين المنجزة من قبل النقطة M.

- متوسط عدد القفزات نحو اليمين المنجزة من قبل النقطة M هو الأمل الرياضي $E(X)$.

بالحساب نجد: $E(X)=np$.

3. حساب احتمال أن تعود النقطة M إلى المبدأ O بعد القفزة الأخيرة أي القفزة ذات الرتبة n.

- عدد القفزات الكلي هو n وعدد القفزات إلى اليمين هو X. منه عدد القفزات إلى اليسار هو $(n-X)$.

منه نعرف المتغير العشوائي Y الذي يعطي فاصلة النقطة M بعد قفزة n كما يلي:

$Y=X-(n-X)$ أي $Y=2X-n$.

- ينتج مما سبق: $Y=0$ إذا وفقط إذا كان $X=\frac{n}{2}$.

يكون الاحتمال المطلوب هو $P_Y(0)$

ومنه $P_Y(0)=P_X\left(\frac{n}{2}\right)=\binom{n}{\frac{n}{2}}p^{\frac{n}{2}}(1-p)^{n-\frac{n}{2}}$ من أجل n زوجي.

و $P_Y(0)=P_X\left(\frac{n}{2}\right)=0$ من أجل n فردي.

نشاط 6 :

يهدف هذا النشاط إلى توظيف القانون الثنائي في حل مشكلات في الاحتمالات المتقطعة

يحتوي وعاء على 15 كرية بيضاء و10 كرايات حمراء نسحب منه في آن واحد كريتين.

ونكرر ذلك 4 مرات بحيث نعيد الكريتين المسحوبتين عند نهاية كل سحب.

احسب احتمال الحصول، في نهاية السحبات الأربعة، على :

1. كريتين حمراوين مرّتين.
2. كرية حمراء و أخرى بيضاء مرّتين.
3. كريتين من نفس اللون مرّة واحدة.
4. كريتين من لونين مختلفين 3مرّات.

حل للنشاط 6:

1. حساب احتمال الحصول على كريتين حمراوين مرّتين.

- عندما نسحب مرة واحدة كريتين من الوعاء يكون احتمال الحصول على كرتين حمراوين هو p حيث $p=\frac{\binom{10}{2}}{\binom{25}{2}}=\frac{45}{300}=\frac{3}{20}=0{,}15$
- نرمز بالرمز X إلى المتغير العشوائي الذي يحصي عدد المرات التي نتحصل فيها على كريتين حمراوين . بما أننا نكرر تجربة السحب 4 مرات في نفس الشروط المستقلة فإنّ القيم الممكنة للمتغير X هي $\{0,1,2,3,4\}$.

من الواضح أن المتغير X يتبع القانون الثنائي ذو الوسيطين 4 و p.

ومنه الاحتمال المطلوب هو $P_X\ (2)$ حيث $P_X\ (2)=\binom{4}{2}p^2\,(1-p)^2$

ومنه $P_X\ (2)=6\,(0{,}15)^2\,(0{,}85)^2\ =6\times225\times7225\times10^{-8}$

أي $P_X\ (2)=9753750\times10^{-8}\ =0,09753750$.

2. حساب احتمال الحصول على كرية حمراء و أخرى بيضاء مرّتين.

- عندما نسحب مرة واحدة كريتين من الوعاء يكون احتمال الحصول على كرية حمراء و أخرى بيضاء هو p' حيث $p'=\frac{\binom{10}{1}\times\binom{15}{1}}{\binom{25}{2}}=\frac{150}{300}=\frac{1}{2}=0{,}5$
- نرمز بالرمز Y إلى المتغير العشوائي الذي يحصي عدد المرات التي نتحصل فيها على كرية حمراء و أخرى بيضاء . بما أننا نكرر تجربة السحب 4 مرات في نفس الشروط المستقلة فإنّ القيم الممكنة للمتغير Y هي $\{0,1,2,3,4\}$.

من الواضح أن المتغير Y يتبع القانون الثنائي ذو الوسيطين 4 و p'.

ومنه الاحتمال المطلوب هو $P_Y\ (2)$ حيث $P'_Y\ (2)=\binom{4}{2}p'^2\,(1-p')^2$

ومنه $P'_Y\ (2)=6\,(0{,}5)^2\,(0{,}5)^2\ =6\times625\times10^{-4}$ أي $P'_Y\ (2)=0,375$.

3. حساب احتمال الحصول على كريتين من نفس اللون مرّة واحدة.

- عندما نسحب مرة واحدة كريتين من الوعاء يكون احتمال الحصول على كرية حمراء و أخرى بيضاء هو p'' حيث $p''=\frac{\binom{10}{2}+\binom{15}{2}}{\binom{25}{2}}=\frac{150}{300}=\frac{1}{2}=0,5$
- نرمز بالرمز Z إلى المتغير العشوائي الذي يحصي عدد المرات التي نتحصل فيها على كرية حمراء و أخرى بيضاء . بما أننا نكرر تجربة السحب 4 مرات في نفس الشروط المستقلة فإنّ القيم الممكنة للمتغير Z هي $\{0,1,2,3,4\}$.

من الواضح أن المتغير Z يتبع القانون الثنائي ذو الوسيطين 4 و p''.

ومنه الاحتمال المطلوب هو $P_Z\ (1)$ حيث $P_Z\ (1)=\binom{4}{1}p''\ (1-p'')^3$

ومنه $P_Z\ (1)=4\,(0{,}5)^1\,(0{,}5)^3\ =4\times625\times10^{-4}$ أي $P_Z\ (1)=0,25$.

4. حساب احتمال الحصول على كريتين من لونين مختلفين 3 مرّات.

- عندما نسحب مرة واحدة كريتين من الوعاء يكون احتمال الحصول على كريتين من لونين مختلفين (أي كرية حمراء و أخرى بيضاء هو) p''' حيث $p'''=\frac{\binom{10}{1}\times\binom{15}{1}}{\binom{25}{2}}=\frac{150}{300}=\frac{1}{2}=0,5$
- نرمز بالرمز H إلى المتغير العشوائي الذي يحصي عدد المرات التي نتحصل فيها على كرية حمراء و أخرى بيضاء . بما أننا نكرر تجربة السحب 4 مرات في نفس الشروط المستقلة فإنّ القيم الممكنة للمتغير H هي $\{0,1,2,3,4\}$.

من الواضح أن المتغير H يتبع القانون الثنائي ذو الوسيطين 4 و p'''.

ومنه الاحتمال المطلوب هو $P_H\ (3)$ حيث $P_H\ (3)=\binom{4}{3}p'''^3\,(1-p''')^1$

ومنه $P_H\ (3)=4\,(0,5)^3\,(0,5)^1=4\times 625\times 10^{-4}$ أي $P_H\ (1)=0,25$.

نشاط 7 :

يهدف هذا النشاط إلى توظيف القانون الثنائي في حل مشكلات من الواقع

15% من اللوالب التي تنتجها آلة غير دقيقة هي غير صالحة للاستعمال. تم سحب 5 لوالب من منتوج هذه الآلة. بما أنّ الآلة تنتج عددا كبيرا جدا من اللوالب فإنّ سحب اللوالب الخمسة يمكن محاكاته لسحب 5 لوالب على التوالي مع الإعادة قبل السحب الموالي.

احسب احتمال الأحداث الآتية:

1. أن تكون اللوالب الخمسة كلها صالحة للاستعمال.
2. أن يكون لولب واحد فقط غير صالح للاستعمال.
3. أن يكون لولبان على الأكثر غير صالحين للاستعمال.

حل للنشاط 7:

1. احتمال أن تكون اللوالب الخمسة كلها صالحة للاستعمال هو $P_X\ (5)$ حيث يرمز X إلى المتغير العشوائي الذي يحصي عدد المرات التي نتحصل فيها على لولب صالح للاستعمال. ومنه $P_X\ (5)=\binom{5}{5}(0,85)^5\,(0,15)^0$.
2. بنفس الكيفية نجد احتمال أن يكون لولب واحد فقط غير صالح للاستعمال هو:
$P_X\ (4)=\binom{5}{4}(0,85)^4\,(0,15)^1$
3. بنفس الكيفية نجد احتمال أن يكون لولبان على الأكثر غير صالحين للاستعمال هو $P_X\ (X\ \geq 3)$ ومنه $P_X\ (X\ \geq 3)=P_X\ (3)+P_X\ (4)+P_X\ (5)$

III- التلاؤم مع قانون احتمال متقطع

1. قياس التلاؤم بين سلسلة مشاهدة ونموذج احتمالي

لتكن السلسلة الإحصائية $(x_i\ ,\ n_i)_{i=1,\ldots,k}$ ذات المقاس n، و p نموذج احتمالي قابل للتعبير عنها.

لقياس التلاؤم بين النموذج p و هذه السلسلة المُشَاهَدَة، نقارن بين التواترات $\frac{n_i}{n}$ من أجل $i \in \{1,...,k\}$

(التي نرمز لها بالرمز f_i) مع الاحتمالات p_i التي يعطيها النموذج p للقيمة x_i.

تعريف :

المؤشر d^2_{obs} الذي يستعمل لقياس التلاؤم بين سلسلة مشاهَدَة $(x_i\,,\,n_i)_{i=1,...,k}$ ونموذج احتمالي متقطع ومتساوي الاحتمالات حيث $p_i = \frac{1}{k}$ من أجل $i \in \{1,...,k\}$ هو مجموع مربعات المسافة بين التواترات $(f_i)_{i=1,...k}$ والاحتمالات $(p_i)_{i=1,...k}$: $d^2_{obs} = \sum_{i=1}^{i=k}(f_i - p_i)^2$

ملاحظة:

إنّ المؤشر d^2_{obs} لا يصلح لقياس التلاؤم إلاّ إذا كان النموذج الاحتمالي الذي نتعامل معه متقطع و متساوي الاحتمالات.

2. عتبة رفض نموذج احتمالي

يُقْبَلُ النموذج p إذا كانت العدد d^2_{obs} صغير بقدر كاف، أي إذا كان أصغر من أو يساوي عتبة محدّدة و هي عبارة عن عدد يعطى أو يُعيّن، ويرفض النموذج في الحالة المعاكسة.

يتم عادة تعيين العتبة باستعمال المحاكاة كما يلي:

- نحاكي السلسلة الإحصائية المُشَاهدة ذات المقاس n باستعمال النموذج p. نحسب بعد ذلك المؤشر d^2 باستعمال السلسلة الجديدة. ولكن هذه القيمة تتأثر بتذبذب العيّنات أي أنّه لو نقوم بمحاكاة جديدة نجد قيمة أخرى للمؤشر d^2 و هذا يعني أنّ قيم هذا المؤشر تتغير بتغيّر السلسلة. لهذا نقوم عمليا بتكرار المحاكاة عدد " كبير" من المرّات وليكن N ونحسب d^2 من أجل كل سلسلة.
- نتحصل من الخطوات السابقة على سلسلة من القيم d^2 مقاسها N. نلخص هذه الأخيرة بالعُشيريات.
- نختار كعتبة L العُشير التاسع ومنه ينتج:
  - ✖ إذا كان $d^2_{obs} \le L$ فإنّ النموذج p مقبول.
  - ✖ إذا كان $d^2_{obs} > L$ فإنّ النموذج p مرفوض.

ملاحظة : إنّ رفض نموذج احتمالي p وفق القاعدة السابقة يحمل مجازفة بالخطاء. ذلك أنّنا قررنا القبول بهذا النموذج إذا كانت 90 ٪ من قيم d^2 أصغر أو تساوي العدد L و 10 ٪ من قيم d^2 أكبر من L. لهذا نقول عند رفض النموذج أننا رفضناه بمجازفة بالخطاء قدرها 10 ٪.

نشاط 8 :

يهدف هذا النشاط إلى اختبار مدى تلاؤم قانون منتظم ومتقطع مع وضعية من الواقع

صرّح كمال أنّ حجر النرد الذي يستعمله غير مزور، غير أنّ أمين أراد أن يتأكد من ذلك.

1. ما هو قانون الاحتمال P الذي ينمذج تصريح كمال؟

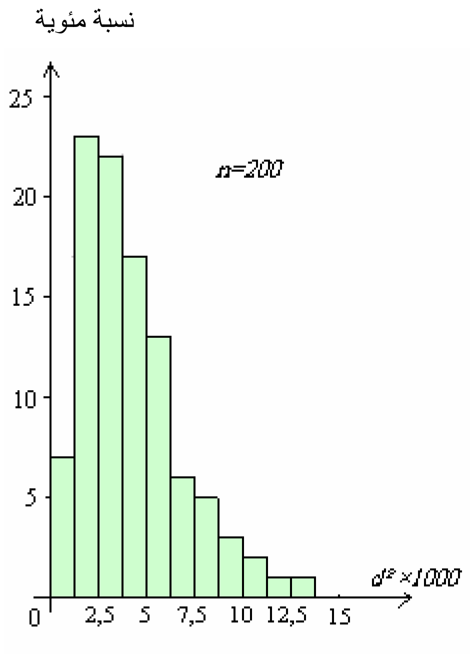
2. اقترح طريقة لمحاكاة سلسلة محصل عليها من قانون الاحتمال P .

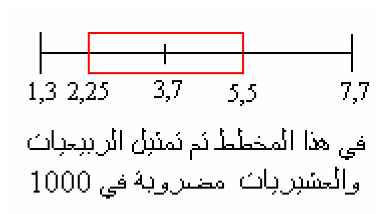
3. ألقى أمين حجر النرد 200 مرّة فتحصل على النتائج الملخصة في الجدول الموالي:

الوجه	1	2	3	4	5	6
التكرار	38	30	30	36	37	29

اقترح مقياسا (نرمز له بالرمز d^2_{obs}) لقياس التلاؤم بين النموذج P والسلسلة المشاهدة. احسب قيمة هذا التلاؤم.

4. تمت محاكاة ما قام به أمين 1000 مرّة. وتم حساب المقياس d^2 في كل مرّة فحصلنا على سلسلة قيم d^2 مقاسها 1000. وتمّ تلخيص هذه السلسلة بواسطة مخطط بالعلبة وبواسطة مدرج تكراري كما هو موضح في الشكلين.





اقترح، بعد قراءتك لهذين التمثيلين، عتبة تسمح لك برفض النموذج P بمجازفة بالخطأ قدرها 10%.

ماذا تستنتج؟

حل للنشاط 8:

1. قانون الاحتمال P الذي يُنمذج تصريح كمال هو ؟

$p(X = x) = \frac{1}{6}$ حيث $x \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

2. اقتراح طريقة لمحاكاة سلسلة محصل عليها من قانون الاحتمال P.

نستعمل الدستور $\boxed{\text{=ENT(ALEA()*6+1)}}$ الذي يعطي عددا عشوائيا بين 1 و 6 .

3. ألقى أمين حجر النرد 200 مرّة فتحصل على النتائج الملخصة في الجدول الموالي:

الوجه	1	2	3	4	5	6
التكرار	38	30	30	36	37	29

نقترح مقياسا (نرمز له بالرمز d^2_{obs}) نقيس به التلاؤم بين النموذج P والسلسلة المشاهدة، ثمّ انحسب قيمة هذا التلاؤم.

نستعمل مجموع مربعات الفرق بين الاحتمالات $p_i=\frac{1}{6}$ مع $i\in\{1,\ldots,6\}$ و التواترات المسجلة من التجربة التي قام بها أمين حينما ألقى حجر النرد 200 مرّة.

أي : $d_{obs}^{\,2}=\sum_{i=1}^{i=6}(f_i-p_i)^2$

لنحسب أوّلا التواترات $(f_i)_{i=1,\ldots6}$

الوجه	1	2	3	4	5	6
التكرار	38	30	30	36	37	29
التواترات f_i	$\frac{38}{200}$	$\frac{30}{200}$	$\frac{30}{200}$	$\frac{36}{200}$	$\frac{37}{200}$	$\frac{29}{200}$

منه:
$$d_{\text{obs}}^{\,2}=\left(\frac{38}{200}-\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{30}{200}-\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{30}{200}-\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{36}{200}-\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{37}{200}-\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{29}{200}-\frac{1}{6}\right)^2$$

وبالحساب المباشر نجد:
$$d_{\text{obs}}^{\,2}\simeq(0{,}19-0{,}166)^2+(0{,}15-0{,}166)^2+(0{,}15-0{,}166)^2+$$
$$(0{,}18-0{,}166)^2+(0{,}185-0{,}166)^2+(0{,}145-0{,}166)^2$$

وبالتالي نجد:
$$d_{\text{obs}}^{\,2}\simeq10^{-4}(5{,}44+2{,}77+2{,}77+1{,}77+3{,}36+4{,}69)$$
$$\simeq10^{-4}(20{,}8)\simeq0{,}00208$$

4. لدينا سلسلة قيم d^2 ذات المقاس 1000. حيث لخّصت بواسطة مخطط بالعلبة وبواسطة مدرج تكراري كما هو موضح في الشكلين المعطيين.

نقترح، بعد قراءة هذين التمثيلين، عتبة تسمح لنا برفض النموذج $\boldsymbol{P}$ بمجازفة بالخطأ قدرها 10%.

§ قراءة المدرج التكراري:

نقرأ في هذا المدرج التكراري النسب المئوية لقيم سلسلة d^2 التي تنتمي إلى المجالات الآتية:

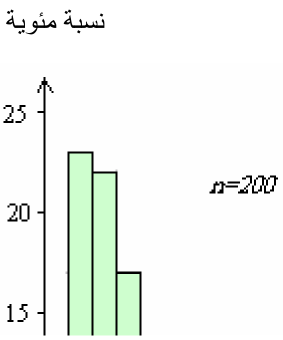
$[0;0{,}00125[$ ، $[0{,}00125;0{,}0025[$ ، $[0{,}0025;0{,}00375[$ ، $[0{,}00375;0{,}005[$

$[0{,}005;0{,}00625[$ ، $[0{,}00625;0{,}0075[$ ، $[0{,}0075;0{,}00875[$ ، $[0{,}00875;0{,}01[$

$[0{,}01;0{,}01125[$ ، $[0{,}01125;0{,}0125[$ ، $[0{,}0125;0{,}01375]$.

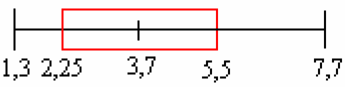
نكتب هذه النسب في الجدول الموالي:

المجالات	النسب المئوية لقيم d^2 التي تنتمي إلى هذا المجال
$[0;0{,}00125[$	7%
$[0{,}00125;0{,}0025[$	23%
$[0{,}0025;0{,}00375[$	22%
$[0{,}00375;0{,}005[$	17%



$[0,005;0,00625[$	13%
$[0,00625;0,0075[$	6%
$[0,0075;0,00875[$	5%
$[0,00875;0,01[$	3%
$[0,01;0,01125[$	2%
$[0,01125;0,0125[$	1%
$[0,0125;0,01375]$	1%
المجموع	100 %

§ قراءة المخطط بالعلبة:



في هذا المخطط تم تمثيل الربيعيات والعشيريات مضروبة في 1000

نقرأ في هذا المخطط الربيع الأوّل هو 0,00225
ونقرأ الربيع الثالث و هو 0,0055.
كما نقرأ العشير الأوّل و هو 0,0013 والعشير التاسع و هو 0,0077.

§إقتراح عتبة تسمح لنا برفض النموذج P بمجازفة بالخطأ قدرها 10%.

من قراءة هذا المخطط يتبيّن لنا أنّ:

- 90 % من قيم d^2 أصغر من العشير التاسع الذي يساوي 0,0077.
- 10 % من قيم d^2 أكبر من العشير التاسع الذي يساوي 0,0077.

منه العتبة المناسبة لرفض النموذج P بمجازفة بالخطإ قدرها 10 % هي العشير التاسع. أي نقبل أنّ d^2_{obs} صغير بقدر كاف إذا كان أصغر من العشير التاسع. (وبالتالي نقبل أن النموذج P يعبر بالفعل عن السلسلة المشاهدة أي متلائم معها، ومنه حجر النرد غير مزيف وتصريح كمال صحيح. أو نرفض هذا النموذج ونكون بذلك قد جازفنا 10 %)

- لدينا حيث أنّ $d^2_{obs} = 0,00208$; فهو إذن يحقق $d^2_{obs} < 0,0077$ ومنه النموذج الاحتمالي P متلائم مع السلسلة المشاهدة، وبالتالي فهو مقبول. وإذا أردنا أن نرفضه فإنّنا نكون قد جازفنا بارتكاب خطإ مجازفة قدرها 10 %.

§الاستنتاج:

نستنتج (حسب المقياس d^2_{obs} المعتمد و العتبة المأخوذة هنا وهي العشير التاسع) أنّ حجر النرد المستعمل في هذه التجربة غير مزوّر وبالتالي تصريح كمال صحيح.

IV- أمثلة في الاحتمالات المستمرة

1. متغير عشوائي مستمر

إذا قبل متغير عشوائي ما لانهاية من القيم الحقيقية غير القابلة للعد، فهذا يعني أنّه لا يمكن التعبير عنه بواسطة أعداد طبيعية كأدلة - كما هو الحال في المتغير العشوائي المتقطع – لذلك نسمي هذا النوع من المتغيرات العشوائية «متغير عشوائي مستمر".

2. الدالة "كثافة الاحتمال"

تعريف:

نسمي دالة **كثافة احتمال** كل دالة f معرفة على مجال $[\alpha ; \beta]$ وتحقق الشروط الآتية:

1. f مستمرة على المجال $[\alpha ; \beta]$.
2. $f(x) \geq 0$ من أجل كل x من $[\alpha ; \beta]$.
3. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) = 1$ (الحيز من المستوي المحدّد بمحور الفواصل ومنحنى الدالة f والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = \alpha$ و $x = \beta$ يساوي 1)

ملاحظة:

إذا كانت الدالة f معرفة على مجال غير محدود كالمجال $[\alpha;+\infty[$ مثلا فإنّ الشرط المتعلق بالمساحة يكتب : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_{\alpha}^{x} f(t)dt = 1$.

مثال:

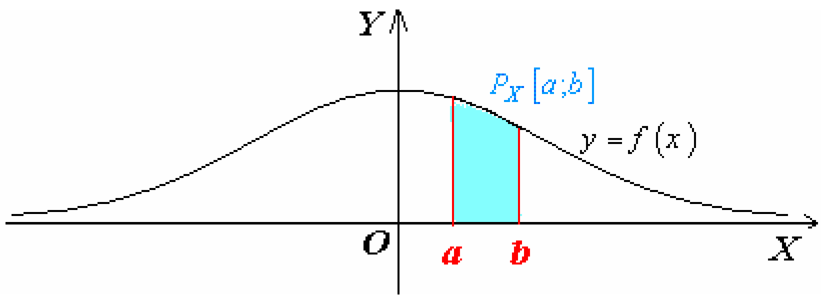
لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[1;2]$ بالعبارة $f(x) = \frac{3}{7}x^2$

بالفعل الدالة f هي دالة كثافة احتمال على المجال $[1;2]$ لأنّها تحقق الشروط الثلاثة الواردة في التعريف أعلاه، فهي مستمرة على المجال $[1;2]$، وموجبة عليه وتحقق أيضا

$\int_1^2 \frac{3}{7}x^2 dx = \left[\frac{1}{7}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{7}\left(2^3 - 1^3\right) = 1$.

تعريف:

ليكن X متغيرا عشوائيا مستمرا يأخذ قيمه في مجال I من $\mathbb{R}$ و الدالة f كثافة احتمال معرفة على I.
نقول إنّ قانون الاحتمال P_X للمتغير العشوائي X يقبل f **كثافة احتمال** له، إذا تحقق من أجل كل مجال $[a;b]$ من $\mathbb{R}$ ومحتوى في I : $p_X([a;b]) = \int_a^b f(x)dx$.



3. القانون المنتظم على $[0;1]$

تعريف:

لتكن f دالة ثابتة معرفة على المجال $[0;1]$ و تأخذ القيمة 1 على هذا المجال.

نسمي قانون الاحتمال الذي يقبل f كدالة كثافة احتمال، القانون المنتظم على المجال $[0;1]$.

ملاحظة:

إذا كان المجال $[a;b]$ محتوى في المجال $[0;1]$ وكان X متغير عشوائي يتبع القانون المنتظم على المجال $[0;1]$ فإنّ : $p_X([a;b]) = \int_a^b 1\,dx = b-a$.

نشاط 9:

يهدف هذا النشاط إلى توظيف القانون المنتظم على $[0;1]$ في مشكلة مرتبطة بالكيمياء

يتراوح تركيز مركب كيميائي في محلول حمضي بين **0** mg/L و **1** mg/L . الجهاز الذي يقيس هذا التركيز في كمية من المحلول غير مضبوط فهو يعطي قيمة عشوائية بين 0 و 1.
تمت نمذجة النتائج التي أعطاها هذا الجهاز بواسطة متغير عشوائي يتبع القانون المنتظم على المجال $[0;1]$.

ما هو احتمال أن يعطي الجهاز نتيجة محصورة بين **0,5** mg/L و **0,75** mg/L ؟

حل للنشاط 9:

بما أنّ المتغير العشوائي الذي تمت بواسطته نمذجة النتائج يتبع القانون المنتظم على $[0;1]$ فإنّ الاحتمال المطلوب هو $\int_{0,5}^{0,75} 1\,dx = 0,75 - 0,5 = 0,25$.

نشاط 10 :

يهدف هذا النشاط إلى بناء قانون منتظم على المجال $[a;b]$

أوّلا: باستعمال المحاكاة

1. أنجز محاكاة لسلسلة تتكوّن من 100 عددا عشوائيا من المجال $[0;1]$، ثمّ مثل السلسلة التي تحصل عليها بواسطة مدرج.
2. أنشئ سلسلة تتكوّن من 100 عددا عشوائيا من المجال $[2;5]$، انطلاقا من السلسلة التي حصلت عليها في السؤال السابق ثم مثلها بواسطة مدرج.

إرشاد: إذا كان x عددا من المجال $[0;1]$، فإنّ $(b-a)x+a$ هو عدد من المجال $[a;b]$.

ثانيا: بالحساب المباشر

يرمز X إلى متغير عشوائي يتبع قانون احتمال منتظم على المجال $[0;1]$.

نضع: $Y = (b-a)X + a$. ونقبل أنّ Y هو أيضا متغير عشوائي معرف على نفس الفضاء الذي عرف عليه X ومرفق بقانون احتمال P.

1. تحقق أنّ x ينتمي إلى المجال $[0;1]$، إذا وفقط إذا كان $(b-a)x+a$ ينتمي إلى المجال $[a;b]$. استنتج المجال الذي تنتمي إليه قيم Y.
2. نقبل أنّ دالة الكثافة لقانون احتمال Y هي دالة ثابتة على المجال $[a;b]$. عيّن هذه الدالة.
3. c و d عددان حقيقيان من المجال $[a;b]$. احسب $p_Y([c;d])$.
4. احسب $E(Y)$ و $V(Y)$.

حل للنشاط 10:

أوّلا: استعمال المحاكاة:

1. محاكاة لسلسلة تتكوّن من 100 عددا عشوائيا من المجال $[0;1]$،و تمثيلها بواسطة مدرج.

نستعمل لذلك مجدول إكسل حيث نحجز الطلبية =ALEA() في الخانة A2 ثمّ ننسخها في الخانات من A2 إلى غاية الخانة A101 ، بالضغط المتواصل على الزر الأيسر للفأرة والسحب في آن واحد.

2. أنشئ سلسلة تتكوّن من 100 عددا عشوائيا من المجال $[2;5]$، انطلاقا من السلسلة السابقة و تمثيلها بواسطة مدرج.

نستعمل لذلك مجدول إكسل حيث نحجز الطلبية =3*A2+2 في الخانة B2 ثمّ ننسخها في الخانات من B2 إلى غاية الخانة B101 ، بالضغط المتواصل على الزر الأيسر للفأرة والسحب في آن واحد.

ثانيا: بالحساب المباشر:

1. التحقق أنّ x ينتمي إلى المجال $[0;1]$، إذا وفقط إذا كان، $(b-a)x+a$ ينتمي إلى المجال $[a;b]$ و استنتاج المجال الذي تنتمي إليه قيم Y.

بالفعل لدينا $0 \le x \le 1$ يكافئ $0 \le (b-a)x \le (b-a)$ وهذا يكافئ $a \le (b-a)x + a \le b$. و.هـ.م

ومنه نستنتج أن Y ينتمي إلى المجال $[a;b]$.

2. تعيين دالة الكثافة لقانون احتمال Y .

لدينا فرضا دالة الكثافة لقانون احتمال Y هي دالة ثابتة على المجال $[a;b]$، نرمز لها بالرمز f.

منه $f(y)=k$ من أجل كل y من $[a;b]$ وتحقق ثلاثة شروط هي ، أن تكون مستمرة وموجبة على $[a;b]$ وتحقق $\int_a^b f(y)dy = 1$.

من الواضح أن f مستمرة على $[a;b]$ باعتبارها ثابتة عليه.

حتى تكون f موجبة على $[a;b]$ يكفي أخذ الثابت k موجبا أي $k \in \mathbb{R}_+$.

من الشرط $\int_a^b f(y)dy = 1$ ينتج أنّ $\int_a^b k\,dy = 1$ منه $kb - ka = 1$ وبالتالي $k = \frac{1}{b-a}$.

من الواضح أن k موجب.

إذن دالة الكثافة المطلوبة هي f حيث $f(y) = \frac{1}{b-a}$.

3. c و d عددان حقيقيان من المجال $[a;b]$. لنحسب $p_Y([c;d])$.

لدينا $p_Y([c;d]) = \int_c^d \frac{1}{b-a}dy = \frac{d-c}{b-a}$.

4. حساب $E(Y)$ و $V(Y)$.

لدينا $E(Y)=\int_a^b yf(y)dy$ وبالتعويض نجد $E(Y)=\frac{1}{b-a}\int_a^b ydy$ ومنه

$$E(Y)=\frac{1}{b-a}\times\left.\frac{y^2}{2}\right]_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}$$

لحساب $V(Y)$ نستعمل العلاقة $V(Y)=\int_a^b y^2f(y)dy-[E(Y)]^2$

نبدأ بحساب $\int_a^b y^2f(y)dy$ حيث نجد $\int_a^b y^2f(y)dy=\frac{1}{b-a}\left[\frac{y^3}{3}\right]_a^b$

ومنه ينتج : $\int_a^b y^2f(y)dy=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{1}{3}(b^2+ba+a^2)$

وفي الأخير نجد

$$V(Y)=\frac{1}{3}(b^2+ba+a^2)-\left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{12}(4b^2+4ba+4a^2-3b^2-6ba-3a^2)$$

ومنه

$$V(Y)=\frac{1}{12}(b^2+a^2-2ba)=\frac{1}{12}(a-b)^2$$

نشاط 11 :

يهدف هذا النشاط إلى تعيين دالة كثافة الاحتمال وتوظيفها

قام باحث في الكيمياء بقياس درجة الحرارة، بالكيلو كلوري (kcal) ، الناتجة عن تفاعل كيميائي. فلخص نتائج قياساته في مدرج تكراري ثم نمذج هذا المدرج بواسطة الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(t)=ct & ;t\in\left[0;\frac{1}{2}\right[\\ f(t)=c(1-t) & ;t\in\left[\frac{1}{2};1\right] \end{cases}$$ حيث c ثابت و t كمية الحرارة.

1. عين الثابت c الذي تكون من أجله الدالة f كثافة احتمال.
2. احسب احتمال أن تكون كمية الحرارة الناتجة من التفاعل محصورة بين 0.25 kcal و 0,75 kcal.
3. عين متوسط كمية الحرارة الناتجة من هذا التفاعل.

حل للنشاط 11:

1) تعيين الثابت c الذي تكون من أجله الدالة f كثافة احتمال.

نعلم أنّه حتى تكون الدالة f كثافة احتمال يلزم ويكفي أن تتحقق الشروط الثلاثة التي تعرّفها وهي أن تكون مستمرّة على المجال $[0;1]$ وموجبة عليه و يكون $\int_0^1 f(t)=1$.

- من الواضح أنّ الدالة f مستمرة على كل من المجالين $\left[0;\frac{1}{2}\right[$ و $\left[\frac{1}{2};1\right]$ وحتى تكون مستمرّة على المجال $[0;1]$ يكفي أن يتحقق $\lim_{t \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} f(t) = \lim_{t \xrightarrow{<} \frac{1}{2}} f(t)$

بعد الحساب $\lim_{t \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} f(t) = \lim_{t \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} c(1-t) = \frac{1}{2}c$

ونجد من جهة أخرى $\lim_{t \xrightarrow{<} \frac{1}{2}} f(t) = \lim_{t \xrightarrow{<} \frac{1}{2}} ct = \frac{1}{2}c$ و.هـ.م

- حتى تكون الدالة f موجبة على المجال $[0;1]$ يكفي أن يكون الثابت c موجبا.
- حتى يتحقق الشرط $\int_0^1 f(t)=1$ يلزم ويكفي أن يكون $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt = 1$

أي $\int_0^{\frac{1}{2}} ct\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 c(1-t)dt = 1$ ومنه $\left[\frac{1}{2}ct^2\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[ct - \frac{1}{2}ct^2\right]_{\frac{1}{2}}^1 = 1$

بعد الحساب نجد $c=4$.

2) احتمال أن تكون كمية الحرارة الناتجة من التفاعل محصورة بين 0.25kcal و0,75kcal هو $p_X([0,25;0,75]) = \int_{0,25}^{0,75} f(t)dt$. وبعد الحساب نجد:

$$\int_{0.25}^{0,75} f(t)dt = \int_{0.25}^{0,5} f(t)dt + \int_{0.5}^{0,75} f(t)dt$$
$$= \int_{0.25}^{0,5} 4t\,dt + \int_{0.5}^{0,75} 4(1-t)dt = \frac{3}{4}$$

3) متوسط كمية الحرارة الناتجة من هذا التفاعل هو الأمل الرياضي $E(X)$ ومنه :

$$E(X) = \int_0^1 tf(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} tf(t)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 tf(t)dt$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 4t^2\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t\,4(1-t)dt = \frac{1}{2}$$

4. الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري

تعريف:

X متغير عشوائي مستمر يتبع قانون احتمال يقبل f دالة كثافة له معرفة على مجال $[\alpha;\beta]$ من $\mathbf{R}$.
نعرف الأمل الرياضياتي $E(X)$ و التباين $V(X)$ و الانحراف المعياري $\sigma(X)$ للمتغير العشوائي X كالآتي: $E(X)=\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx$ ، $V(X)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-E(X))^2 f(x)dx$، $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

ملاحظة:

إذا كانت الدالة f معرفة على مجال غير محدود كالمجال $[\alpha;+\infty[$ مثلا فإنّ $E(X)$ و $V(X)$ يعرفان في حالة وجود النهاية كالآتي:

$$E(X)=\lim_{x\to+\infty}\int_{\alpha}^{x} tf(t)dt$$

و $$V(X)=\lim_{x\to+\infty}\int_{\alpha}^{\beta}(t-E(X))^2 f(t)dt$$

وفي حالة ما إذا كانت النهايات غير موجودة أو غير منتهية فإنّ ذلك يفسر بعدم وجود الأمل الرياضياتي وبالتالي عدم وجود التباين.

خاصية: (تستعمل لتسهيل حساب التباين)

X متغير عشوائي مستمر يتبع قانون احتمال يقبل f دالة كثافة له معرفة على مجال $[\alpha;\beta]$ من $\mathbf{R}$.
لدينا: $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x)dx-[E(X)]^2$.

نشاط 12 :

يهدف هذا النشاط إلى تعيين كثافة الاحتمال لقانون منتظم على مجال $[a;b]$

نسمي قانون احتمال منتظم على مجال $[a;b]$ من $\mathbb{R}$ ، كل قانون احتمال كثافته f معرفة على المجال $[a;b]$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$.

باستعمال قانون منتظم مختار بعناية حل المسألة الآتية.

يمر بالمحطة خلال كل 20 دقيقة قطار. يصل أحد المسافرين صدفة إلى هذه المحطة.

1. عين قانون احتمال المتغير العشوائي الذي يعطي فترة انتظار هذا المسافر في المحطة لكي يستقل أوّل قطار يلتقي به.
2. عيّن متوسط الفترة الزمنية التي ينتظر فيها هذا المسافر القطار.
3. احسب احتمال أن ينتظر هذا المسافر فترة زمنية تتعدى 15 دقيقة.

حل للنشاط 12 :

1)قانون احتمال المتغير العشوائي الذي يعطي فترة انتظار هذا المسافر في المحطة لكي يستقل أوّل قطار يلتقي به هو: $p_X([0;\alpha])=\frac{\alpha}{20}$ حيث X هو المتغير العشوائي الذي يعطي فترة انتظار هذا المسافر في المحطة لكي يستقل أوّل قطار يلتقي به (من الواضح أنّ X هو متغير عشوائي مستمر) و α عدد حقيقي من المجال $[0;20]$. ومن المعلوم أنّ دالة الكثافة لقانون الاحتمال هي f حيث $f(t)=\frac{1}{20}$ ، ومنه $p_X([0;\alpha])=\int_0^{\alpha}\frac{1}{20}dx$.

بعد الحساب نجد: $p_X([0;\alpha])=\frac{\alpha}{20}$

2)متوسط الفترة الزمنية التي ينتظر فيها هذا المسافر القطار هو الأمل الرياضياتي $E(X)$ حيث

$$E(X)=\int_0^{20}tf(t)dt=\int_0^{20}t\frac{1}{20}dt=10Min$$

3)احتمال أن ينتظر هذا المسافر فترة زمنية تتعدى 15 دقيقة هو $p_X([15;20])$.

بعد الحساب نجد $p_X([15;20])=\int_{15}^{20}\frac{1}{20}dx=\frac{5}{20}$.

5. القانون الأسي

خاصية

الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما، هي دالة كثافة احتمال.

ملاحظة :

للبرهان على هذه الخاصية يكفي التأكد من توفر الشروط الثلاثة الواردة في تعريف دالة كثافة احتمال. وفيما يتعلق بشرط المساحة يُعوض بالشرط $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt=1$ ، حيث نجد:

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt=\left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x=1-e^{-\lambda x}$$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to+\infty}\left[1-e^{-\lambda x}\right]=1$ و.هـ.م

إذن يمكن تعريف قانون احتمال كثافته هي الدالة f ومنه التعريف الآتي.

تعريف:

ليكن λ عددا حقيقيا موجبا تماما.
يسمى قانون الاحتمال الذي يقبل الدالة f دالة كثافة له حيث f معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ ، القانون الأسي ذو الوسيط λ.

ملاحظة:

إذا كان X متغير عشوائي يتبع القانون الأسي ذو الوسيط λ فإنّ :

$$p_X([a;b]) = \int_a^b f(t)dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

نشاط 13 :

يهدف هذا النشاط إلى توظيف كثافة الاحتمال لقانون منتظم على مجال $[a;b]$

تمت نمذجة مدّة صلاحية جهاز إليكتروني بالأسابيع بواسطة متغير عشوائي X يتبع القانون الأسي ذو الوسيط 0,002. ما هو احتمال أن تكون مدّة صلاحية هذا الجهاز أصغر من 200 أسبوع؟

حل للنشاط 13:

بما أنّ المتغير العشوائي الذي تمت بواسطته نمذجة مدّة الصلاحية يتبع القانون الأسي فإنّ الاحتمال المطلوب نعبر عنه بالتعبير $p_X([0;200])$ وبالحساب نجد :

$$p_X([0;200]) = \int_0^{200} f(t)dt = \int_0^{200} 0,002e^{-0,002t}dt$$

$$= \left[-e^{-0,002t}\right]_0^{200} = e^0 - e^{-0,4} \approx 0,33.$$

نشاط 14 :

يهدف هذا النشاط إلى توظيف كثافة الاحتمال لقانون منتظم على مجال $[a;b]$

المدة الزمنية T بالدقيقة، لمكالمة هاتفية داخل نفس المدينة تتبع قانون أسي ذو وسيط 0,8.

1. احسب احتمال أن تستمر مكالمة ما بين 3 و 5 دقائق.
2. احسب احتمال أن تتعدى مدّة مكالمة 4 دقائق.

حل للنشاط 14:

1. حساب احتمال أن تستمر مكالمة هاتفية ما بين 3 و 5 دقائق.

إذا اعتبرنا X المتغير العشوائي الذي يحصي المدة الزمنية لمكالمة هاتفية فإننا نجد أن قانون احتماله يتبع القانون الأسي ذو الوسيط 0,8. وبالتالي الاحتمال المطلوب نعبر عنه بالتعبير $p_X([3;5])$ وبالحساب نجد:

$$p_X([3;5]) = \int_3^5 0,8e^{-0,8x}dx = \left[-e^{-0,8x}\right]_3^5$$

ومنه $p_X\left([3;5]\right)=e^{-2,4}-e^{-4}\approx 0,090-0,018$

$\approx 0,072$

2. حسب احتمال أن تتعدى مدّة مكالمة 4 دقائق.

المتغير العشوائي الذي يحصي المدة الزمنية لمكالمة هاتفية يأخذ في هذه الحالة قيما أكبر من 4
ومنه الاحتمال المطلوب هو $p_X\left([4;+\infty[\right)$ و يحسب بالعلاقة

$$p_X\left([4;+\infty[\right)=\lim_{x\to+\infty}\int_4^x 0,8e^{-0,8t}\,dt$$

ومنه نجد بالحساب:

$$\begin{aligned} p_X\left([4;+\infty[\right) &= \lim_{x\to+\infty}\int_4^x 0,8e^{-0,8t}\,dt \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[-e^{-0,8t}\right]_4^x=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-2,4}-e^{-0,8x}\right) \\ &= e^{-2,4}\ ;\ 0,090 \end{aligned}$$

4.ميدان الهندسة

تطرق ميدان الهندسة في برنامج السنة الثانية ثانوي أساسا إلى الجداء السلمي وتوظيفه في المستوي وفي الفضاء. كما تم التطرق إلى المعادلات الديكارتية لمستقيم ومستو وإلى المرجح وبعض التحويلات النقطية كالانسحاب و التحاكي.

أما برنامج السنة الثالثة ثانوي لشعبة العلوم التجريبية فإنه يتمحور حول:

- توسيع الجداء السلمي إلى الفضاء .
- دراسة خواص أشكال هندسية و تحويلات النقطية (الانسحاب- التحاكي- الدوران- التشابه المباشر) من خلال أداة جديدة و فعالة الا و هي الأعداد المركبة.

والبرنامجان المتعلقان بالشعبتين : رياضيات و تقني رياضي، فإنهما يتميزان بعدم الاكتفاء باستعمال الأعداد المركبة لمعالجة وضعيات بل يتعدى ذلك باستعمال طرق هندسية.

و نشير في الأخير إلى ان موضوع المقاطع المستوية للسطوح، تعالج في شعبة الرياضيات فقط.

الأعداد المركبة

في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$، يمكن ان نطابق بين النقطة M التي إحداثياها $(x\,;y)$ و الشعاع $\overrightarrow{OM}$ و العدد المركب $x+i\,y$.

يبين هذا التطابق، موافقة جمع الأعداد المركبة و جمع الأشعة، كما يوضح عدم إمكانية مقارنة أعداد مركبة .

نستنتج توزيعية الضرب على الجمع بوضع $i^2=-1$ ويلاحظ التلميذ أن الجزء الحقيقي (والجزء التخيلي) لجداء أعداد مركبة ليس جداء الأجزاء الحقيقية (الأجزاء التخيلية) لجداء العوامل.

وبعد إدخال قواعد الحساب الجبري على الأعداد المركبة،نفسرها هندسيا.

نفسر ضرب عدد مركب بعدد حقيقي غير معدوم k بالتحاكي الذي مركزه O ونسبته k ؛ وضرب العدد المركب i بعدد مركب بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

ندرج مرافق عدد مركب وطويلته ونبيّن ان مقلوب العدد المركب غير المعدوم z يساوي $\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

ونسجل ان $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ يساوي طويلة لاحقة النقطة M ونستنتج المتباينة المثلثية $|z+z'|\le|z|+|z'|$.

نلاحظ ان:

- $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متوازيان يعني أن $\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$ عدد حقيقي.
- $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متعامدان يعني أن $\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$ تخيلي صرف.
- المسافة بين A و B هي طويلة العدد المركب z_B-z_A .

وتهدف أساسا الأنشطة التي نقترحها فيما يلي، إلى كيفية استعمال أداة جديدة (الأعداد المركبة) في معالجة وضعيات مختلفة في الهندسة واستثمار مكتسبات التلاميذ.

نشاط 1 : التعامل مع العمليات على الأعداد المركبة واستعمال التحويلات النقطية.

الأعداد المركبة 3+2i ، 1-2i ، 2+i ، 4+5i هي، على الترتيب لواحق النقط A، B، C، D . بين بطريقتين ان ABCD متوازي أضلاع.

إرشادات حول الحل

يمكن معالجة هذا النشاط بعدة طرق .
نحث التلميذ على تجنيد مكتسباته و نسجل كل اقتراحاته (استعمال خاصة مميزة لمتوازي الأضلاع، استعمال تحويل نقطي) علما ان الهدف هنا هو أساسا التعامل مع العمليات على الأعداد المركبة و ربطها بمكتسبات التلميذ في الهندسة الشعاعية.
نقترح على سبيل المثال:
الطريقة1 : نبين أن $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$
الطريقة2: نبين ان للقطعتين $[BD]$ و $[CA]$ نفس المنتصف .

نشاط2 : العمليات على المرافق .

a،b،c،d أعداد حقيقية. بين ان إذا كان z_0 حلا للمعادلة $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ فإن $\overline{z_0}$ حلا آخر لهذه المعادلة .

إرشادات حول الحل

نجد هنا فرصة لتوظيف خواص المرافق : $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ، $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
و يمكن إضافة أسئلة أخرى تسمح بحل هذه المعادلة و ربط ذلك مع ما درس في السنة الثانية حول كثيرات الحدود.

نشاط3 : خواص الطويلة و العمدات.

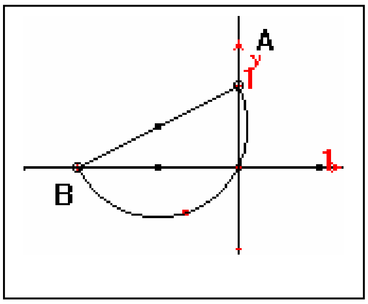
1) عين المجموعة (E) للنقط M(z) حيث $|z+2-i| = 3$.

2) عين المجموعة (F) للنقط M(z) حيث $\arg\left(\dfrac{z-i}{z+2}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

إرشادات حول الحل

يتطرق هذا النشاط إلى إيجاد مجموعات نقطية باستعمال النتائج :
- لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $z_B - z_A$ ومعياره هو طويلة $z_B - z_A$.
- α قيس للزاوية $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)$ يعني α عمدة للعدد المركب $\dfrac{z_M - z_B}{z_M - z_A}$.

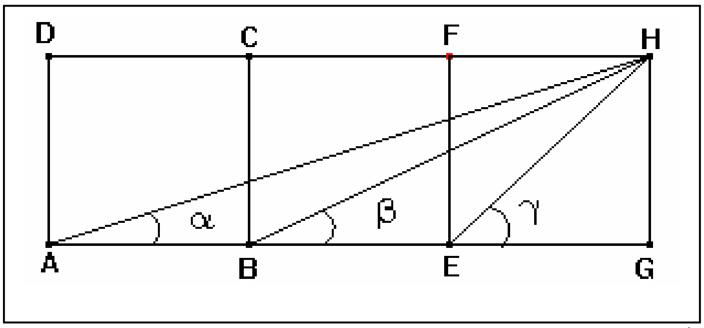
الإجابة على الأسئلة المطروحة :
1) $\left\|\overrightarrow{MA}\right\| = 3$ ، نستنتج ان (E) هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 3.



2) A النقطة التي لاحقتها i و نضع $z_A = i$
B النقطة التي لاحقتها 2- و نضع $z_B = -2$.
(F) هي نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ المحتواة في
نصف المستوي المفتوح الذي لايشمل المبدأ وحدّه (AB).

نشاط 4: استعمال عمدات أعداد مركبة لمعالجة وضعية حول أقياس زوايا .

نعتبر المربعات ABCD ، BEFC ، EGHF (انظر الشكل الآتي).



قارن بين $\alpha+\beta$ و γ .

إرشادات حول الحل

لا نوجه التلميذ نحو فكرة أو طريقة معينة لمعالجة هذا النشاط ونعتبر كل الاقتراحات.
نسجل على الكراس كل الطرق المحتملة دون نسيان الطريقة التي تستعمل الأعداد المركبة .
الهدف الأساسي هنا، هو تحسيس التلميذ بفعالية الأعداد المركبة في مسائل هندسية.
نقترح فيما يلي حلا للتمرين المقترح:
في المعلم المتعامد و المتجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$، لاحقات النقط A ،B ،E ، H هي، على الترتيب،
$z_A = 0$ ، $z_B = 1$ ، $z_E = 2$ ، $z_H = 3+i$.
α و β و γ هي على الترتيب أقياس للزوايا $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH})$،$(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BH})$،$(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH})$.
نجد $\alpha+\beta = \arg[5(1+i)]$ أي $\alpha+\beta=\gamma$.

نشاط6: إيجاد الدساتير الشهيرة في حساب المثلثات باستعمال ترميز أولير.

نقترح أمثلة حول cos(a+b) و sin(a+b) باستعمال ترميز ألير: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ و الخاصية $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$ واستنتاج $\cos 2x$ و $\sin 2x$ انطلاقا من $e^{2ix} = (e^{ix})^2$

نشاط7: البحث عن طويلة و عمدة للعددين المركبين $1+e^{ix}$ و $1-e^{ix}$

عين طويلة و عمدة للعددين المركبين $1+e^{ix}$ و $1-e^{ix}$ من أجل $x \in]0;\pi[$.

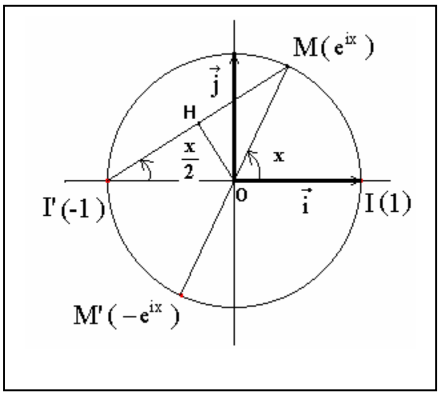
إرشادات حول الحل

يمكن تعيين طويلة $1+\cos x+i\sin x$ (أو $(1-\cos x-i\sin x$) و عمدة له باستعمال حساب المثلثات فقط و نقترح في النشاط طريقة أخرى.

نقترح فيما يلي حلا للتمرين المقترح:

نعتبر الدائرة المثلثية المرفقة بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I، I'، M، M' هي، على الترتيب، صوّر 1، -1، e^{ix} ، $-e^{ix}$. $z_{\overrightarrow{I'M}}=e^{ix}+1$



- أولا: $\arg\left(e^{ix}+1\right)\equiv\frac{x}{2}[2\pi]$
- ثانيا : $\left|e^{ix}+1\right|=\left\|\overrightarrow{I'M}\right\|$

نسمي H المسقط العمودي

لـــ O على [I'M]

و نستنتج ان I'M= 2I' H

و $I'H=\cos\frac{x}{2}$

منه $\left|e^{ix}+1\right|=2\cos\frac{x}{2}$

نجد طويلة $1-e^{ix}$ و عمدة له بنفس الكيفية .

نسجل في الأخير إمكانية الحصول على الشكل المثلثي لأعداد مركبة من الشكل $1+a\ \cos x+i\ b\sin x$ مع a و b ينتميان إلى $\{-1,1\}$ باستعمال:

$1+\cos x=2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ ، $1+\cos x=2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ ، $\sin x=2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\times\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

نشاط8: إيجاد مجموعة نقطية باستعمال الأعداد المركبة.

نعتبر في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ النقطتين A(x ;0) و B (0 ;a-x)

[AB] هو وتر للمربع MANB حيث $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

عين مجموعة النقط M و مجموعة النقط N عندما تتحرك A .

إرشادات حول الحل

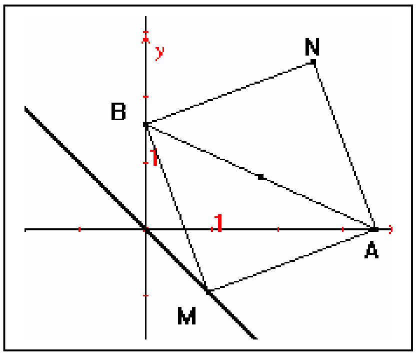
الهدف هنا هو تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $z=y(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

علما ان y يمسح مجموعة الأعداد الحقيقية و α ثابت باستعمال الدرس حول

" $\frac{MB}{MA}=k$ و $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\equiv\alpha[2\pi]$ يعني $z_{\overrightarrow{MB}}=k(\cos\alpha+i\sin\alpha)z_{\overrightarrow{MA}}$ "

نقترح فيما يلي حلا مختصرا للتمرين:

x هي لاحقة A و z_M لاحقة M. لاحقة B هي $z_B=i(a-x)$



لدينا $\frac{MB}{MA}=1$ و $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

نجد $z_M=\frac{a-2x}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

مجموعة النقط M هي المستقيم الذي معادلته y=-x .

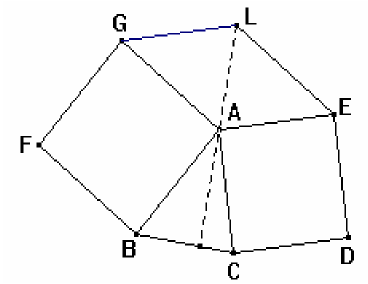
نجد مجموعة النقط N بنفس الكيفية .

نشاط9 : خواص أشكال هندسية و الأعداد المركبة .

ABC مثلث كيفي حيث $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\alpha[2\pi]$ و $\alpha\in]0;\pi[$.

ننشئ خارج هذا المثلث المربعين ACDE و ABFG وثم متوازي الأضلاع GAEL .

برهن ان AL =BC و $(AL)\perp(BC)$.



إرشادات حول الحل

نوظف هنا الدوران و الأعداد المركبة لمعالجة وضعية حول خواص أشكال هندسية.

نعلم ان بصفة عامة :

الدوران $R(\Omega;\alpha)$ يحول النقطة $M(z_M)$

إلى $M'(z_{M'})$ يعني $z_{M'}-z_\Omega=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(z_M-z_\Omega)$

نقترح حلا للتمرين المقترح:

نسمي a، b، c، l ،g، e لاحقات النقط A ، B، L، G، E (على الترتيب).

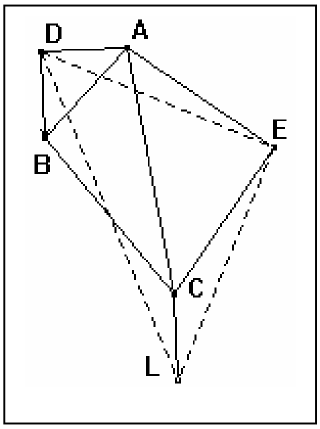
باستعمال الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ نجد :

(1)….b-a=i(g-a) و (2)…e-a=i(c-a) و نبين ان l-a=g-a+e-a … (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج ان $\frac{AL}{BC}=1$ و $\left(\overrightarrow{AL},\overrightarrow{BC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

نشاط10 :توظيف الدوران و الانسحاب باستعمال الأعداد المركبة في خواص الأشكال الهندسية.

ABC مثلث حيث $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\alpha[2\pi]$.



نرسم خارج هذا المثلث المثلثين القائمين
DAB و EAC حيث DA=DB و EA=EC.
L هي النقطة حيث $\overrightarrow{CL}=\overrightarrow{DB}$.
برهن ان المثلث EDL قائم في E ومتقايس الساقين.

إرشادات حول الحل

نستعمل الدوران و الإنسحاب الأعداد المركبة لمعالجة وضعية حول خواص أشكال هندسية (انظر النشاط 9). نعلم ان بصفة عامة :

الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ يحول النقطة $M(z_M)$ إلى $M'(z_{M'})$ يعني $z_{M'}=z_M+z_B-z_A$.

نقترح حلا للتمرين المقترح:

ننسب المستوي إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

نسمي z_A ، z_B، z_C، z_D، z_E ، z_L لواحق النقط A ،B ،C ،D ،E (على الترتيب).

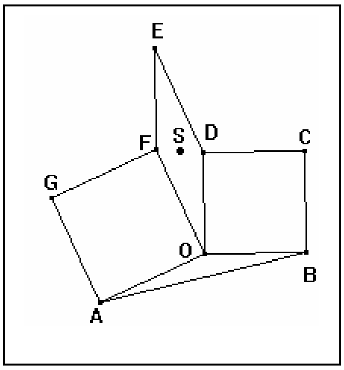
باستعمال الدوران الذي مركزه D وزاويته $\frac{\pi}{2}$ و الدوران مركزه E وزاويته $\frac{\pi}{2}$ و الإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{DB}$ نجد $z_A-z_D=i(z_B-z_D)$ و $z_C-z_E=i(z_A-z_E)$
و $z_L=z_C+z_B-z_D$

نعبر عن z_L-z_E بدلالة z_D-z_E : نجد $z_L-z_E=i(z_D-z_E)$

نستنتج أن L هي صورة D بالدوران الذي مركزه E و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

نشاط 11:معالجة وضعية بطريقتين (استدلال هندسي استعمال الأعداد المركبة)

OAB مثلث حيث القيس الرئيسي للزاوية $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ ينتمي إلى $]0;\pi[$.



نرسم خارج هذا المثلث المربعين AOFG و OBCD و متوازي الأضلاع FODE الذي مركزه S .
يهدف هذا النشاط إلى البرهان على أن $(OE)\perp(AB)$ و $AB=OE$ بطريقتين مختلفتين.

الطريقة 1: البرهان باستعمال استدلال هندسي

R هو الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

1) ماهي صورة F وصورة B بالدوران R ؟
2) بين أن O منتصف [BD'] علما ان $D'=R(D)$.
3) بين ان S' منتصف [DA'] علما ان $S'=R(S)$.
4) استنتج ان $(OE)\perp(AB)$ و $OE=AB$.

الطريقة2: البرهان باستعمال الأعداد المركبة

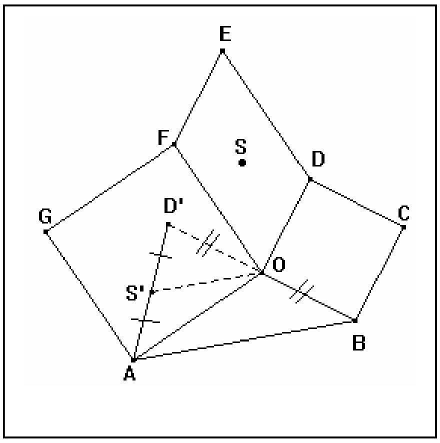
z_O، z_A، z_C هي ،على الترتيب، لاحقات النقط O ،A ،B .
1) احسب لاحقة D ولاحقة F بدلالة z_O، z_A، z_C .
2) احسب لاحقة $\overrightarrow{OE}$ بدلالة لاحقة $\overrightarrow{AB}$.
3) استنتج ان $(OE)\perp(AB)$ و $OE=AB$.

إرشادات حول الحل

عندما يتعلق الأمر بالشعبتين : رياضيات و تقني رياضي ،لا نكتفي باستعمال الأعداد المركبة فقط بل يتعدى ذلك باستعمال طرق هندسية وفق ما ينص عليه البرنامج.
نستعمل في الطريقة الأولى استدلالا هندسيا و في الطرقة الثانية يتم اللجوء إلى الأعداد المركبة .

الطريقة1:

1) صورة F هي A وصورة B هي D (بالدوران R) .



2) لدينا: $B\xrightarrow{R\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}D\xrightarrow{R\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}D'$
إذن D' هي صورة B بالتناظر بالنسبة إلى النقطة O .

3) لدينا: $F\xrightarrow{R\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}A$ و $D\xrightarrow{R\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}D'$
إذن صورة [DF] بادوران Rهي [D' A].
وبمأن S هي منتصف[DF] فإن صورتها هي المنتصف S ' لـ: [D' A] .

4) O هي منصف [BD'] و S ' هي منتصف [D' A]
منه $(OS')//(AB)$ و $2OS'=AB$.
نستنتج $AB=OE$.
من جهة أخرى:
$(OS)\perp(OS')$ و$(OS')//(AB)$ إذن
$(OE)\perp(AB)$.

الطريقة2:

1)باستعمال الدورانين $R\left(O,\frac{\pi}{2}\right)$ و $R\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)$ نجد : $z_D=z_O+i(z_B-z_O)$ و $z_F=z_O-i(z_A-z_O)$

2) $z_{\overrightarrow{OE}} = z_F + z_D - 2z_O$ و باستعمال السؤال 1) نجد: $z_{\overrightarrow{OE}} = iz_{\overrightarrow{AB}}$

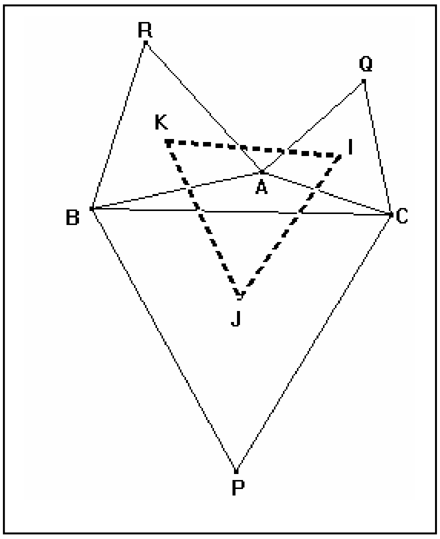
3) لدينا $\frac{z_{\overrightarrow{OE}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = i$ و $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OE}\right) = \arg(i)$ منه $OE = AB$ و $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OE}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

نشاط12: البرهان على نتيجة باستعمال الأعداد المركبة

نرسم خارج مثلث ABC المثلثات المتقايسة الأضلاع ACQ ، BPC، RBA التي مراكز ثقلها هي، على الترتيب، I، J، K. برهن أن للمثلثات ABC، PQR، IJK نفس مركز الثقل .

إرشادات حول الحل

نرمز بالرمز $R(\Omega;\alpha)$ للدوران الذي مركزه Ω وزاويته α، وبالرمز z_M للاحقة النقطة M.



- لدينا من جهة :

باستعمال الدورانات $R\left(B;\frac{\pi}{3}\right)$ و $R\left(C;\frac{\pi}{3}\right)$ و $R\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$

$$(1)\ldots z_C - z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_P - z_C)$$

$$(2)\ldots z_A - z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_Q - z_C)$$

$$(3)\ldots z_B - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_R - z_A)$$

نستنتج من (1) و(2) و(3) :

$$(*)\ldots z_A + z_B + z_C = z_P + z_Q + z_R$$

- و من جهة أخرى :

$$(4)\ \ldots z_I = \frac{z_A + z_C + z_Q}{3} \quad \text{و} \quad (5)\ \ldots z_J = \frac{z_B + z_C + z_P}{3}$$

و $$(6)\ \ldots z_K = \frac{z_A + z_B + z_R}{3}$$

نستنتج من (4) و(5) و(6) و (*) ان $\frac{z_P + z_Q + z_R}{3} = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{z_I + z_J + z_K}{3}$

وظفنا الدوران كما هو الشأن في النشاطين 10 و 11، الهدف هو تعويد التلاميذ على حل مسائل متنوعة باستعمال أداة جديدة (الأعداد المركبة).

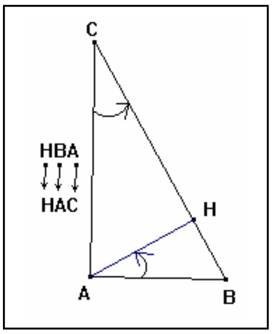
التشابهات

درس التلميذ سابقا المثلثات المتشابهة (زوايا متقايسة ،معامل التكبير أو معامل التصغير) وكذلك أمثلة حول التحويلات النقطية (الانسحاب، الدوران، التحاكي).
يتطرق برنامج السنة الثالثة إلى دراسة التشابهات المستوية المباشرة التي نعرفها كتحويلات تحافظ على نسب المسافات والزوايا الموجهة.
نلاحظ عندئذ ان تعريف التشابه لا يرتكز على التقايس ؛ التقايس هو حالة خاصة للتشابه .
نسجل كذلك ، ان تركيب التناظرات المحورية و تحليل دورانات أو انسحابات إلى جداء تناظرات محورية ليست من الكفاءات الإلزامية، لكن يمكن معالجة وضعيات حول هذا الموضوع المفيدة (في شعبة الرياضيات و في شعبة تقني رياضي) .
البرنامج يعطي أهمية كبيرة لاستعمال التشابهات بالأعداد المركبة و لكن نتجنب اللجوء بطريقة آلية، إلى الأعداد المركبة أي لا نهمل الجانب الهندسي و الجانب الشعاعي؛ و يراعي الأستاذ ذلك من خلال الأسئلة التي يقترحها.
لإثبات شكل التشابه بالأعداد المركبة، يمكن ان نبين الخاصية الآتية التي تستغل مكتسبات التلاميذ حول الأعداد المركبة :
" S هو تشابه يحول النقط $A(z_A)$ إلى النقط $A'(z_{A'})$ ، النقط $B(z_B)$ إلى $B'(z_{B'})$ و $C(z_C)$ إلى $C'(z_{C'})$ ؛ لدينا $\dfrac{z_{C'}-z_{A'}}{z_{B'}-z_{A'}}=\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=a$ " . وثم نحسب $|a|$ و $\arg(a)$.
وتهدف أساسا الأنشطة التي نقترحها فيما يلي، إلى كيفية استعمال أداة جديدة (الأعداد المركبة) في معالجة وضعيات مختلفة في الهندسة و استثمار مكتسبات التلاميذ.

نشاط1 :التعامل مع المثلثات المتشابهة و التشابهات المباشرة

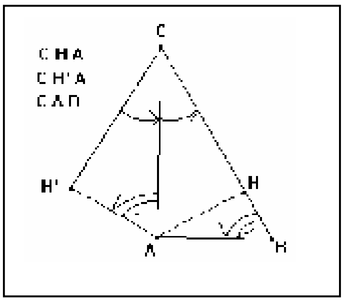
CBA مثلث قائم في A حيث AB=2 و $AC=2\sqrt{3}$. H هي المسقط العمودي للنقطة A على (BC).
1) بين ان المثلث HBA هو صورة المثلث HAC بتشابه مباشر يطلب تعيينه.
2) بين ان المثلث HAC هو صورة المثلث CBA بمركب تشابه مباشر وتناظر محوري يطلب تعيينهما.

إرشادات حول الحل



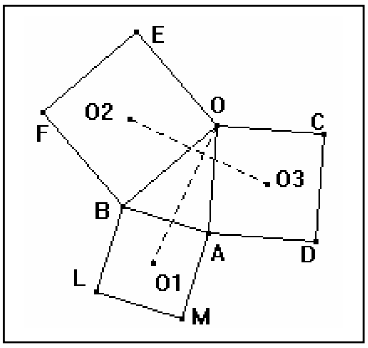
درسنا في السنة الأولى المثلثات المتشابهة و تطرقنا إلى معامل التكبير(أو التصغير) k .
يتم الرجوع إلى هذا الموضوع في الشعبتين : رياضي و تقني رياضي كالآتي:
" مثلثان ABC و A'B'C' متشابهان" يعني " يوجد تشابة نسبته k يحوّل ABC إلى A'B'C' "
علما أن التشابه غير المباشر خارج البرنامج.

1.يتعلق الأمر في هذا السؤال بتشابه مباشر.
المثلثان HBA و HAC متشابهان.
صورة المثلث HBA هي المثلث HAC بالتشابه المباشر.S
الذي مركزه H و حيث S(A)=C و S(B)=A . نسبة S هي $\sqrt{3}$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.



2.يتعلق الأمر في هذا السؤال بتشابه غير مباشر دون ذكره (مركب تشابه مباشر و تناظر محوري) لأنه خارج البرنامج.
المثلثان HAC و CBA قائمان،على الترتيب، في H و A.
لدينا $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}\right)\equiv-\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$
- نسمي 'H صورة H بالتناظر المحوري Sym بالنسبة إلى المستقيم (AC).
- المثلثان H'AC و CBA قائمان و $\left(\overrightarrow{CH'},\overrightarrow{CA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)[2\pi]$
H'AC هو صورة CBA بالتشابه المباشر S_D الذي مركزه C وحيث S(A)=B و S(H')=A نسبة S_D هي $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{6}$.

نشاط2 :معالجة وضعية بطريقتين (باستدلال هندسي و باستعمال الأعداد المركبة).



نرسم خارج المثلث OBA ثلاثة مربعات مراكزها O3،O2،O1 (انظر الشكل المقابل).
برهن ان $\left(O_2O_3\right)\perp\left(OO_1\right)$ و $O_2O_3=OO_1$.

إرشادات حول الحل

يمكن معالجة هذا النشاط باستعمال الأعداد المركبة و الدوران بالنسبة إلى جميع الشعب (رياضيات - تقني رياضي -علوم تجريبية) و باستعمال طريقة هندسية (التشابه المباشر) بالنسبة إلى الشعبتين : رياضيات و تقني رياضي.

طريقة1 : استعمال الأعداد المركبة

ننسب المستوي إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، لدينا عندئذ $z_O=0$.
باستعمال الدورانات $R\left(O_1,\frac{\pi}{2}\right)$ و $R\left(O_2,\frac{\pi}{2}\right)$ و $R\left(O_3;\frac{\pi}{2}\right)$ نجد :

$$(1)\ldots z_A-z_{O_1}=i\left(z_B-z_{O_1}\right)$$
$$(2)\ldots z_O-z_{O_2}=i\left(z_A-z_{O_2}\right)$$
$$(3)\ldots z_B-z_{O_3}=i\left(z_O-z_{O_3}\right)$$

من (1) و (2) و (3) و $z_O=0$ نستنتج $\frac{z_{\overrightarrow{OO_1}}}{z_{\overrightarrow{O_3O_2}}}=i$ ومنه $\left(\overrightarrow{O_3O_2},\overrightarrow{O_1O}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ و $O_3O_2=O_1O$.

طريقة2: استعمال استدلال هندسي.

نرمز $S(\Omega,\lambda,\alpha)$ للتشابه المباشر الذي مركزه Ω، نسبته λ و زاويته α .

لدينا $\begin{cases} O \xrightarrow{S\left(B,\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)} E \xrightarrow{S\left(O,\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)} O_2 \\ O_1 \xrightarrow{S\left(B,\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)} A \xrightarrow{S\left(O,\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)} O_3 \end{cases}$

إذن $[OO_1] \xrightarrow{S\left(B,\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)} [EA] \xrightarrow{S\left(O,\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)} [O_2O_3]$

مركب التشابهين هو دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ و منه $(OO_1) \perp (O_2O_3)$ و $OO_1 = O_2O_3$.

نشاط3 : إيجاد مجموعة نقطية باستعمال التشابه المباشر

يعطى المستقيم (D) و النقطة O حيث $O \notin (D)$. A هي نقطة كيفية من (D) .

B هي نقطة حيث $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ و $AO=AB$.

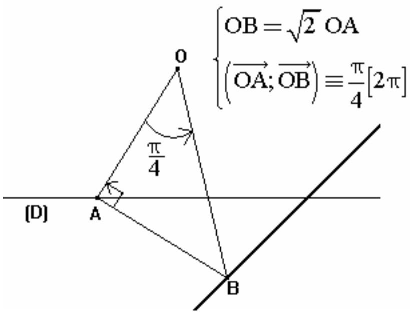
عين مجموعة النقط B .

إرشادات حول الحل

نقترح، بصفة عامة، أنشطة من هذا النوع
لتفعيل مفهوم معيّن(هنا صورة مستقيم بتشابه مباشر).

نستعمل التشابه المباشر S الذي مركزه O و نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

A تتحرك على (D)، إذن مجموعة النقط B
هي صورة (D) بالتشابه المباشر S.



نشاط4 :مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين و التحويل: $z' = a\bar{z} + b$

1) ABC مثلث حيث $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \alpha[2\pi]$ و $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right) \equiv \beta[2\pi]$.

S_{AB} هو التناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم (AB) ؛ S_{AC} هو التناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم (AC) ؛ $R_{(A;2\alpha)}$ هو الدوران الذي مركزه A و زاويته 2α .

أ) بيّن ان $R_{(A;2\alpha)} = S_{AC} \circ S_{AB}$.

ب) اكتب الدّوران $R_{(B;\beta)}$ الذي مركزه B و زاويته β على شكل مركب تناظرين محوريين يطلب تعيينهما.

2) T هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث:

$z' = \frac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)\bar{z} + 3 + i\sqrt{3}$.

أ) بيّن ان $T = R \circ s$ علما ان s هو التناظر بالنسبة إلى محور الفواصل و R تحويل نقطي يطلب تعيين طبيعته و عناصره المميزة.

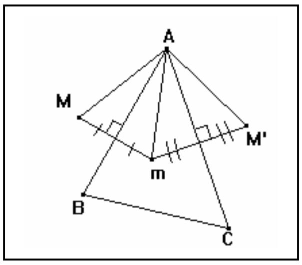
ب) استنتج طبيعة T و عناصره المميزة.

إرشادات حول الحل

يهدف هذا النشاط إلى:

- تركيب تناظرات محورية (المستقيمات متلاقية في نقطة) و تفكيك دوران إلى تركيب تناظرين محوريين. ويمكن اقتراح نشاط أخر من نفس النوع حول الانسحاب.
- دراسة التحويل $M(z) \mapsto M'(z'): z' = a\overline{z} + b$ في الحالة الخاصة : $|a| = 1$ و $\frac{b}{1-a} \in IR^* - \{1\}$.

التشابه غير المباشر خارج البرنامج.



1) أ) من أجل كل نقطة M ($M \neq A$) :

$S_{AB}(M) = m$ و $S_{AC}(m) = M'$

نستنتج ان $AM = AM'$.

و لدينا أيضا $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}\right) = 2\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ ،

نتأكد من : $(S_{AC} \circ S_{AB})(A) = A$.

إذن $S_{AC} \circ S_{AB} = R_{(A;2\alpha)}$.

ب) (Δ_1) مستقيم كيفي يشمل النقطة B ، (Δ_2) هو صورة (Δ_1) بالدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{\beta}{2}$. لدينا $R(B;\beta) = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$.

2) أ)

$$\begin{tikzcd}
M(z) \arrow[r, mapsto, "s"] \arrow[dr, mapsto, "T"'] & M'(z') : z' = \overline{z} \arrow[d, mapsto, "R"] \\
 & M''(z''): z'' = \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right) z' + 3 + i\sqrt{3}
\end{tikzcd}$$

R هو الدوران الذي مركزه $\Omega(2;0)$ و زاويته $\frac{4\pi}{3}$ و نرمز له $R\left(\Omega;\frac{4\pi}{3}\right)$.

ب) لدينا $T = R\left(\Omega;\frac{4\pi}{3}\right) \circ s$ و $R\left(\Omega;\frac{4\pi}{3}\right) = S_D \circ s$ علما ان S_D هو التناظر بالنسبة إلى المستقيم (D) الذي هو صورة محور الفواصل بالدوران الذي مركزه $\Omega(2;0)$ و زاويته $\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ أي $\frac{2\pi}{3}$ (انظر السؤال 1) ب)).

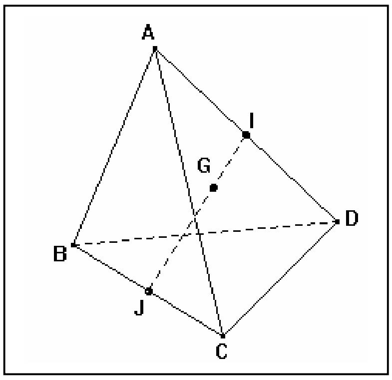
نستنتج $T = S_D \circ s \circ s$ أي $T = S_D$.

الهندسة في الفضاء

نعمم تعريف الجداء السلمي في المستوي إلى أشعة الفضاء ونقدم في هذه المناسبة المسقط العمودي على مستقيم أو على مستو. مراجعة تطبيقات الجداء السلمي في المستوي تكون عندئذ مفيدة.
نسجل كذلك ان الدراسة التحليلية للمستقيم و المستوي في الفضاء ، توفر فرصا لحل جمل خطية.
ويجب ان يعرف التلميذ انه يمكن تمثيل مسقيم في الفضاء بجملة معادلتين خطيتين.

نشاط1 : إعادة استثمار المعارف – الإستقامية في الفضاء .

ABCD رباعي وجوه . I هي منتصف [AD] و J منتصف [BC] .
G هي مرجح الجملة $\{(A,2);(B,1);(C,1);(D,2)\}$.
برهن ان النقط G ، I ، J على استقامة واحدة .

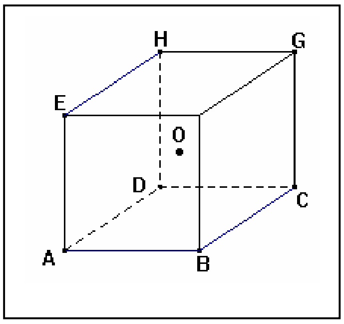


إرشادات حول الحل

يجد هنا التلميذ فرصة أخري لإعادة استثمار معارفه (المرجح،علاقة شال،الاستقامية في الفضاء).
لدينا $2\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}\right)+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
نستنتج بسهولة ان $\overrightarrow{IJ}-3\overrightarrow{IG}=\vec{0}$ أي النقط G ، I ، J على استقامة واحدة .

نشاط2 : حساب الجداء السلمي بمختلف عباراته.

ABCDEFGH مكعب مركزه O و طول حرفه m . احسب الجداءات السلمية الآتية:
أ) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BF}$ ب) $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{BA}$
جـ) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}$ د) $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BG}$



إرشادات حول الحل

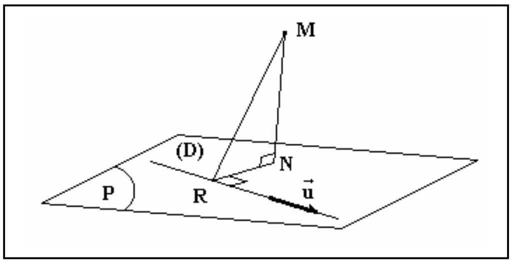
يمكن اقتراح أنشطة من هذا النوع لتدريب التلميذ حول حساب الجداء السلمي في وضعيات مختلفة.
أ) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BF}=m^2$
ب) A هي المسقط العمودي للنقطة H على المستقيم (AB) و منه $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{BA}=-m^2$

جـ) المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (AB) هي المنتصف J للقطعة [AB] و منه
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}=\frac{m^2}{2}$$
د) نعتبر المعلم المتعامد و المتجانس $\left(D;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ حيث
$$\vec{i}=\frac{1}{DA}\overrightarrow{DA} \text{ و } \vec{j}=\frac{1}{DC}\overrightarrow{DC} \text{ و } \vec{i}=\frac{1}{DH}\overrightarrow{DH}$$
لدينا A (m ؛0؛0) ؛ E (m؛0؛m) ؛ B (m ؛m؛0) ؛ G(0؛m؛m)
إذن $\overrightarrow{AE}(0;0;m)$ و $\overrightarrow{BG}(-m;0;m)$ ؛ نستنتج ان $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BG}=m^2$.

نشاط3 : استعمال الجداء السلمي في البرهان على التعامد.

(P) مستو يشمل المستقيم (D) ، M نقطة لا تنتمي إلى (P) . N هي المسقط العمودي للنقطة M على (P) و R هي المسقط العمودي للنقطة N على(D) .

برهن ان $(D) \perp (MR)$.



حل مختصر

يوظف هنا التلميذ مكتسباته في الأشعة و الجداء السلمي ليبرهن نتيجة معروفة بـ: " مبرهنة الأعمدة الثلاثة".

$\vec{u}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D) .

نبين بسهولة ان : $\overrightarrow{MR}.\vec{u} = 0$

أي $(D) \perp (MR)$.

النشاط4: حل جملة خطية

عين تقاطع المستويات : $(P_1): 4x + 3y + z + 2 = 0$

$(P_2): x + 2y + z - 5 = 0$ و $(P_3): 3x + 5y + 2z - 9 = 0$

إرشادات حول الحل

الهدف من هذا النشاط هو أساسا حل جملة خطية لثلاث معادلات لثلاثة مجاهيل.

يمكن حل هذه الجملة بطرق مختلفة ،نقترح مثلا:

الجملة $\begin{cases} 4x + 3y + z + 2 = 0 \\ x + 2y + z - 5 = 0 \\ 3x + 5y + 2z - 9 = 0 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} \begin{cases} 4x + 3y = -z - 2 ....(1) \\ x + 2y = -z + 5 ....(2) \end{cases} \\ 3x + 5y + 2z - 9 = 0 ....(3) \end{cases}$

نحل الجملة $\begin{cases} 4x + 3y = -z - 2......(1) \\ x + 2y = -z + 5........(2) \end{cases}$ ونجد $\begin{cases} x = \frac{1}{5}z - \frac{19}{5} \\ y = -\frac{3}{5}z + \frac{22}{5} \end{cases}$

الجملة $\begin{cases} 4x + 3y + z + 2 = 0 \\ x + 2y + z - 5 = 0 \\ 3x + 5y + 2z - 9 = 0 \end{cases}$ تكافئ إذن $\begin{cases} x = \frac{1}{5}z - \frac{19}{5} \\ y = -\frac{3}{5}z + \frac{22}{5} \\ 3x + 5y + 2z - 9 = 0 \end{cases}$

أي
$$\begin{cases} x=\frac{1}{5}z-\frac{19}{5} \\ y=-\frac{3}{5}z+\frac{22}{5} \\ 3\left(\frac{1}{5}z-\frac{19}{5}\right)+5\left(-\frac{3}{5}z+\frac{22}{5}\right)+2z-9=0 \end{cases}$$
أي
$$\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \\ z=4 \end{cases}$$

نستنتج ان للمستويات (P_1) و (P_2) و (P_3) نقطة مشتركة وحيدة هي $A(-3;2;4)$.

النشاط5: المسافة بين نقطة و مستو

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ،المستويين :

$(P_1): 2x-y-2z-1=0$ و $(P_2): 3x+4y=0$

M نقطة كيفية في الفضاء.

$d(M;P_1)$ هي المسافة بين M و (P_1)، $d(M;P_2)$ هي المسافة بين M و (P_2) .

عين المجموعة (Ψ) للنقط M حيث $d(M;P_1)=d(M;P_2)$

إرشادات حول الحل

يهدف هذا النشاط إلى تفعيل مفهوم المسافة بين نقطة و مستو في الفضاء .

نقطة $M(x;y;z)$ من الفضاء تنتمي إلى (Ψ) إذا و فقط إذا كان $d(M;P_1)=d(M;P_2)$

أي $\frac{|2x-y-2z-1|}{3}=\frac{|3x+4y|}{5}$ أي $25(2x-y-2z-1)^2-9(3x+4y)^2=0$

أي $(x-17y-10z-5)(19x+7y-10z-5)=0$

أي $[(19x+7y-10z-5)=0$ أو $(x-17y-10z-5)=0]$

نسمي (Q_1) المستوي الذي معادلته $(19x+7y-10z-5)=0$

و (Q_2) المستوي الذي معادلته $(x-17y-10z-5)=0$

لدينا $(\Psi)=(Q_1)\cup(Q_2)$

يمكن اقتراح نشاط أخر نعطي فيه معادلات مجموعات نقطية (E_1) و (E_2) و (E_3) و نطلب إيجاد معادلة المجموعة $(E_1)\cup(E_2)\mathbf{U}(E_3)$

نشاط6 : حساب أقصر مسافة بين مستقيمين

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط

A(3 ;-2 ;-1) و B(-1 ;-1 ;0) و C(0 ;1 ;2) و <D(-6 ;2 ;4)>

1) بين تقاطع المستقيمين (AB) و (CD) . هل(CD) //(AB)؟

2) عين أقصر مسافة بين (AB) و (CD) .

إرشادات حول الحل

يهدف هذا النشاط إلى : - تعيين تمثيلا وسيطيا لمستقيم .
- حل جملة خطية .
- $(\Delta)\cap(\Delta')=\varnothing$ لا يعني حتما ان $(\Delta)//(\Delta')$.
- توظيف الجداء السلمي في الفضاء .
- كيفية حساب أقصر مسافة بين مستقيمين في الفضاء.

يمكن ان نساعد التلميذ بطريقة غير مباشرة في السؤال الثاني(نطلب مثلا قبل هذا السؤال إيجاد المستقيم الذي يعامد (AB) و (CD)).

1) نبحث عن $(CD)\cap(AB)$:

- أولا : لنعين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)، نجد : $\begin{cases}x=3-4\lambda\\ y=-2+\lambda\\ z=-1+\lambda\end{cases}$ و $\lambda\in IR$

و تمثيلا وسيطيا للمستقيم (CD) ونجد : $\begin{cases}x=-6\alpha\\ y=1+\alpha\\ z=2+2\alpha\end{cases}$ و $\alpha\in IR$

- ثانيا : لنعين $(CD)\cap(AB)$:

نحل الجملة $\begin{cases}\begin{cases}x=3-\lambda\\ y=-2+\lambda\\ z=-1+\lambda\end{cases}\\ \begin{cases}x=-6\alpha\\ y=1+\alpha\\ z=2+2\alpha\end{cases}\end{cases}$ و نلاحظ انها لاتقبل أي حل و

منه $(CD)\cap(AB)=\varnothing$.

- هل(AB)// (CD)؟

لا يوجد أي عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ ، إذن (AB) لا يوازي(CD).

2) نبحث عن أقصر مسافة بين (AB) و (CD) :

$M(3-4\lambda;-2+\lambda;-1+\lambda)$ نقطة كيفية من (AB)

و $N(-6\alpha;1+\alpha;2+2\alpha)$ نقطة كيفية من (CD) .

تكون MN أقصر مسافة بين (AB) و (CD) إذا و فقط إذا كان :

$\begin{cases}(MN)//(AB)\\ (MN)//(CD)\end{cases}$ أي $\begin{cases}\overrightarrow{MN}\bullet\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{MN}\bullet\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}2\lambda-3\alpha=2\\ 27\lambda-41\alpha=27\end{cases}$ أي $\begin{cases}\lambda=1\\ \alpha=0\end{cases}$

أقصر مسافة بين (AB) و (CD) هي MN في الحالة $\begin{cases}\lambda=1\\ \alpha=0\end{cases}$ أي 3 .

المقاطع المستوية للسطوح

مقطع مستو لسطح معادلته $z=f\left(x;y\right)$ بمستو (P) في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ هو منحن (C) محتواة في (P) ومعادلته من الشكل $g\left(x;y\right)=0$ (أو $g\left(y;z\right)=0$ أو $g\left(x;z\right)=0$).

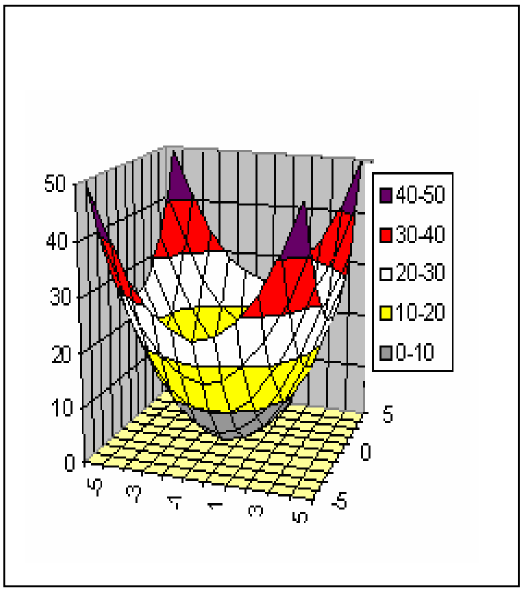
نهتم أكثر بالوضعيات التي يكون فيها (C) تمثيلا بيانيا لدالة عددية لمتغير حقيقي.

ويمكن مشاهدة مقاطع مستوية لسطوح بواسطة برمجيات مناسبة.

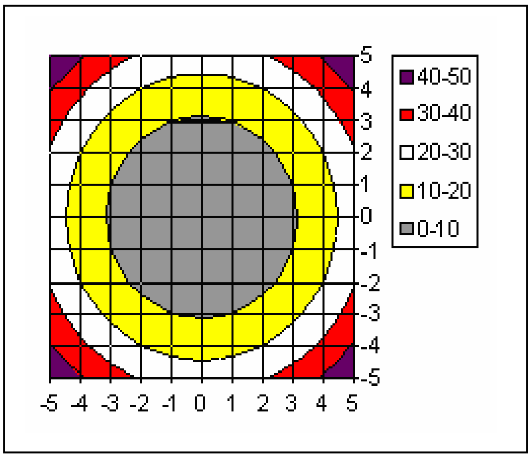
بالنسبة إلى القطوع يمكن معالجة نشاط يتعلق بالبحث عن مجموعة النقط التي تؤول إلى قطع من القطوع التي نص عليها البرنامج مع تمثيلها والاقتصار في ذلك على الدراسة التحليلية.

مثال : استعمال المجدول إكسال لتمثيل سطح المجسم المكافئ(S) الذي معادلته $z=x^2+y^2$ **في المعلم المتعامد و المتجانس** $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ **،** $x\in\left[-5;5\right]$ **و** $y\in\left[-5;5\right]$ **و ثم لمشاهدة المنظر العلوي و الخطوط المستوية لــ :(S) .**

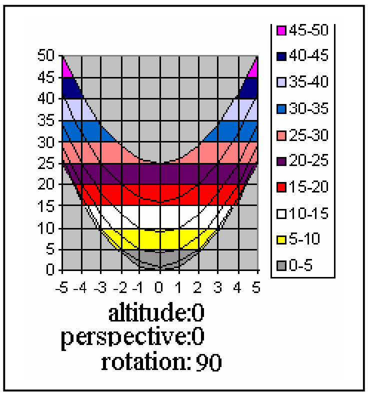
- نرسم المجسم المكافئ المطلوب



- مشاهدة المنظر العلوي لـ : **(S)**



- خطوط مستوية للسطح ، عندما نقطعه بمستويات توازي:
أ) المستوي yOz (معادلته x=m):



نشاط1: تعيين مقطع مستو لسطح مستو معطى بمستو معطى في معلم متعامد ومتجانس

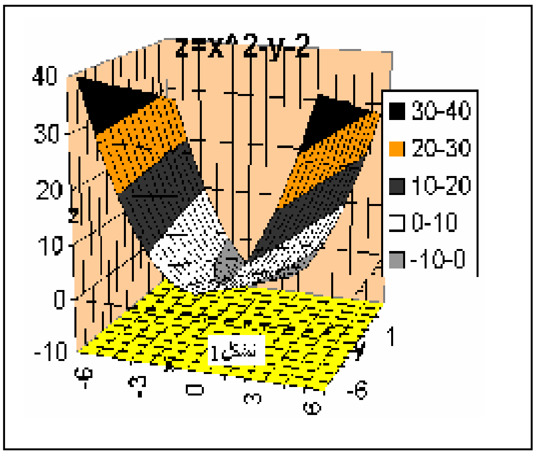
(S) سطح مستو معادلته $z = x^2 - y - 2$.

1) ماهي طبيعة مقطع (S) بالمستوي (P) الذي معادلته $y = 2$ ؟

أنشئ هذا المقطع في معلم للمستوي (P).

2) ماهي طبيعة مقطع (S) بالمستوي (Q) الذي معادلته $x = 3$ ؟

إرشادات حول الحل

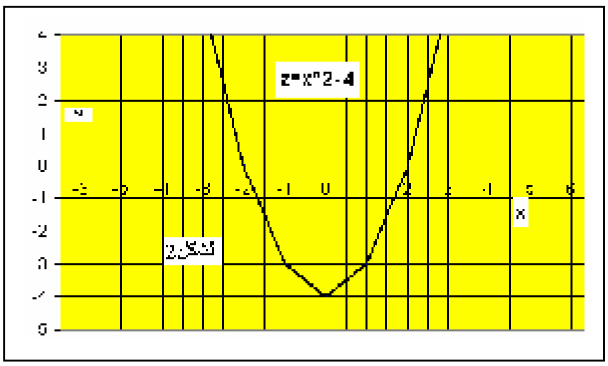


الشكل 1 يمثل السطح (S).

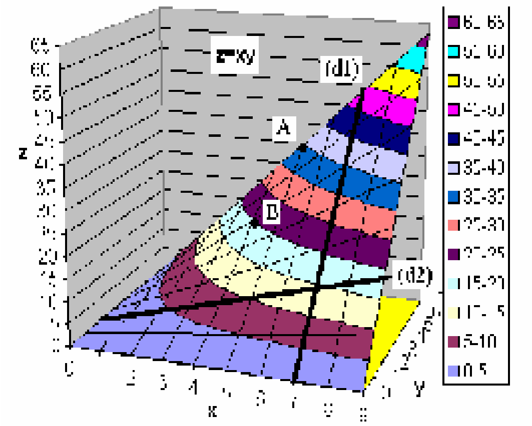
1) مقطع (S) بالمستوي (P) هو القطع المكافئ (C) الذي معادلته $z = x^2 - 4$ و المحتواة في (P) .

الشكل 2 هو التمثيل البياني للقطع المكافئ (C) في المعلم $\left(A;\vec{i},\vec{k}\right)$ للمستوي (P)

علما ان $\overrightarrow{OA} = 2\vec{k}$.



2) مقطع (S) بالمستوي (Q) هو المستقيم الذي معادلته z=7-y المحتواة في (Q).



نشاط2 : تعيين احداثيات نقط تنتمي إلى سطح.

x عدد حقيقي ينتمي إلى [0؛9] و y عدد حقيقي ينتمي إلى [0؛7].

معادلة السطح المقابل هي z=xy .

1) اكتب معادلة المستقيم (d1) و معادلة المستقيم (d2).

2) جد إحداثيات النقطتين A و B.

إرشادات حول الحل

1) معادلة (d1) هي : $\begin{cases} x=7 \\ z=7y \end{cases}$ و معادلة (d2) هي : $\begin{cases} y=2 \\ z=2x \end{cases}$.

2) A(5;7;35) و B (4؛4؛16)

نشاط3 : دراسة دالة عددية لمتغير حقيقي لتعيين مقطع سطح بمستو .

$\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم للفضاء. (S) سطح مخروطي دوراني معادلته $z^2=x^2+y^2$.

(C)هو مقطع (S) بالمستوي (P) الذي معادلته y=4 .

1) M(x ;y ;z) نقطة من (C) . عبر عن z بدلالة x .

2) f هي الدالة العددية للمتغير الحقيقي x حيث $f(x)=\sqrt{x^2+16}$ ، (C_f) هو تمثيلها البياني في المعلم $\left(A;\vec{i},\vec{k}\right)$ علما $A(0;4;0)$.

ادرس تغيرات الدالة f وثم عين المستقيمين المقاربين للمنحنى (C_f). أنشئ (C_f).استنتج (C) .

3) اكتب معادلة (C) في معلم منسوب إلى مستقيميه المقاربين.

إرشادات حول الحل

(1

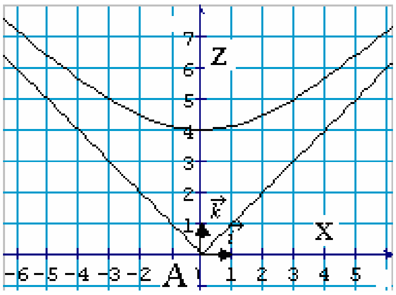
$M(x;y;z)\in(C)$ يعني $\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ y=4 \end{cases}$ أي $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+16} \\ y=4 \end{cases}$ أو $\begin{cases} z=-\sqrt{x^2+16} \\ y=4 \end{cases}$

2) الدالة f معرفة على R و $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f=+\infty$.

من أجل كل x من R، لدينا : $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}}$

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين: $(\Delta_1):z=x$ و $(\Delta_2):z=-x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$+\infty$ ↘	3	↗ $+\infty$



3) (C)هو اتحاد (C_f) و المنحني (C_g) الذي يمثل الدالة $x \mapsto g(x) = -\sqrt{x^2+16}$.

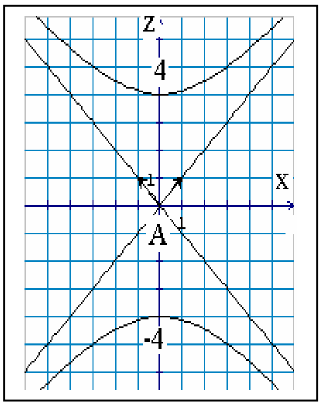
لدينا من أجل كل x من R : g(x)=-f(x) إذن (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى $(A;\vec{i})$

4) I(1 ;1) هي نقطة من (Δ_1) و K(-1 ;1) نقطة من (Δ_2).

(x ;y) هما إحداثيا M في المعلم $(A;\vec{i},\vec{k})$ و(X ;Y) إحداثيا M في المعلم $(A;\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AK})$.

لدينا : $\overrightarrow{AM} = X\overrightarrow{AI} + Z\overrightarrow{AK} = X(\vec{i}+\vec{k}) + Z(\vec{i}-\vec{k}) = (X+Z)\vec{i} + (X-Z)\vec{k}$

منه $\begin{cases} x = X+Z \\ z = X-Z \end{cases}$



في المعلم $(A;\vec{i},\vec{k})$: $M \in (C)$ يعني $x^2 + 16 = z^2$

في المعلم $(A;\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AK})$: $M \in (C)$ يعني

$$(X+Z)^2 + 9 = (X-Z)^2$$

أي $XZ = -4$ إذن (C) قطع زائد.

نشاط4: إيجاد معادلة المستوي الذي يمس سطح مخروطي دوراني(S) معطى في نقطة A من(S)

(S) سطح مخروطي دوراني معادلته $x^2+y^2-z^2=0$ في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. اكتب معادلة المستوي (P) الذي يمس (S) في النقطة A(3 ;4 ;5) .

إرشادات حول الحل

المستوي الذي معادلته z=5 يقطع (S) وفق الدائرة (C)التي مركزها B(0 ;0 ;5) ونصف قطرها 5 إذن معادلتها هي $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ z=5 \end{cases}$

نسمي (T) المستقيم المحتواة في المستوي الذي معادلته z=5 و الذي يمس الدائرة (C) في النقطة A(3 ;4 ;5) .

نبين ان معادلة المستوي (P)هي:3x+4y-5z=0 .

توجيهات عامة

التقويم:

1) التقويم حجر زاوية في العملية التعليمية/التعلمية.

يعتبر التقويم سمة رئيسية في السلوك البشري بالنظر إلى دوره في بناء نظرة عن شيء ما، أو في تحسين مردود عمل معين. ولا ينئ بهذه القاعدة في العملية التعليمية/التعلمية باعتباره العمود الفقري الذي يساعد على حمايتها من الانزلاقات التي قد تفرزها عملية تجسيدها في إطار اختيارات و توجهات البرنامج.

إن هذه الاختيارات تجعل من التقويم جزء لا يتجزء من العملية التعليمية/التعلمية فتمدده على كل مراحلها إلى أن يلتف حولها، فيكون قبل التعلم و أثناءه و بعده. و لا يتوقف عند معرفة الخطأ أو النقص أو العقبات التي تصادف التلميذ أو الأستاذ، كما لا ينزوي في خانة التركيز على التلميذ كإعطاء علامة له، و لا يحد بزمن معين من حصة الدرس و لا بموقف معين منها. بل هو جزء من الممارسات التي تتم في قاعة الدرس بشكل منسجم بين الأستاذ و التلاميذ و يكون أحيانا نتاج إفرازات تقتضيها طبيعة العملية نفسها كأن يلاحظ الأستاذ في ملامح وجه التلميذ نوع من الحيرة والتساؤل التي لم تتبلور بعد في ذهنه و غير المعلن عنها من قبله تصريحا أو تلميحا.

إن التقويم الذي يتبناه هذا البرنامج يمكن أن نطلق عليه مصطلح التقويم التربوي الذي تتفاعل فيه الجوانب المعرفية و الوجدانية و الحس حركية عند كل من الأستاذ و التلميذ معا و سويا و ليس بشكل منفرد كل على حدة. لذلك فمن العبث أن نحاول في هذا المقام إعطاء طريقة نموذجية تتكفل بتفاعل هذه الجوانب. ولكننا نقدم خطوطا عريضة، في إطار المقاربة بالكفاءات، تسمح للأستاذ عند العمل بها، بتنظيم أدائه و تحسين مردود عمله في قاعة الدرس بما ينعكس إيجابيا على عمل تلاميذه على المديين القريب و البعيد. تتلخص هذه الخطوط في تحري الإجابة بصفة دائمة عن التساؤلات الرئيسية المتعلقة بالتقويم و التي تعطي معنى له و تتمثل في الأسئلة: "متى أقوم؟" و "ماذا أقوم؟ " و "كيف أقوم؟ " و "لماذا أقوم؟". إن محاولات الإجابة على هذه الأسئلة كفيلة بإحالة الأستاذ على التفكير في الفترات التي يخصصها للتقويم خلال حصة الدرس و في الأشياء التي يقومها في درسه و في الكيفية التي ينفذ بها ذلك و الأدوات الضرورية له و لتلاميذه للقيام بهذه المهمة إضافة إلى التفكير في أهداف هذه العملية.

إن المقاربة بالكفاءات تعتبر موجها و إطارا لهذا التفكير تمده بالأفكار الرئيسية للإجابة، تلك الإجابة التي نوجزها في الفقرة الموالية و المعنونة بفترات مخصصة للتقويم.

2) فترات مخصصة للتقويم.

- **قبل التعلم:**

يطلق على التقويم الذي يجرى في بداية الحصة مصطلح " **التقويم التشخيصي**" استنادا إلى وظيفته التي هي المساعدة على معرفة و تشخيص الوضعية الحالية لمكتسبات التلاميذ الضرورية لهذه الحصة و التي تنحصر عادة في إما أنها متوفرة فقط عند التلميذ أو أنها جاهزة للتوظيف من قبله أي أنه قادر على تجنيدها. و عادة ما يتم تجسيد ذلك بواسطة أسئلة معدة سلفا تطرح شفهيا أو كتابيا ليجيب عنها التلميذ أو من خلال تقديم نشاط له. إن التحقق من إحدى الصفتين اللتين تحملهما مكتسبات التلاميذ أمر ضروري لمواصلة العمل في اتجاه الهدف من هذا التقويم و هو العمل على إحداث التجانس على مستوى المعارف المقصودة هنا و من ثم الانطلاق في المرحلة الموالية لتقديم الجديد من الدرس.

. **أثناء التعلم:**

يطلق على التقويم الذي يجرى خلال عملية التعلم أي عندما يكون التلاميذ منهمكين في البحث في مشكل أو في أنجاز عمل و بصفة عامة عندما يكونون في حالة تعامل مع ما يعرض عليهم مصطلح " **التقويم التكويني** ". إن التلاميذ و هم في هذه الحال، لا شك يجيبون عن أسئلة و يطرحون استفسارات و يقدمون مقترحات ... إلخ. إن هذا النشاط يعطي للأستاذ بادئ ذي بدء و هو يستمع لإجاباتهم و يلاحظ أعمالهم، نظرة أولية عما حققه بعضهم من تعلم دون البعض الآخر من ثم يتعمق في معالجة الوضعية بإعادة الشرح مثلا أو تقديم تطبيق إضافي إن كان الأمر يتعلق بتقنيات حسابية أو خوارزميات أو نشاط تعلمي خاص بالغموض الذي أحاط بالمفهوم مثلا ... إلخ من الإمكانيات التي لا يمكن حصرها في هذا المقام. إن التقويم التكويني لا ينبع من الاستماع إلى إجابات التلاميذ أو ملاحظة أعمالهم، فحسب، بل و ينبع أيضا من توقعات الأستاذ و تنبؤاته لمواقع الصعوبة التي يمكن أن تعترض التلميذ و التي يستند في البحث عنها و كشفها إلى رصيده العلمي، الذي يعمل على إثرائه بصفة مستمرة في الحدود التي تسمح له بأداء مهامه، وإلى رصيده المعرفي الذي تعتبر التجربة المهنية و الخبرة في الممارسة جزء منه. و الجدير بالذكر في هذا الباب هو أن الرغبة الملحة في تحسين الأداء و الرفع من المردود، تعتبران من أكبر البواعث لدى الأستاذ للبحث عن الصعوبات التي تعترض عملية التعلم عند التلميذ و من أقوى المحفزات له.

. **بعد التعلم:**

بعد أن ينتهي الأستاذ من تقديم التعلم المقصود يشرع في حوصلة المكتسبات الجديدة للتلاميذ من خلال تقويم هذه التعلمات، و يتم ذلك بأشكال مختلفة منها الأسئلة المباشرة، الاستجوابات، الفروض المحروسة، الفروض المنزلية، الأبحاث، مما يعني أن التقويم بعد التعلم يمكن أن يكون في نفس الحصة كما يمكن أن يكون خارجها. و بما أنه يتجسد على أرضية التعلمات الجديدة لمعرفة نتائجها و حصيلتها فقد اصطلح على تسميته " **التقويم التحصيلي** ".

إن هذا التقويم يهدف إلى مساعدة الأستاذ في إصدار حكم قيمي على مستوى التلميذ ليس فقط فيما يتعلق بالتعلمات المستهدفة حديثا بل و أيضا فيما يتصل بتعلمات أخرى سابقة لها، و هذا من منطلق أن أدوات هذا التقويم أوسع و أشمل من أدوات التقويمين السابقين، إذ تعتبر هنا الأنشطة الإدماجية وسيلة ناجعة و فعالة و ضرورية لتجسيده و ذات مصداقية أكبر في تثبيت الحكم و من ثم اتخاذ القرار المناسب، فإما علاج للنقائص و إما تدعيم للمكتسبات.

3) تحضير التلاميذ لامتحان البكالوريا:

إن المرور من نظام تقويم يرتكز على تراكم المعارف واسترجاعها واعتماد نفس الأنماط لحل المسائل إلى نظام يقتضي تجنيدا واعيا ومتحكما فيه للمعارف والموارد **يتطلب مرحلة انتقالية** لإرساء هذا النظام الجديد.

خلال هذه المرحلة الانتقالية، يخصص للتعلم في القسم حيزا معتبرا لتجنيد المعارف واستعمالها في أنشطة إدماجية أو "وضعيات - مشكل" متنوعة.

وباعتبار أن مواضيع امتحان البكالوريا ستتضمن مستقبلا، إلى جانب الشكل التقليدي للامتحان الذي سيحوز على نسبة تقارب الثلثين في السنوات الأولى، جزء موجها لتقويم الكفاءات من خلال اقتراح مسألة إدماجية تهدف إلى قياس درجة تحكم المتعلم في مجموعة من الكفاءات الرياضياتية والكفاءات العرضية المستهدفة في مرحلة التعليم الثانوي.

تتمثل المسألة الإدماجية في وضعية مركبة وغير معقدة، ذات دلالة بالنسبة إلى المتعلّم وتراعى فيها درجة التوجيه لمساعدة المتعلم، بما يسمح بقياس قدراته على توظيف موارده لحلّ مشكلات بنفسه.

ولتدعيم البعد الإدماجي، فإن المفاهيم المقررة في البرامج السابقة للسنة الثالثة ثانوي لا يجب أن تكوّن أساس موضوع الاختبار سواء كان ذلك في الباكالوريا أو الامتحانات والفروض الفصلية، غير أن هذا لا يعفي التلاميذ من استعمال هذه المفاهيم عندما يتطلب الأمر ذلك.

من هذا المنظور، يعمل الأساتذة على تدريب التلاميذ على هذا النمط الجديد للتقويم ابتداء من السنة الثانية ثانوي، حتى تتاح لهم فرصا أكثر للتأقلم معه.

4) الإدماج:

لقد شكّلت مسألة تحويل المعارف لمدة طويلة إحدى انشغالات الباحثين في علوم التربية، إذ أنّ دور المدرسة لا يتمثّل في تدريس أشياء لمطالبة المتعلمين بعد ذلك باسترجاعها كما هي. بل يتعلّق الأمر بمساعدتهم على استعمال مكتسباتهم في وضعيات متنوعة سواء أكانت مدرسية أو غير مدرسية.

في هذا الإطار تبرز أهمية الإدماج كمسعى يهدف إلى تحديد كيفيات اكتساب المعارف في القسم وفي نفس الوقت توظيفها وإعادة هيكلتها وتحويلها.

يرتكز الإدماج على سيرورة تعلّم لا تقتصر فقط على اكتساب معارف ومهارات بل تهتم أيضا بتجنيد هذه المعارف والمهارات في وضعيات لها دلالة بالنسبة إلى التلميذ.

من أهداف نشاطات الإدماج :

- جعل التلاميذ في وضعية مركبة، لها دلالة بالنسبة إليهم، تتطلّب تجنيد مجموعة من الموارد.
- تدريب التلاميذ على استعمال مكتسباتهم (معارف ومهارات) في وضعيات مستقاة من محيطهم الاجتماعي والثقافي.
- ترسيخ المعارف السابقة وإعادة هيكلتها وخلق روابط بينها.

إنّ التحكّم في عناصر متشتتة لا يؤدي مباشرة إلى إمكانية استعمالها في وضعيات إدماجية، فمعرفة مبرهنة أو قواعد استعمالها لا تعني شيئا دون التوظيف في الوقت والموضع المناسبين.

للتكفل بأنشطة الإدماج في هذا البرنامج الذي يرتكز على الكفاءات، نقترح تخصيص فترات منتظمة، كلما توفرت مجموعة من الكفاءات التي يمكن تجنيدها لحل وضعيات مركبة لها دلالة بالنسبة إلى التلاميذ.على أن لا تتحوّل حصص الإدماج هذه إلى حصص للمراجعة التقليدية أو لحل تمارين بدون هدف مسطر.

نقترح فيما يلي بعض الأمثلة كأدوات يمكن استعمالها في مختلف فترات التقويم.

1.صحيح أم خطأ

يهدف هذا الجزء إلى تقويم مستوى فهم التلاميذ للمفاهيم المدروسة في كل ميدان ويساعد الأستاذ على اكتشاف الثغرات.

1.ميدان الحساب

1. x و y و z أعداد صحيحة غير معدومة.
إذا كان x يقسم y و x يقسم z فإن x^2 يقسم yz .
2. a و b عددان طبيعيان مع $b \neq 0$ و حيث $a = 10b + 8$ ، يكون عندئذ 8 هو باقي قسمة a على b .
3. من أجل كل عدد طبيعي n ، 16 يقسم $17^n - 1$.
4. يوجد عنصران a و b من IN^* حيث $a + b = 500$ و $PGCD(a;b)=7$.
5. كل عدد فردي أولي مع كل عدد زوجي.
6. إذا قسم العدد الأولي p جداء عوامل أولية فإن p يساوي أحد عوامل الجداء.
7. إذا كان p عددا أوليا و n عنصرا كيفيا من IN^* فإن $PGCD(p;n)=1$.
8. p_1 و p_2 و p_3 أعداد أولية . العدد الطبيعي $p_1{}^4 \times p_2 \times p_3{}^6$ مربع تام.
9. x و y عددان صحيحان حيث $3x+21y=3$، نستنتج ان $PGCD(x;y)=1$.
10. لايمكن ان يكون $PPCM(a;b) = a \times b$.
11. إذا كان 2 يقسم 14n فإن n زوجي .
12. إذا كان 11 يقسم $a \times b$ فإن 11 يقسم a أو 11 يقسم b .
13. إذا كان $n \equiv 2[3]$ و $n \equiv 3[4]$ فإن $n \equiv 6[12]$.
14. a عدد طبيعي و b عدد طبيعي غير معدوم . الكسر $\frac{a}{b}$ غير قابل للاختزال و a عدد أولي ، إذن b أولي.
15. الرقم الآحاد في 3^{2005} هو 5 .

2. ميدان التحليل

1. إذا كان $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ فإن $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
2. إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال $[a;b]$ وكان $f(a)\times f(b) > 0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل أي حل في المجال $[a;b]$.
3. المعادلة $x^6 + 6x + 1 = 0$ لا تقبل أي حل في IR .
4. المعادلة $\cos x = x$ تقبل حلا على الأقل في المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
5. الدالة f المعرفة على IR بـ: $f(x) = (x-2)^3$ متزايدة تماما على IR .
6. إذا كان $f'(x_0) = 0$ فإن $f(x_0)$ هي إما قيمة كبرى إما قيمة صغرى للدالة f .

7. مشتقة الدالة $x \mapsto e^{5x}$ هي $x \mapsto e^{5x}$.

8. من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{-x} \leq 1$.

9. لا يمكن حساب $\text{Ln}(a \times b)$ إلاّ إذا كان $a>0$ و $b>0$.

10. الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto 7^{x}$ هي $x \mapsto x.7^{x-1}$.

11. من أجل كل a من IR_+^* و كل b من IR_+^* : $\text{Ln}\, a - \text{Ln}\, b = \dfrac{\text{Ln}\, a}{\text{Ln}\, b}$.

12. من أجل كل عدد حقيقي x : $\text{Ln}(x^2+1) < \text{Ln}(x^2+2)$.

13. من أجل كل عدد حقيقي x : $\text{Ln}(x^4) = 4\text{Ln}\, x$.

14. مجموعة حلول المتراجحة $\left(\dfrac{1}{7}\right)^x \geq 3$ هي $\left]-\infty; \dfrac{\text{Ln}3}{\text{Ln}7}\right]$.

15. إذا كانت كل حدود متتالية مختلفة و موجبة تماما فإن هذه المتتالية متزايدة تماما.

16. كل متتالية (u_n) حيث $u_{n+1} = u_n - (u_n)^2$ متزايدة .

17. إذا كانت الدالة f مستمرة على $[\alpha;\beta]$ فإن $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

18. $\int_0^7 7dx = 7$.

19. $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx \geq \int_0^1 x^2\, dx$.

20. $x \mapsto \text{Ln}(x^2+1)$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$.

21. الدالة $x \mapsto x\text{Ln}\, x - x$ المعرفة على IR_+^* هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \text{Ln}\, x$ المعرفة على IR_+^*.

22. الدالة F المعرفة على IR_+ حيث $F(x) = \int_0^x e^{-u}\sqrt{u}\, du$:بـ متزايدة على IR_+.

23. الدالة $x \mapsto 2^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y' - y\,\text{Ln}2 = 0$.

24. إذا كانت الدالة f حلا حل للمعادلة التفاضلية $y' + y = 1$ فإن f متزايدة على IR.

3. ميدان الاحتمالات

1. الحادثتان A و B مستقلتان يعني ان $p_A(B)=p(B)$.
2. الحادثتان A و B غير متلائمتين إذن مستقيلتين.
3. احتمال الحادثة A في تجربة عشوائية هو 0,15. نكرر 10 مرات هذه التجربة . الاحتمال كي يتحقق A مرة على الأقل هو $(0,15)^{10}$.
4. إذا كان المتغير العشوائي X يتبع القانون الأسي الذي وسيطه λ فإن $p(X>t)=e^{-\lambda t}$.

تمارين:

تمرين1:

وعاءان V_1 و V_2 يحتويان على كرات لا يمكن التمييز بينها عند اللمس. يحتوي الوعاء V_1 على n كرة بيضاء و3 كرات خضراء (مع $n\geq 1$) ويحتوي الوعاء V_2 على كرتين بيضاوين وكرة خضراء.
نقوم بالتجربة الآتية: نسحب عشوائيا كرة من V_1 و نضعها في الوعاء V_2، ثمّ نسحب عشوائيا من هذا الأخير كرة ونضعها في الوعاء V_1.

1. نعتبر الحادثة A: « لا يتغير وضع الكرات في الوعاءين بعد الانتهاء من التجربة ».
   أ. برهن أنّ الاحتمال $P(A)$ لتحقق الحادثة A يمكن أن يكتب على الشكل: $P(A)=\frac{3(n+2)}{4(n+3)}$.
   ب. احسب نهاية $P(A)$ لمّا يؤول n نحو $+\infty$، ثمّ فسر النتيجة التي تجدها.
2. نعتبر الحادثة B: « يحتوي الوعاء V_2 على كرة بيضاء واحدة بعد الانتهاء من التجربة ».
   أ. تحقق أنّ احتمال تحقق الحادثة B هو $P(B)$ حيث $P(B)=\frac{3}{2(n+3)}$.
   ب. احسب نهاية $P(B)$ لمّا يؤول n نحو $+\infty$، ثمّ فسر النتيجة التي تجدها.
3. يقوم شخص بإجراء هذه التجربة ويهتم بعدد الكرات البيضاء في الوعاء V_2.
   - إذا بقيت في الوعاء V_2 كرة بيضاء واحدة يتحصل هذا الشخص على $2n$ نقطة.
   - و إذا بقيت في الوعاء V_2 كرتين بيضاوين يتحصل هذا الشخص على n نقطة.
   - أما إذا وجد في الوعاء V_2 3 كرات بيضاء فإنّه لا يتحصل على أية نقطة.

يعتبر رابحا كل شخص يقوم بهذه التجربة و يتحصل في نهايتها على عدد من النقط يفوق 20 نقطة.
أ. فسر لماذا لا توجد أية فائدة لإجراء هذه التجربة مادام العدد n لا يتعدى 10.
ب. نفرض فيما يلي أنّ $n>10$ ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل نتيجة تجربة العدد $(a-20)$ حيث a هو عدد النقط التي يتحصل عليها هذا الشخص.
ت. عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.
ث. احسب الأمل الرياضي للمغير العشوائي X.
ج. نقول إنّ شروط الربح هذه التجربة، هي في صالح الشخص الذي يجريها إذا كان الأمل الرياضي للمتغير X موجبا تماما. برهن أنّه كذلك بالنسبة إلى هذا الشخص بمجرد أن يصبح عدد الكرات البيضاء في الوعاء V_1 أكبر من 24.

تمرين2:

يقترح مطبخ قائمة وجبات غذائية تتكوّن كل منها من ثلاثة أطباق، الطبق الأوّل فيه سلاطة والثاني فيه حساء والثالث عبارة عن تَحْلِيَةٍ من الفواكه.

لرواد هذا المطبخ الاختيارات الآتية:

- اختياران بالنسبة إلى الطبق الأوّل بالسعرين 50 دج و 70 دج.
- 3 اختيارات بالنسبة إلى الطبق الثاني بالأسعار 150 دج ، 180 دج ، 200 دج.
- اختياران بالنسبة إلى الطبق الثالث بالسعرين 30 دج و 60 دج.

1) عدد الوجبات التي يقترحها المطبخ هو:

$\boxed{A}$ $2\times3\times2$؛ $\boxed{B}$ 12؛ $\boxed{C}$ $2+3+5$.

2) من بين أسعار الوجبات لدينا الأسعار الآتية:

$\boxed{A}$ 50 دج؛ $\boxed{B}$ 70 دج؛ $\boxed{C}$ 50 دج.

3) يختار أحد الرواد وجبة بصفة عشوائية. نرمز بالرمز X إلى سعر الوجبة الواحدة بالدينار.

أ) لدينا :

$\boxed{A}$ $P(X=230)=\frac{1}{12}$ ؛ $\boxed{B}$ $P(X=280)=\frac{1}{4}$ ؛ $\boxed{C}$ $P(X=260)=\frac{1}{12}$ ؛

$\boxed{D}$ $P(X=330)=\frac{1}{6}$ ؛ $\boxed{E}$ $P(X=300)=\frac{1}{12}$.

ب) السعر المتوسط للوجبة هو:

$\boxed{A}$ $\frac{2250}{12}$ دج ؛ $\boxed{B}$ $\frac{1690}{6}$ دج ؛ $\boxed{C}$ 281,7 دج بالتقريب إلى 0,01 بالنقصان.

تمرين3:

مؤسسة إنتاجية A مختصة في إنتاج قطع غيار ذات طابع إلكتروني. بيّنت مراقبة تقنية أنّ كل قطعة تنتجها هذه المؤسسة هي عرضة لنوعين من الخلل في تصنيعها، أحدهما يتعلق بالتلحيم مع احتمال تحقق ذلك هو 0,03 والخلل الثاني يتعلق بمكوّن إلكتروني مع احتمال تحققه يساوي 0,02. كما بيّنت هذه المراقبة أنّ الخللين مستقلين عن بعضهما.

نقول عن قطعة غيار إنّها مُعَابَة (مُشَابَة بعيب) إذا أصيبت بأحد الخللين على الأقل.

1. برهن أنّ احتمال أن تكون قطعة غيار ما من إنتاج هذه المؤسسة معابة هو 0,0494.
2. يستقبل محل تجاري حصة تتكوّن من 800 قطعة غيار من المؤسسة A. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بهذه الحصة عدد القطع المُعابة.
   أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.
   ب) احسب الأمل الرياضي للمتغير X. ماذا تمثل النتيجة التي وجدتها؟
3. أ) قام تاجر صغير بطلب 25قطعة غيار من المؤسسة A . احسب بالتقريب إلى 0,001 بالنقصان، احتمال أن يجد في البضاعة التي طلبها أكثر من قطعتين مُعابتين.

ت)يريد هذا التاجر أن يكون احتمال وجود قطعة معابة على الأقل في طلبه أقل من 50% . أوجد أقصى عدد من القطع التي عليه طلبها.

4.المتغير العشوائي الذي يرفق بكل قطعة غيار أنتجتها المؤسسة A مدّة صلاحيتها بالأيام، يتبع القانون الأسي ذو الوسيط 0,0007 ، و هذا يعني أنّ كثافة الاحتمال لهذا المتغير هي الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=0,0007e^{+0,0007x}$.
احسب بالتقريب إلى 0,001 بالنقصان، احتمال أن تتراوح كون مدّة صلاحية أي قطعة من إنتاج المؤسسة A بين 700 و 1000 يوم.

5. ميدان الهندسة

أ. الهندسة و الأعداد مركبة

1. $i^{2010}=1$.
2. $\frac{\pi}{3}$ عمدة للعدد المركب $x\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.
3. من أجل كل عدد حقيقي α، النقطة M التي لاحقتها $\frac{1}{2+i\alpha}$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $\Omega\left(\frac{1}{4};0\right)$ و نصف قطرها $\frac{1}{4}$.
4. $-\frac{\pi}{2}-\beta$ عمدة للعدد المركب $-\sin\frac{\pi}{7}-i\cos\frac{\pi}{7}$.
5. من أجل كل عدد حقيقي α: $\overline{e^{i\alpha}}=\frac{1}{e^{i\alpha}}$.
6. $z'=-e^{i\frac{\pi}{4}}z$ هي الكتابة المركبة للدوران الذي مركزه مبدأ المعلم و زاويته $-\frac{\pi}{4}$.
7. الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان إذن $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.
8. في الشعاعان $\vec{u}(2;-3;1)$ و $\vec{v}(1;-1;-5)$ متعامدان .
9. النقطة $H\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$ هي المسقط العمودي للنقطة $A(1;1;1)$ على المستوي الذي معادلته $3x-y+z=0$.
10. المستويان $(P): 2x+y=0$ و $(Q)\ x-y+2z=0$ متعامدان .
11. المستوي $(P): -x+y-z=0$ هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ علما ان $A(0;4;1)$ و $B(2;2;3)$.
12. الجملة $\begin{cases}2x+y+3z-6=0\\x+4y+2z-8\end{cases}$ و التمثيل الوسيطي $\begin{cases}y=1+t\\z=3-t\end{cases}$، $t\in IR$ يعرفان نفس المستقيم.
13. للمستويات $(P): x-y=4$ و $(Q):\ y-z=3$ و $(R): z-x=2$ نقطة مشتركة وحيدة.

ب . التحويلات النقطية

1. S_1 و S_2 تشابهان مباشران لهما مركزين مختلفين، لدينا $S_1\circ S_2=S_2\circ S_1$.
2. S تشابه مباشر و S ليس مركب دوران و تحاك، إذن S إنسحاب.
3. T و φ تحويلان نقطيان.

إذا كان φ $\mathbf{o}$ T تحاكيا فإن T تحاك و φ تحاك.

4. S هو التشابه المباشر الذي شكله المركب $z'=(1-i)z+1$، A نقطة لاحقتها z_A ، B هي صورة A بالتشابه S و z_B هي لاحقة B.

لدينا : $z_B+i=(1-i)(z_A+i)$.

5. مقطع سطح اسطواني دوراني محوره (Oz) بمستو معادلته $x=a$ هو إتحاد مستقيمين متوازيين.

6. (C) سطح مخروطي دوراني معادلته $x^2+y^2=4z^2$.

المستقيم $(D):\begin{cases}x=0\\2z+y=0\end{cases}$ مولد لـ: (C).

7. (S) هو السطح الذي معادلته $z=x^2+y^2$. مقطع (S) بمستو معادلته $y=b$ هو قطع مكافئ.

تمارين

يقترح هذا الجزء تمارين متنوعة ومسألة يمكن للأستاذ استغلالها في فروض محروسة أو استجوابات بهدف تقويم مكتسبات التلاميذ ومدى تحقق الكفاءات المستهدفة في البرنامج.

1. f_n هي الدالة المعرفة في المجموعة $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ بالدستور $f_n(x)=1-x+x^2-x^3+...+x^{2n}$ و n عدد طبيعي .

أ)بين ان $f_n(x)$ هو مجموع حدود متتالية هندسية،يطلب تعيين أساسها.

احسب $f_n(x)$ بدلالة x و n .

ب)عين، حسب قيم x ، $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

2. أ) بين أن $\int_0^1\left[f_n(x)-\frac{1}{x+1}\right]dx=\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{x+1}dx$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{x+1}dx$

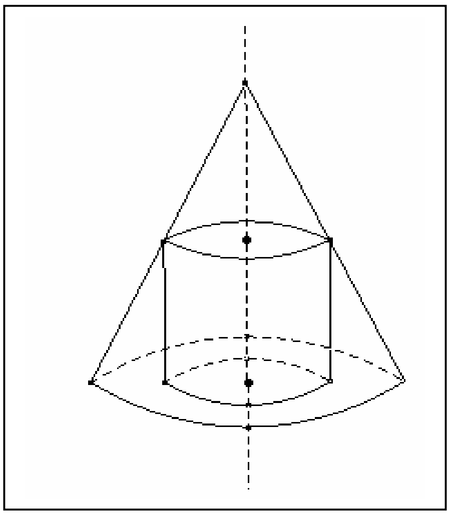
ب) بين ان $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+....+\frac{1}{2n+1}\right)=Ln\,2$.

3. **(خاص بشعبة الرياضيات)**

أ) نفرض هنا ان x عدد طبيعي كيفي. برهن ان ،من أجل كل عدد طبيعي n ، $x^{2n+1}+1$ يقبل القسمة على $x+1$.

ب)استنتج انه لا يمكن ان يكون $2^{\beta}+1$ أوليا إلا إذا كان β قوة 2.

جـ) يظن FERMAT ان الخاصية العكسية لـ: أ) صحيحة. برهن EULER بواسطة مثال مضاد ان الأمر ليس كذلك. بين مثل EULER ان $2^{32}+1$ يقبل القسمة على 641.



4. (تمرين خاص بشعبة الرياضيات)

يعطى مخروط دوراني (C) محوره (Δ)،
ارتفاعه 12 ونصف قطر قاعدته 4.
من بين الأسطوانات الدورانية التي وحوارها
(Δ) و التي يمكن إدخالها في (C)، ما هي التي
لها أكبر حجم؟

ملاحظة : يمكن مساعدة التلاميذ بطرح أسئلة هذا التمرين بالشكل التالي :
نسمي V حجم الأسطوانة ، h إرتفاعها و x نصف قطر قاعدتها.
تذكر ان حجم الأسطوانة هو : $V = \pi x^2 h$

1) بين ان $h = 12 - 3x$.
2) استنتج ان $V = 3\pi x^2 (4 - x)$.
3) من بين الأسطوانات الدورانية التي وحوارها (Δ) و التي يمكن إدخالها في (C)، ما هي التي لها أكبر حجم V ؟

5. (خاص بشعبة الرياضيات)

F هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1) عين اتجاه تغير الدالة F.
2) f هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = F(x) - \operatorname{Ln} x$.
(1-2) ادرس إشارة الدالة المشتقة f' ثم إشارة f.
(2-2) استنتج $\lim_{x \xrightarrow{f} 0} F(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

3) (C) هو المنحنى الذي يمثل الدالة F. نقبل ان من أجل كل عدد حقيقي t
$e^t > te^{\frac{t}{2}}$. احسب $\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x}$ و فسر النتيجة بيانيا. انشئ (C).

6. (خاص بشعبة الرياضيات)

نعتبر المتتالية (u_n) معرفة كالآتي:

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \text{من أجل كل } n \text{ من } IN^* \quad u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

1) f هي الدالة المعرفة في المجال $[0;1]$ بـ: $f(x) = \operatorname{Ln}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.
أ)احسب الدالة المشتقة f' للدالة f.
ب) احسب u_0 ثم u_1 .
2) أ) بين ان المتتالية (u_n) متزايدة.
ب) بين ان من أجل كل x من $[0;1]$، لدينا $1 \le \sqrt{1+x^2} \le \sqrt{2}$

جـ) استنتج ان من أجل كل n من IN^* $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \le u_n \le \frac{1}{n+1}$.

د) احسب $\lim_{n\to+\infty}(u_n)$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $n\ge 3$: $I_n=\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$.

أ) بين ان من أجل كل عدد طبيعي n ، $n\ge 3$: $u_n+u_{n-2}=I_n$.

ب) استعمل المكاملة بالتجزئة كي تبين ان أجل كل عدد طبيعي n ، $n\ge 3$:

$n\,u_n+(n-1)u_{n-2}=\sqrt{2}$.

جـ) استنتج ان من أجل كل عدد طبيعي n ، $n\ge 3$: $(2n-1)u_n\le\sqrt{2}$.

د) استنتج من المتباينتين السابقتين $\lim_{n\to+\infty}(n\,u_n)$.

مسألة

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس . الوحدة هي 2cm.

f و g دالتان معرفتان في RI بـ: $f(x)=(x+1^2)e^{-x}$ و $g(x)=e^{-x}$.

الجزء الأول

(C_f) هو المنحني الذي معادلته $y=f(x)$ و (C_g) هو المنحني الذي معادلته $y=g(x)$

1) ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحني (C_f).

2) ادرس تغيرات الدالة g و الفروع اللانهائية للمنحني (C_g) .

3) عين وضعية (C_f) بالنسبة إلى (C_g) .

4) (Δ_1) هو المماس في $A(0;1)$ للمنحني (C_f) و (Δ_2) المماس في $A(0;1)$ للمنحني (C_g).

بين ان $(\Delta_1)\perp(\Delta_2)$.

الجزء الثاني

1) عين الأعداد الحقيقية a و b و c التي من أجلها تكون الدالة

$x \mapsto (at^2+bt+c)e^{-t}$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto (t^2+2t)e^{-t}$ في IR.

2) α عدد حقيقي موجب .

أ) احسب، بالسنتيمتر مربع، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنيين

(C_f) و (C_g)، محور التراتيب و المستقيم الذي معادلته $x=\alpha$.

ب) احسب $\lim_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$.

3) احسب، بالسنتيمتر مربع، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين

(C_f) و (C_g)، محور التراتيب و المستقيم الذي معادلته $x=-2$.

الجزء الثالث

(u_n) هي المتتالية المعرفة من أجل كل n من IN^* بـ: $u_n = Ln[f(n)]$.

1) بين ان المتتالية (u_n) متناقصة.

2) نضع $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

أ.بين ان $u_n = -n + 2Ln(n+1)$.

ب.برهن ان من أجل كل n من IN^* $S_n = 2Ln[(n+1)!] - \frac{n(n+1)}{2}$

ملحق1:

تقدير زمني لإنجاز برامج الشعب العلمية للسنة الثالثة ثانوي

المحتويات	التوقيت		
	ر	ت-ر	علمي
قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$	2	2	0
القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$. القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين.	6	5	0
الموافقات في $\mathbb{Z}$ - التعداد	7	6	0
الأعداد الأولية المضاعف المشترك الأصغر	6	6	0
مبرهنة بيزو مبرهنة غوص	7	6	0
الدوال العددية- النهايات والاستمرارية	12	12	11
الاشتقاقية- (الاشتقاقية،اشتقاق دالة مركبة،المشتقات المتتابعة)	7	7	7
الدوال الأصلية -(تعريف، خواص، أمثلة لدوال أصلية)	5	5	5
تعريف، خواص الدالة $x \mapsto \exp(x)$ - دوال أسية $x \mapsto e^{kx}$ دوال القوى والجذور النونية) - التزايد المقارن للدوال الأسية ودوال القوى واللوغاريتمات.	14	14	14
المتتاليات العددية(توليد متتالية عددية خواص المتتاليات (الاستدلال بالتراجع)	8	8	8
الحساب التكاملي(تعريف، خواص،حساب، مساحات سطوح مستوية)	10	9	8
الاحتمالات المتساوية على مجموعة منتهية.	5	5	5
العدّ	5	4	3
الاحتمالات الشرطية الأحداث المستقلة (تعاريف ، خواص دستور الاحتمالات الكلية، النمذجة)	8	8	7
قوانين الاحتمالات المتقطعة (قانون التوزيع المنتظم، قانون برنولي، قانون ثنائي الحدّ)	4	4	4
التلاؤم مع قانون احتمال متقطع	4	4	4
قوانين الاحتمالات المستمرة(قانون التوزيعات المنتظمة على المجال $[0;1]$)	3	3	3
الأعداد المركبة- الكتابات المختلفة لعدد مركب، العمليات على الأعداد المركبة، ترميز أولير	12	12	12
حل معادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$ معاملاتها أعداد حقيقية.	2	2	2
الأعداد المركبة و التحويلات النقطية من الشكل: $M(z) \mapsto M'(z')$ مع $z' = az + b$، $a \in \mathbb{R}^*$ أو $a \in \mathbb{C}$ و $\|a\|=1$	8	8	8
التشابهات المستوية المباشرة	11	8	8
الهندسة في الفضاء : الجداء السلمي-	8	8	8
المستقيمات والمستويات في الفضاء	8	8	8
المقاطع المستوية للسطوح	13	0	0
المجموع	175	154	125

عدد الأسابيع = 25

الشعبة العلمية = 25x5 = 125 —— الشعبة الرياضية = 25x7 = 175