النهايات الشهيرة

الدوال الأسية واللوغارتمية

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} x(\ln x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} (\ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

النهايات

⬅نهايات الدوال $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ و $x \mapsto \sqrt{x}$ و مقلوباتها:

$\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{x} = 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

إذا كان n عددا زوجيا فإن:	إذا كان n عددا فرديا فإن:
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x^n} = +\infty$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x^n} = -\infty$

⬅نهايات الدوال الحدودية و الدوال الجذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$:

نهاية حدودية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة	نهاية دالة جذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة

⬅نهايات الدوال المثلثية:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

⬅نهايات الدوال من النوع: $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{u(x)}$
$\ell \geq 0$	$\sqrt{\ell}$
$+\infty$	$+\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

النهايات و الترتيب:

$\left.\begin{array}{l} u(x) \le f(x) \le V(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \ell \\ \lim\limits_{x \to x_0} V(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$	$\left.\begin{array}{l} \lvert f(x) - \ell \rvert \le V(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} V(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$
$\left.\begin{array}{l} u(x) \le V(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} V(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$	$\left.\begin{array}{l} u(x) \le f(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

العمليات على النهايات:

نهاية مجموع دالتين:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)]$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ش غ م

نهاية جداء دالتين:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	ℓ	$\ell < 0$		$\ell > 0$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \times g(x)]$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ش غ م

نهاية خارج دالتين:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell < 0$		$\ell > 0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ش غ م	ش غ م

ملاحظة عامة

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

الدوال اللوغارتمية

الدالة اللوغارتم النبري:

تعريف:

دالة اللوغارتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم في 1

ويرمز لها بالرمز: $\ln$

استنتاجات وخاصيات:

$\ln e = 1$	$\ln 1 = 0$	$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ln xy = \ln x + \ln y$ $\ln x^r = r \ln x \quad (r \in \mathbb{Q})$ $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$		
$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R}$ $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$		

إذا كان n عددا زوجيا فإن: $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \ln x^n = n \ln |x|$

مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة كما يلي	مجموعة تعريفها
$f(x) = \ln x$	$D_f =]0;+\infty[$
$f(x) = \ln[u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ و $u(x) > 0\}$

النهايات:

نهايات أساسية:

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$
$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

استنتاجات:

$\lim_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \ln[u(x)] = +\infty$
$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \ln[u(x)] = -\infty$
$\lim_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{[u(x)]^n} = 0$
$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \to x_0} [u(x)]^n \ln[u(x)] = 0$
$\lim_{x \to x_0} u(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{u(x)-1} = 1$
$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)+1]}{u(x)} = 1$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

الاتصال:

الدالة $x \mapsto \ln x$ متصلة على المجال $]0;+\infty[$

إذا كانت u موجبة قطعا و متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \ln\left[u(x)\right]$ متصلة على المجال I

الاشتقاق:

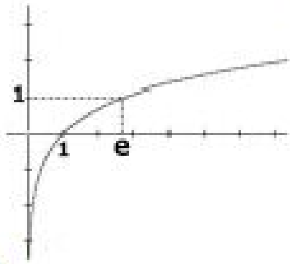
الدالة $x \mapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ولدينا: $\forall x \in]0;+\infty[\quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

إذا كانت u دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \ln\left[u(x)\right]$ قابلة للاشتقاق على المجال I

ولدينا: $\left(\ln\left[u(x)\right]\right)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)} \quad \forall x \in I$

التمثيل المبياني:



إشارة $\ln$:

x	$0 \quad 1 \quad +\infty$	
$\ln x$	-	+

الدالة اللوغاريتم للأساس a حيث: $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

تعريف:

الدالة اللوغاريتم للأساس a هي الدالة التي يرمز لها بالرمز: $\log_a$

حيث: $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a} \quad \forall x \in]0;+\infty[$

حالة خاصة: الدالة ℓog_{10} تسمى دالة اللوغاريتم العشري و يرمز لها كذلك بالرمز: ℓog

استنتاجات و خاصيات:

$\ell og_a 1 = 0$

$\ell og_a a = 1$

$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall r \in \mathbb{Q}$

$\ell og_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$

$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$

$\ell og_a xy = \ell og_a x + \ell n g_a y$

$(r \in \mathbb{Q}) \ \ell og_a x^r = r\ell og_a x$

$\ell og_a \dfrac{1}{x} = -\ell og_a x$

$\ell og_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \ell og_a x - \ell og_a y$

نهايات و متراجحات:

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\ell og_a x > \ell og_a y \Leftrightarrow x > y$	$\ell og_a x > \ell og_a y \Leftrightarrow x < y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell og_a x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell og_a x = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell og_a x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell og_a x = +\infty$

المشتقة:

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad (\ell og_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

الاتصال

الاتصال في نقطة:

تعريف

$$f \text{ متصلة في } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

الاتصال على اليمين – الاتصال على اليسار:

f متصلة على يمين $x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$ f متصلة على يسار $x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$
f متصلة في x_0 $\Leftrightarrow$ f متصلة على يمين و على يسار x_0

الاتصال على مجال:

تكون f متصلة على مجال مفتوح $]a,b[$ إذا كانت f متصلة في كل نقطة من المجال $]a,b[$
تكون f متصلة على مجال مغلق $[a,b]$ إذا كانت f متصلة على المجال المفتوح $]a,b[$ و متصلة على يمين a و متصلة على يسار b

العمليات على الدوال المتصلة:

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و k عدد حقيقي

- الدوال $f+g$ ، $f \times g$ ، kf متصلة على المجال I
- إذا كانت g لا تنعدم على I فإن الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتين على المجال I

نتائج:

- كل دالة حدودية متصلة على $\mathbb{R}$
- كل دالة جذرية متصلة على مجموعة تعريفها
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$
- الدالتان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ متصلتان على $\mathbb{R}$
- الدالة $x \mapsto \tan x$ متصلة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

اتصال مركب دالتين:

إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J بحيث: $f(I) \subset J$

فإن: $g \circ f$ متصلة على المجال I

صورة مجال بدالة متصلة:

- صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة
- صورة مجال بدالة متصلة هي مجال

حالات خاصة: لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I

الجدول التالي يوضح طبيعة المجال $f(I)$

المجال I	المجال $f(I)$	
	f تزايدية قطعا على I	f تناقصية قطعا على I
$[a,b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a,+\infty[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);f(a)\right]$
$]a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty,a]$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);f(a)\right]$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty,a[$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^-} f(x);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$

مبرهنة القيم الوسيطية:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a,b]$ فإنه لكل عدد حقيقي β محصور بين العددين $f(a)$ و $f(b)$
يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $[a,b]$ بحيث: $f(\alpha)=\beta$

نتيجة:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$
فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا α ينتمي إلى المجال $[a,b]$

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$
فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $[a,b]$

طريقة التفرع الثنائي:

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a,b]$ بحيث: $f(a)\times f(b)<0$
وليكن α الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[a,b]$

إذا كان: $f(a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$

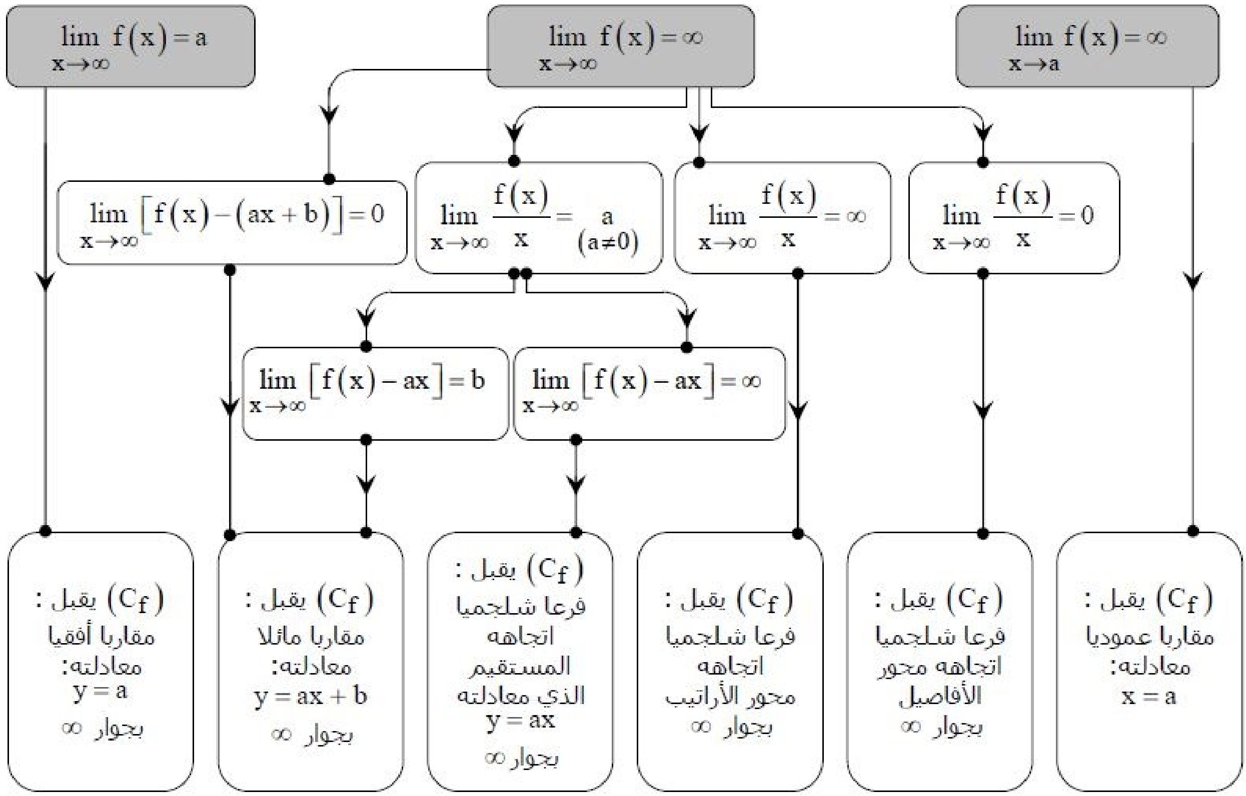
فإن: $a<\alpha<\frac{a+b}{2}$ و هذا التأطير سعته $\frac{b-a}{2}$
يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$
للحصول على تأطير أدق للعدد α

إذا كان: $f(b)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$

فإن: $\frac{a+b}{2}<\alpha<b$ و هذا التأطير سعته $\frac{b-a}{2}$
يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$
للحصول على تأطير أدق للعدد α

ملاحظة: وهكذا دواليك يمكن إعادة هذه الطريقة إلى أن يتم الحصول على تأطير للعدد α سعته مرغوب فيها

الفروع اللانهائية



الأعداد العقدية

مجموعة الأعداد العقدية هي: $\mathbb{C} = \{z = a + ib / (a;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ و } i^2 = -1\}$

➥الكتابة الجبرية لعدد عقدي:

ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث: $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

- $a + ib$ تسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي z
- العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z و يرمز له بالرمز: $\mathrm{Re}(z)$
- العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد z و يرمز له بالرمز: $\mathrm{Im}(z)$

حالتان خاصتان: ➤إذا كان: $\mathrm{Im}(z) = 0$ فإن z هو عدد حقيقي

➤إذا كان: $\mathrm{Re}(z) = 0$ فإن z يسمى عددا تخيليا صرفا

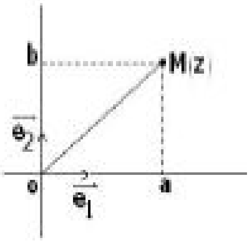
➥تساوي عددين عقديين:

ليكن z و z' عددين عقديين

$$z = z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \text{ و } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$$

➥التمثيل المباني لعدد عقدي:

ليكن المستوى العقدي منسوبا إلى معلم متعامد ممنظم $(o, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$



ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث: $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

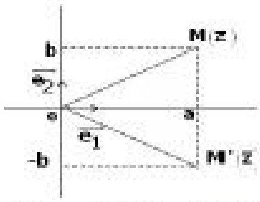
نربط العدد العقدي z بالنقطة $M(a,b)$

- العدد z يسمى لحق النقطة M و النقطة M تسمى صورة العدد z و نكتب: $M(z)$
- العدد z يسمى كذلك لحق المتجهة $\overrightarrow{OM}$ و نكتب: $\overrightarrow{OM}(z)$ أو $z = \mathrm{Aff}(\overrightarrow{OM})$

➥ مرافق عدد عقدي:

ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث: $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

مرافق العدد z هو العدد العقدي: $\overline{z} = a - ib$

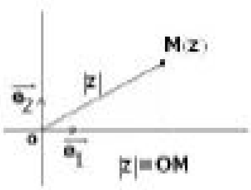


$M(z)$ و $M'(\overline{z})$ متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
- $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$

- z عدد حقيقي $\Leftrightarrow \overline{z} = z$
- z عدد تخيلي صرف $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$
- $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
- $z\overline{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$

➥معيار عدد عقدي:



ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث: $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

معيار العدد العقدي z هو العدد الحقيقي الموجب: $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\left\|z^n\right\| = \left\|z\right\|^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\left\|z \times z'\right\| = \left\|z\right\| \times \left\|z'\right\|$
$\left\|-z\right\| = \left\|z\right\|$	$\left\|\overline{z}\right\| = \left\|z\right\|$
$\left\|\frac{z}{z'}\right\| = \frac{\left\|z\right\|}{\left\|z'\right\|} \quad (z' \neq 0)$	$\left\|\frac{1}{z'}\right\| = \frac{1}{\left\|z'\right\|}$

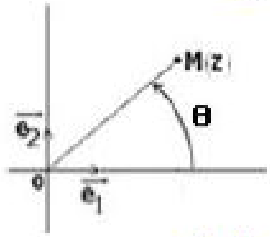
الشكل المثلثي و الكتابة الأسية لعدد عقدي غير منعدم:

ليكن z عددا عقديا غير منعدم صورته M

عمدة العدد العقدي z هو θ أحد قياسات الزاوية الموجهة: $\left(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}}\right)$

و نرمز له بالرمز: $\arg z$

ونكتب: $\arg z = \theta\left[2\pi\right]$



ليكن z عددا عقديا غير منعدم

نضع $r = \left|z\right|$ و $\arg z = \theta\left[2\pi\right]$

- الشكل المثلثي للعدد العقدي z هو: $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = \left[r, \theta\right]$
- الكتابة الأسية للعدد العقدي z هي: $z = re^{i\theta}$

حالات خاصة:

الكتابة المثلثية لعدد حقيقي a غير منعدم

$a > 0$	$a < 0$
$a = \left[a, 0\right]$	$a = \left[-a, \pi\right]$
$ai = \left[a, +\frac{\pi}{2}\right]$	$ai = \left[-a, -\frac{\pi}{2}\right]$

• $\arg(zz') = (\arg z + \arg z')\left[2\pi\right]$	• $\left[r, \theta\right] \times \left[r', \theta'\right] = \left[rr'; \theta + \theta'\right]$	• $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
• $\arg \overline{z} = -\arg z\left[2\pi\right]$	• $\overline{\left[r, \theta\right]} = \left[r, -\theta\right]$	• $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
• $-\arg z = (\pi + \arg z)\left[2\pi\right]$	• $-\left[r, \theta\right] = \left[r, \pi + \theta\right]$	• $-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$
• $\arg z^n = n \arg z \quad \left[2\pi\right]$	• $\left[r, \theta\right]^n = \left[r^n; n\theta\right]$	• $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$
• $\arg \frac{1}{z} = -\arg z \quad \left[2\pi\right]$	• $\frac{1}{\left[r'; \theta'\right]} = \left[\frac{1}{r'}; -\theta'\right]$	• $\frac{1}{r'e^{i\theta'}} = \frac{1}{r'}e^{-i\theta'}$
• $\arg \frac{z}{z'} = (\arg z - \arg z') \quad \left[2\pi\right]$	• $\frac{\left[r; \theta\right]}{\left[r'; \theta'\right]} = \left[\frac{r}{r'}; \theta - \theta'\right]$	• $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \left[r, \theta + 2k\pi\right] = \left[r, \theta\right]$

- $\arg z = k\pi \Leftrightarrow z$ عدد حقيقي
- $\arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow z$ عدد تخيلي صرف $\quad (k \in \mathbb{Z})$

صيغة موافر:

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(\cos\theta + i\sin n\theta\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

صيغتا أولير:

$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$

و $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

حل المعادلة $z^2 = a$ حيث $z \in \mathbb{C}$ $(a \in \mathbb{R})$:

المعادلة		مجموعة حلول المعادلة
$z \in \mathbb{C} \quad z^2 = a$	$a > 0$	$S = \left\{-i\sqrt{a}; i\sqrt{a}\right\}$
	$a = 0$	$S = \left\{0\right\}$
	$a < 0$	$S = \left\{-i\sqrt{-a}; i\sqrt{-a}\right\}$

➥حل المعادلة: $az^2+bz+c=0$ حيث: $z\in\mathbb{C}$ و a و b و c أعداد حقيقية $(a\neq 0)$

المعادلة:		مجموعة حلول المعادلة:
$z\in\mathbb{C} \quad az^2+bz+c=0$ $(\Delta=b^2-4ac)$	$\Delta>0$	$S=\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$
	$\Delta=0$	$S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
	$\Delta<0$	$S=\left\{\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a};\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$

➥مفاهيم هندسية و مصطلحات الأعداد العقدية:

المفهوم الهندسي	العلاقة العقدية
المسافة AB	$AB=\lvert z_B-z_A\rvert$
I منتصف القطعة $[A;B]$	$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$
قياس الزاوية $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$	$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\arg\left(\frac{z_c-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$
A و B و C نقط مستقيمية	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$
A و B و C و D نقط متداورة	$\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\times\frac{z_B-z_C}{z_D-z_C}\in\mathbb{R}$ أو $\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\times\frac{z_D-z_C}{z_B-z_C}\in\mathbb{R}$

العلاقة العقدية	المفهوم الهندسي
$\lvert z-z_A\rvert=r$ $(r>0)$	• $AM=r$ • M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها A و شعاعها r
$\lvert z-z_A\rvert=\lvert z-z_B\rvert$	• $AM=BM$ • M تنتمي إلى واسط $[AB]$
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[r;\pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC مثلث قائم الزاوية في A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=[1;\theta]$	ABC مثلث متساوي الساقين في A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{3}\right]$	ABC مثلث متساوي الأضلاع

➥تمثلات عقدية لبعض التحويلات الاعتيادية:

التحويل:	التمثيل العقدي:
الإزاحة: t_u	$z'=z+b$ حيث: b لحق المتجهة u
التحاكي: $h(\Omega;k)$	$z'-\omega=k(z-\omega)$ حيث: ω لحق النقطة Ω
الدوران: $r(\Omega;\theta)$	$z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$ حيث: ω لحق النقطة Ω

التعداد

رئيسي مجموعة:

تعريف:

رئيسي مجموعة منتهية E هو عدد عناصر المجموعة E ويرمز له بالرمز: $\text{Card}E$

حالة خاصة: $\text{Card}\varnothing = 0$

خاصية:

A و B مجموعتان منتهيتان

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B - \text{Card}(A \cap B)$$

متمم مجموعة:

تعريف:

ليكن A جزءا من مجموعة منتهية E

متمم A بالنسبة للمجموعة E هي المجموعة التي يرمز لها بالرمز: $\overline{A}$

حيث $\overline{A} = \{x \in E / x \notin A\}$

ملاحظات:

- $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- $A \cup \overline{A} = E$
- $\text{card}\overline{A} = \text{card}E - \text{card}A$

المبدأ الأساسي للتعداد:

نعتبر تجربة تتطلب نتائجها p اختيارا $(p \in \mathbb{N}^*)$

إذا كان الاختيار الأول يتم ب n_1 كيفية مختلفة

و كان الاختيار الثاني يتم ب n_2 كيفية مختلفة

....

و كان الاختيار p يتم ب n_p كيفية مختلفة

فإن عدد النتائج الممكنة هو الجداء : $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_p$

الترتيبات بتكرار- الترتيبات بدون بتكرار:

الترتيبات بتكرار:

ليكن n و p عنصرين من $\mathbb{N}^*$ $(p \leq n)$

عدد الترتيبات بتكرار ل p عنصر من بين n عنصر هو: n^p

الترتيبات بدون تكرار:

- خاصية:

ليكن n و p عنصرين من $\mathbb{N}^*$ $(p \le n)$

عدد الترتيبات بدون تكرار ل p عنصر من بين n عنصر هو:

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}_{\text{من العوامل } p}$$

- حالة خاصة:

كل ترتيبة بدون تكرار ل n عنصر من بين n عنصر تسمى كذلك تبديلة ل n عنصر

و عددها : $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$

التأليفات:

لتكن E مجموعة منتهية عدد عناصرها n

كل جزء A من E عدد عناصره p $(p \le n)$

يسمى تأليفة ل p عنصر من بين n عنصر

و عدد هذه التأليفات هو : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

الأعداد: $n!$ و A_n^p و C_n^p:

$n \in \mathbb{N}^*$		$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$ $0! = 1$	
$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$		$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$	
$C_n^{n-1} = n$	$C_n^0 = 1$	$C_n^1 = n$	$C_n^n = 1$
$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$		$C_n^p = C_n^{n-p}$	

عدد إمكانيات ترتيب n عنصر:

إذا كان لدينا n عنصر من بينها

n_1 عنصر من النوع A $(n_1 + n_2 + n_3 = n)$

و n_2 عنصر من النوع B

و n_3 عنصر من النوع C

فإن إمكانيات ترتيب هذه العناصر هو : $\dfrac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3!}$

بعض أنواع السحب:

نسحب p عنصر من بين n عنصر $(p \le n)$ و نلخص النتائج في الجدول التالي:

نوع السحب	عدد السحبات الممكنة هو:	الترتيب
آني	C_n^p	غير مهم
بالتتابع و بإحلال	n^p	مهم
بالتتابع و بدون إحلال	A_n^p	مهم

الاشتقاق

قابلية الاشتقاق في عدد:

نقول إن دالة f قابلة للاشتقاق في العدد x_0 إذا كانت النهاية: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ منتهية

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 ويرمز له بالرمز: $f'(x_0)$

معادل المماس لمنحنى دالة- الدالة التآلفية المماسة لمنحنى دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0

- معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 هي: $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
- الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $u(x) = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

تسمى الدالة التآلفية المماسة لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 و هي تقريب للدالة f بجوار x_0

قابلية الاشتقاق على اليمين- قابلية الاشتقاق على اليمين :

- نقول إن دالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت النهاية $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ منتهية

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f على يمين x_0 و يرمز له بالرمز: $f'_d(x_0)$

- نقول إن دالة f قابلة للاشتقاق على يسار x_0 إذا كانت النهاية: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ منتهية

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f على يسار x_0 و يرمز له بالرمز: $f'_g(x_0)$

تكون دالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين و على اليسار في x_0 و $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$

الاشتقاق و الاتصال:

إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق في عدد x_0 فإن f تكون متصلة في x_0

جدول مشتقات بعض الدوال الاعتيادية:

	$f(x)$	$f'(x)$
$(k \in \mathbb{R})$	k	0
	x	1
	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$(r \in \mathbb{Q}^* - \{1\})$	x^r	rx^{r-1}
	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

العمليات على الدوال المشتقة:

$(u+v)' = u'+v'$	$(u-v)' = u'-v'$	$(ku)' = k(u)' \quad (k \in \mathbb{R})$
$(uv)' = u'v+uv'$	$\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$	
$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$	

مشتقة مركب دالتين- مشتقة دالة الجذر:

$(u \circ v)' = [u' \circ v] \times v'$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

الاشتقاق و تغيرات دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

- $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ ⇔ f تزايدية على المجال I
- $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ ⇔ f تناقصية على المجال I
- $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$ ⇔ f ثابتة على المجال I

الاشتقاق و التأويل الهندسي:

النهاية	استنتاج	التأويل الهندسي المنحنى(Cf) يقبل:
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a \quad (a \neq 0)$	f قابلة للاشتقاق في x_0	مماسا في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ معامله الموجه هو a
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$		مماسا أفقيا في النقطة $A(x_0;f(x_0))$
$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a \quad (a \neq 0)$	f قابلة للاشتقاق على يمين x_0	نصف مماس على اليمين في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ ؛ معامل الموجه لحامله هو a
$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$		نصف مماس أفقي على اليمين في النقطة $A(x_0;f(x_0))$
$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأسفل
$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$		نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأعلى
$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a \quad (a \neq 0)$	f قابلة للاشتقاق على يسار x_0	نصف مماس على اليسار في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ ؛ معامل الموجه لحامله هو a
$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$		نصف مماس أفقي على اليسار في النقطة $A(x_0;f(x_0))$
$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأعلى
$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$		نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأسفل

المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية	الحل العام للمعادلة التفاضلية
$y' = ay + b$ $(a \neq 0)$	$y(x) = \alpha e^{ax} - \frac{b}{a}$ $(a \in \mathbb{R})$

المعادلة التفاضلية	معادلتها المميزة	المعادلة المميزة تقبل :		الحل العام للمعادلة التفاضلية
$y'' + ay' + by = 0$	$r^2 + ar + b = 0$ $(\Delta = a^2 - 4b)$	$\Delta > 0$	حلين حقيقيين مختلفين r_1 و r_2	$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث: $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta = 0$	حلا حقيقيا وحيدا r	$y(x) = (\alpha x + \beta) e^{rx}$ حيث: $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta < 0$	حلين عقديين مترافقين: $r_1 = p - iq$ و $r_2 = p + iq$	$y(x) = (\alpha \cos qx + \beta \sin qx) e^{px}$ حيث: $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

الهندسة الفضائية

في سياق هذا الملخص ليكن الفضاء منسوبا إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

الصيغة التحليلية ل: الجداء السلمي- منظم متجهة- الجداء المتجهي:

لتكن $\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$ متجهتين من ϑ_3

- $\vec{u}.\vec{v} = aa'+bb'+cc'$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
- $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & a & a' \\ \vec{j} & b & b' \\ \vec{k} & c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$

المسافة:

المسافة بين نقطتين A و B هي:

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

المسافة بين نقطة M و مستوى (P) معادلته الديكارتية: $ax+by+cz+d=0$ هي:

$$d(M,(P)) = \frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

المسافة بين نقطة M و مستقيم $\Delta(A,\vec{u})$ هي:

$$d(A,(\Delta)) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

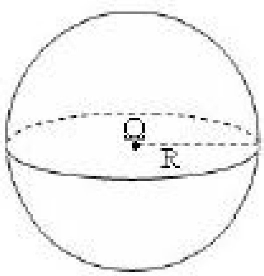
معادلة مستوى:

$\vec{n}(a,b,c) \Leftrightarrow (P): ax+by+cz+d=0$ متجهة منظمية على المستوى (P)

إذا كانت A و B و C نقط غير مستقيمة فإن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)
و في هذه الحالة يمكن تحديد معادلة المستوى (ABC) بالاستعانة بالتكافؤ التالي :

$$M\in(ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$$

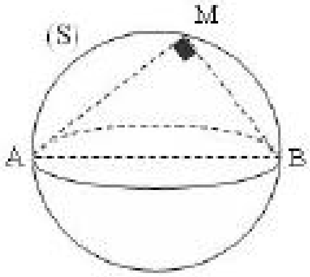
معادلة فلكة:



معادلة فلكة مركزها $\Omega(a,b,c)$ و شعاعها R هي:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

معادلة فلكة (S) أحد أقطارها $[AB]$ يمكن تحديدها
بالاستعانة بالتكافؤ التالي: $M \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BM} = 0$

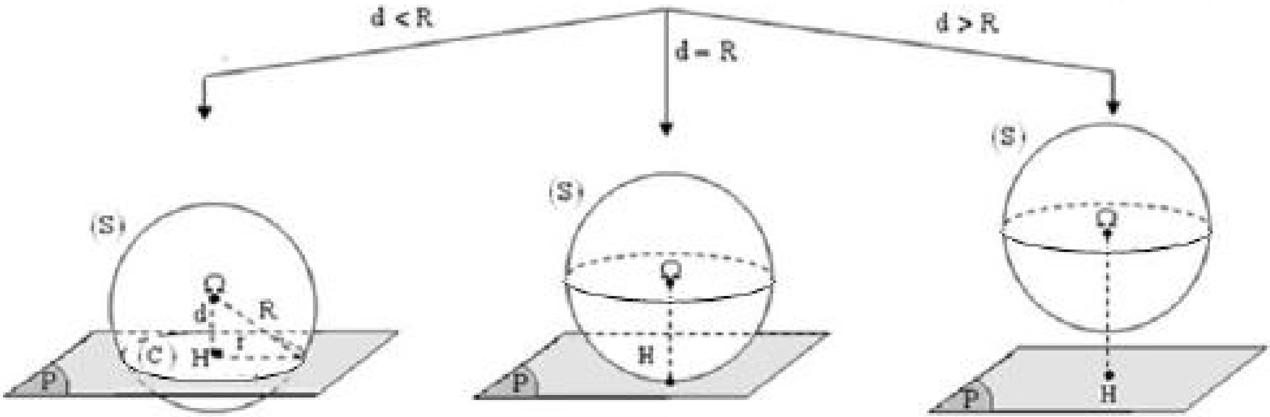


ملاحظة: الفلكة (S) مركزها Ω منتصف $[AB]$ و شعاعها $\dfrac{AB}{2}$

➥ تقاطع فلكة $S(\Omega,R)$ و مستوى $(P): ax + by + cz + d = 0$

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (P)

نضع: $d = \Omega H = d(\Omega;(P))$



المستوى (P) لا يقطع الفلكة (S)

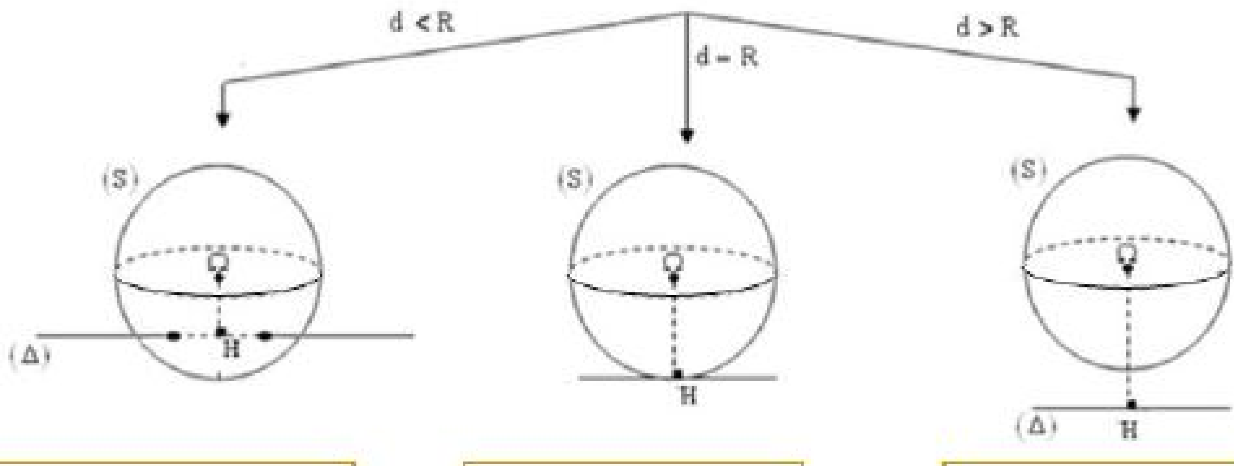
المستوى (P) مماس للفلكة (S) في النقطة H

المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C) مركزها: H شعاعها: $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

➥ تقاطع فلكة $S(\Omega,R)$ و مستقيم (Δ):

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستقيم (Δ)

نضع: $d = \Omega H = d(\Omega;(\Delta))$



المستوى (P) و الفلكة (S) لا يتقاطعان

المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة H

المستقيم (Δ) يخترق الفلكة (S) في نقطتين مختلفتين

الدوال الأسية

الدالة الأسية النيبرية

تعريف:

الدالة $x \mapsto e^x$ هي الدالة العكسية للدالة $\ln$ و تسمى الدالة الأسية النيبرية

استنتاجات وخاصيات:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$ $\ln e^x = x$	$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall r \in \mathbb{Q}$ $e^x \times e^y = e^{x+y}$ $\left(e^x\right)^r = e^{rx}$ $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad e^{\ln x} = x$	
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0;+\infty[$ $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$	
$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ $e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$	

مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة كما يلي	مجموعة تعريفها
$f(x) = e^x$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u\}$

النهايات:

نهايات أساسية:

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

استنتاجات:

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} e^{u(x)} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} e^{u(x)} = 0$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{e^{u(x)}}{[u(x)]^n} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} [u(x)]^n e^{u(x)} = 0$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = +\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

الاتصال:

الدالة $x \mapsto e^x$ متصلة على $\mathbb{R}$
إذا كانت دالة u متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ متصلة على المجال I

الاشتقاق

الدالة $x \mapsto e^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

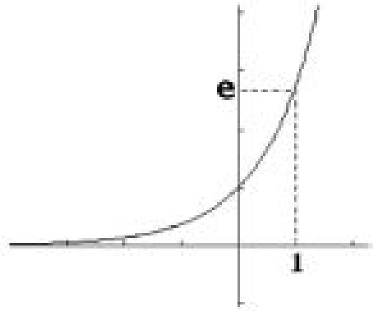
ولدينا: $\left(e^x\right)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

إذا كانت دالة u قابلة للاشتقاق على مجال I فإن

الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I

ولدينا: $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)} \quad \forall x \in I$

التمثل المباني:



الدالة الأسية للأساس a حيث: $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

تعريف:

الدالة $x \mapsto a^x$ هي الدالة العكسية للدالة $\log_a$ و تسمى الدالة الأسية للأساس a

استنتاجات و خاصيات:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x = e^{x \ln a}$ $\log_a\left(a^x\right) = x$	$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$ $a^x \times a^y = a^{x+y}$ $\left(a^x\right)^r = a^{rx} \quad (r \in \mathbb{Q})$ $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad a^{\log_a x} = x$	
$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$	
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0;+\infty[$ $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a(y)$	

نهايات و متراجحات:

$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$	$a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	

المشتقة:

$$\left(a^x\right)' = (\ln a) \times a^x$$

متطابقات هامة
مجموعة تعريف دالة عددية

متطابقات هامة.

لكل عددين حقيقيين a وb

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

مجموعة تعريف بعض الدوال العددية:

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة بما يلي:	مجموعة تعريف الدالة f
$f(x) = P(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$
$f(x) = \dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) > 0\}$
$f(x) = \dfrac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0$ و $Q(x) > 0\}$
$f(x) = \sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0\right.$ و $\left.Q(x) \neq 0\right\}$

التكامل

➥تكامل دالة متصلة على قطعة:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ و F دالة أصلية للدالة f على المجال $[a,b]$

تكامل الدالة f من a إلى b هو العدد الحقيقي:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

➥خاصيات:

الخطانية:

$\int_a^a f(x)dx = 0$	$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (k \in \mathbb{R})$	$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

علاقة شال:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

➥التكامل و الترتيب:

إذا كان: $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$ فإن: $\int_a^b f(x)dx \geq 0$	إذا كان: $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$ فإن: $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

➥القيمة المتوسطة:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$

القيمة المتوسطة للدالة على المجال $[a,b]$ هي العدد الحقيقي: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

➥المكاملة بالأجزاء:

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال $[a,b]$ بحيث تكون f' و g' متصلتين على المجال $[a,b]$

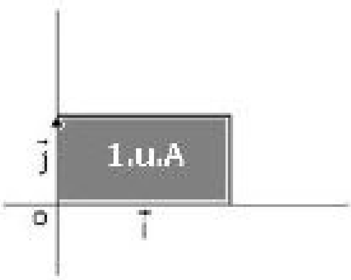
$$\int_a^b [f'(x)\times g(x)]dx = \left[f(x)\times g(x)\right]_a^b - \int_a^b [f(x)\times g'(x)]dx$$

➥حساب مساحة حيز:

ليكن المستوى منسوبا إلى معلم متعامد $(o,\vec{i},\vec{j})$

وحدة المساحة : $u.A$ هي مساحة المستطيل المحدد بالنقطة O و المتجهتين $\vec{i}$ و $\vec{j}$

$$1.u.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$



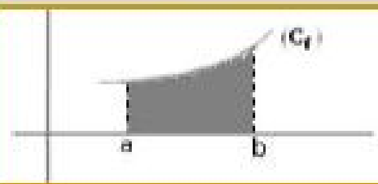
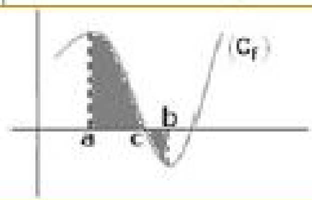
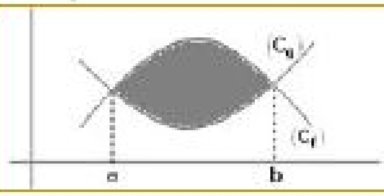
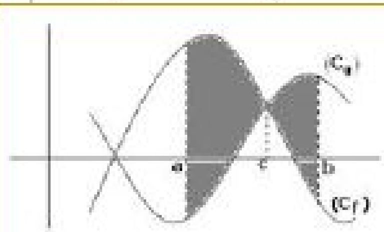
لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$
مساحة الحيز المحصور بين المنحنى C_f ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=a$ و $y=b$ هي:

$$\left(\int_a^b |f(x)|dx\right).u.A$$

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال $[a;b]$
مساحة الحيز المحصور بين المنحنيين C_f و C_g ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=a$ و $y=b$ هي:

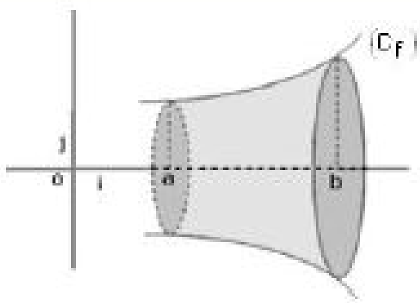
$$\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\right).u.A$$

حالات خاصة:

الرسم	ملاحظات	مساحة الحيز الرمادي في الرسم
	f موجبة على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b f(x)dx\right).u.A$
	f سالبة على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b -f(x)dx\right).u.A$
	• f موجبة على المجال $[a,c]$ • f سالبة على المجال $[c,b]$	$\left(\int_a^c f(x)dx+\int_c^b -f(x)dx\right).u.A$
	(C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right).u.A$
	• (C_f) فوق (C_g) على المجال $[a,c]$ • (C_g) فوق (C_f) على المجال $[c,b]$	$\left(\int_a^c (f(x)-g(x))dx+\int_c^b (g(x)-f(x))dx\right).u.A$

حساب حجم :

حجم المجسم المولد بدوران المنحنى (C_f) حول محور الأفاصيل دورة كاملة في مجال $[a,b]$
هو: $V=\left[\int_a^b \pi(f(x))^2dx\right]u.v$



الدوال اللوغارتمية

الدالة اللوغاريتم النبيري:

تعريف:

دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم في 1

ويرمز لها بالرمز: $\ln$

استنتاجات وخاصيات:

$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ln xy = \ln x + \ln y$ $\ln x^r = r \ln x \quad (r \in \mathbb{Q})$ $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$	$\ln 1 = 0$	$\ln e = 1$
	$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$	
	$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R}$ $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$	

إذا كان n عددا زوجيا فإن: $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \ln x^n = n \ln |x|$

مجموعة التعريف:

مجموعة تعريفها	الدالة f معرفة كما يلي
$D_f =]0;+\infty[$	$f(x) = \ln x$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ و $u(x) > 0\}$	$f(x) = \ln[u(x)]$

النهايات:

نهايات أساسية:

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$
$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

استنتاجات:

$\lim_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \ln[u(x)] = +\infty$
$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \ln[u(x)] = -\infty$
$\lim_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{[u(x)]^n} = 0$
$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \to x_0} [u(x)]^n \ln[u(x)] = 0$
$\lim_{x \to x_0} u(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{u(x)-1} = 1$
$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)+1]}{u(x)} = 1$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

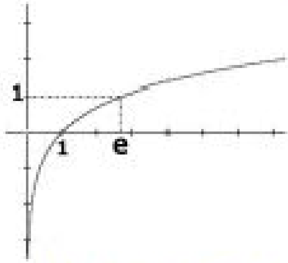
الاتصال:

الدالة $x \mapsto \ln x$ متصلة على المجال $]0;+\infty[$
إذا كانت u موجبة قطعا و متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ متصلة على المجال I

الاشتقاق:

الدالة $x \mapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا: $\forall x \in]0;+\infty[\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$	إذا كانت u دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ قابلة للاشتقاق على المجال I ولدينا: $(\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \forall x \in I$

التمثيل المبياني:



إشارة $\ln$:

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$		$-$	$+$

الدالة اللوغاريتم للأساس a حيث: $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

تعريف:

الدالة اللوغاريتم للأساس a هي الدالة التي يرمز لها بالرمز: $\log_a$ حيث: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \forall x \in]0;+\infty[$

حالة خاصة: الدالة ℓog_{10} تسمى دالة اللوغاريتم العشري و يرمز لها كذلك بالرمز: ℓog

استنتاجات و خاصيات:

$\ell og_a 1 = 0$ $\ell og_a a = 1$	$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ell og_a xy = \ell og_a x + \ell ng_a y$ $(r \in \mathbb{Q}) \ \ell og_a x^r = r\ell og_a x$ $\ell og_a \frac{1}{x} = -\ell og_a x$ $\ell og_a \left(\frac{x}{y}\right) = \ell og_a x - \ell og_a y$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall r \in \mathbb{Q}$ $\ell og_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$	

نهايات و متراجحات:

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\ell og_a x > \ell og_a y \Leftrightarrow x > y$	$\ell og_a x > \ell og_a y \Leftrightarrow x < y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell og_a x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell og_a x = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell og_a x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell og_a x = +\infty$

المشتقة:

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad (\ell og_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

محور التماثل – مركز التماثل
نقطة الانعطاف

محور التماثل:

يكون المستقيم الذي معادلته $x = a$ محور تماثل للمنحنى (C_f) إذا تحقق الشرطان التاليان:

- $(2a - x) \in D_f \qquad \forall x \in D_f$
- $f(2a - x) = f(x) \qquad \forall x \in D_f$

حالة خاصة: إذا كانت $a = 0$ فإن f دالة زوجية

مركز التماثل:

يكون النقطة $I(a,b)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f) إذا تحقق الشرطان التاليان:

- $(2a - x) \in D_f \qquad \forall x \in D_f$
- $f(2a - x) + f(x) = 2b \qquad \forall x \in D_f$

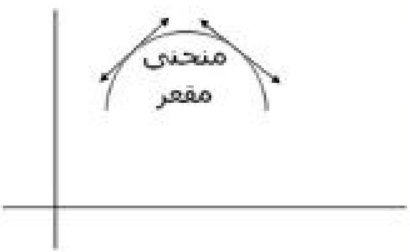
حالة خاصة: إذا كانت $a = b = 0$ فإن f دالة فردية

التقعر- التحدب- نقطة الانعطاف:

يكون منحنى دالة مقعرا على مجال إذا كان يوجد تحت جميع مماساته على هذا المجال

إذا كان: $f''(x) \leq 0 \qquad \forall x \in I$

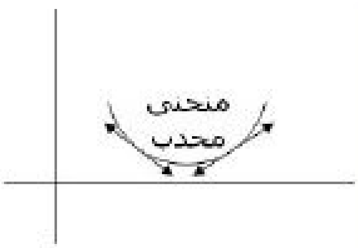
فإن: (C_f) مقعر على المجال I



يكون منحنى دالة محدبا على مجال إذا كان يوجد فوق جميع مماساته على هذا المجال

إذا كان: $f''(x) \geq 0 \qquad \forall x \in I$

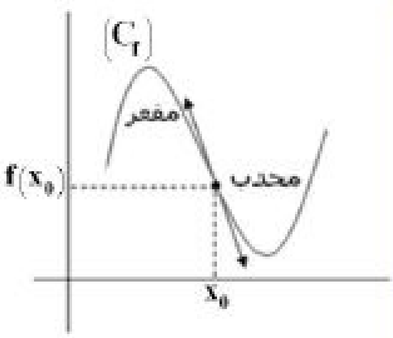
فإن: (C_f) محدب على المجال I



نقطة انعطاف منحنى دالة هي نقطة من المنحنى التي عندها يتغير تقعر هذا المنحنى

إذا كانت f'' تنعدم في x_0 مع تغيير الإشارة فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف أفصولها x_0

إذا كانت f' تنعدم في x_0 دون تغيير الإشارة فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف أفصولها x_0



الدوال الأصلية

الدوال الأصلية لدالة متصلة على مجال:

تعريف:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I
نقول أن F هي دالة أصلية للدالة f على المجال I
إذا تحقق الشرطان التاليان:

- F قابلة للاشتقاق على المجال I
- $F'(x)=f(x) \qquad \forall x \in I$

خاصيات:

كل دالة متصلة على مجال تقبل دالة أصلية على هذا المجال

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I
إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن:
جميع الدوال الأصلية للدالة f معرفة على I بما يلي:

$$x \mapsto F(x)+k \qquad (k \in \mathbb{R})$$

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية على مجال I
وليكن x_0 عنصرا من I و y_0 عنصرا من $\mathbb{R}$
توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط البدئي:

$$F(x_0)=y_0$$

الدوال الأصلية: لمجموع دالتين- لجداء دالة و عدد حقيقي:

خاصية:

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I و k عددا حقيقيا
إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالتين f و g على المجال I على
التوالي فإن:

- $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على المجال I
- kF دالة أصلية للدالة kf على المجال I

جدول الدوال الأصلية لبعض الدوال الاعتيادية:

	$f(x)$	$F(x)$
	$a \in \mathbb{R}$	$ax + k$
	x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + k$
	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
$(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + k$
	$\sin x$	$-\cos x + k$
	$\cos x$	$\sin x + k$
	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$
	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + k$
	e^x	$e^x + k$

استعمال صيغ الاشتقاق لتحديد بعض الدوال الأصلية:

	$f(x)$	$F(x)$	
	$u'(x) + v'(x)$	$u(x) + v(x) + k$	
$(a \in \mathbb{R})$	$a\,u'(x)$	$a\,u(x) + k$	
	$u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$	$u(x) \times v(x) + k$	
	$\frac{-v'(x)}{[v(x)]^2}$	$\frac{1}{v(x)} + k$	
	$\frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{[v(x)]^2}$	$\frac{u(x)}{v(x)} + k$	
	$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + k$	
$(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$u'(x) \times [u(x)]^r$	$\frac{[u(x)]^{r+1}}{r+1} + k$	
	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + k$	
	$u'(x) \times e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k$	
$(a \neq 0)$	$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax + b) + k$	
$(a \neq 0)$	$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax + b) + k$	$(k \in \mathbb{R})$

الاحتمالات

م طلحات

المصطلح الاحتمالي	معناه
تجربة عشوائية	كل تجربة تقبل أكثر من نتيجة
Ω كون الإمكانيات	هي مجموعة الإمكانيات الممكنة لتجربة عشوائية
حدث A	A جزءا من كون الإمكانيات Ω
حدث ابتدائي	كل حدث يتضمن عنصرا وحيدا
تحقق الحدث $A \cap B$	إذا تحقق الحدثان A و B في آن واحد
تحقق الحدث $A \cup B$	إذا تحقق A أو B أو هما معا
الحدث المضاد للحدث A	هو الحدث $\overline{A}$ $\left(A \cap \overline{A} = \varnothing \text{ و } A \cup \overline{A} = \Omega\right)$
A و B حدثان غير منسجمين	$A \cap B = \varnothing$

استقرار حدث - احتمال حدث:

تعريف:

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية

- عندما يستقر احتمال حد ث ابتدائي $\{\omega_i\}$ في قيمته p_i نقول أن احتمال الحدث $\{\omega_i\}$ هو: p_i

ونكتب: $P(\{\omega_i\}) = p_i$

- احتمال حدث هو مجموع الاحتمالات الابتدائية التي تكون هذا الحدث

أي إذا كان $A = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; ...; \omega_n\}$ حدثا من Ω فإن احتمال الحدث A هو:

$$p(A) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + p(\omega_3) + ... + p(\omega_n)$$

خاصيات:

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية

- $p(\varnothing) = 0$ و $p(\Omega) = 1$
- $0 \leq p(A) \leq 1$ لكل حدث A من Ω
- احتمال اتحاد حدثين:

لكل حدثين A و B من Ω

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ إذا كان A و B غير منسجمين

- احتمال الحدث المضاد:

لكل حدث A من Ω هو: $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

فرضية تساوي الاحتمالات:

تعريف:

إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في تجربة عشوائية كون إمكانيتها Ω

فإن احتمال كل حدث A من Ω هو: $p(A) = \dfrac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$

الاحتمال الشرطي- استقلالية حدثين:

تعريف:

ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث: $p(A) \neq 0$

احتمال حدث B علما أن الحدث A محقق هو العدد: $p_A(B) = p\left(B/A\right) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

نتيجة:

لكل حدثين A و B مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث: $p(A)\times p(B)\neq 0$

لدينا: $p(A\cap B)=p(A)\times p\left(B/A\right)=p(B)\times p\left(A/B\right)$

تعريف:

لكل حدثين A و B مرتبطين بنفس التجربة العشوائية

$p(A\cap B)=p(A)\times p(B) \Leftrightarrow$ A و B حدثان مستقلان

خاصية:

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية و Ω_1 و Ω_2 تجزيئا لـ Ω

$(\Omega_1\cup\Omega_2=\Omega$ و $\Omega_1\cap\Omega_2=\varnothing)$

لكل حدث A من Ω:

$$p(A)=p(\Omega_1)\times p\left(A/\Omega_1\right)+p(\Omega_2)\times p\left(A/\Omega_2\right)$$

قانون احتمال متغير عشوائي:

ليكن X متغيرا عشوائيا على Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية

لتحديد قانون احتمال المتغير العشوائي X نتبع المرحلتين التاليتين:

- تحديد $X(\Omega)=\{x_1;x_2;x_3;...;x_n\}$: مجموعة القيم التي يأخذها المتغير X
- نحسب الاحتمال $p(X=x_i)$ لكل i من المجموعة $\{1;2;...;n\}$

الأمل الرياضي- المغايرة- الانحراف الطرازي لمتغير عشوائي:

ليكن X متغيرا عشوائيا قانونه معرف بالجدول التالي:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

تعاريف:

الأمل الرياضي للمتغير X	$E(X)=x_1\times p_1+x_2\times p_2+x_3\times p_3+...+x_n\times p_n$
المغايرة للمتغير X	$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$
الانحراف الطرازي للمتغير X	$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

القانون الحداني:

ليكن p احتمال حدث A في تجربة عشوائية

نعيد هذه التجربة n مرة

المتغير العشوائي X الذي يربط كل نتيجة بعدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A

يسمى توزيعا حدانيا وسيطاه n و p

ولدينا: $p(X=k)=C_n^k\times p^k\times(1-p)^{n-k}$ $\quad \forall k\in\{0;1;2;...;n\}$

و $E(X)=n\times p$

و $V(X)=np(1-p)$

دالة الجذر من الرتبة n $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

القوى الجذرية

خاصية وتعريف:

الدالة : $x\mapsto x^n$ المعرفة على $\mathbb{R}^+$ تقبل دالة عكسية تسمى دالة الجذر من الرتبة n

ويرمز لها بالرمز: $\sqrt[n]{\ }$

$$\sqrt[n]{\ }:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$$
$$x\mapsto\sqrt[n]{x}$$

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}_+^2\qquad \sqrt[n]{x}=y\Leftrightarrow x=y^n$$

حالات خاصة:

- $\sqrt{x}=\sqrt[2]{x}$
- العدد: $\sqrt[3]{x}$ يسمى الجذر المكعب لـ x

خاصيات:

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}_+^2\qquad \forall n\in\mathbb{N}^*$$
$$\sqrt[n]{x^n}=x$$
$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$$
$$\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x=y$$
$$\sqrt[n]{x}>\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x>y$$

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}_+^2\qquad \forall(m;n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$$
$$\sqrt[n]{x}\times\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{x\times y}$$
$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^m=\sqrt[n]{x^m}$$
$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}=\sqrt[n]{\frac{x}{y}}\qquad(y\neq0)$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[n\times m]{x}$$

ملاحظة هامة:

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}}$$

مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة كما يلي:	مجموعة تعريفها:
$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$D_f=[0;+\infty[$
$f(x)=\sqrt[n]{u(x)}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_u$ و $u(x)\geq0\}$

النهايات:

$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{u(x)}$
$\ell\geq0$	$\sqrt[n]{\ell}$
$+\infty$	$+\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

الاتصال:

الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

إذا كانت u دالة موجبة و متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ متصلة على المجال I

الاشتقاق:

الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

ولدينا: $$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \qquad \forall x \in]0;+\infty[$$

إذا كانت u دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I

ولدينا: $$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{[u(x)]^{n-1}}} \qquad \forall x \in I$$

حل المعادلة: $x^n = a$ $\quad x \in \mathbb{R} \quad (a \in \mathbb{R})$

	n عدد فردي	n عدد زوجي
$a > 0$	$S = \{\sqrt[n]{a}\}$	$S = \{-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a}\}$
$a = 0$	$S = \{0\}$	$S = \{0\}$
$a < 0$	$S = \{-\sqrt[n]{-a}\}$	$S = \varnothing$

القوى الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا:

ليكن $r = \frac{p}{q}$ عددا جذريا غير منعدم حيث: $p \in \mathbb{Z}^*$ و $q \in \mathbb{N}^*$

$$x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} \qquad \forall x \in]0,+\infty[$$

ملاحظات:

- $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \qquad \forall x \in]0;+\infty[$
- مجموعة تعريف دالة عددية f لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي: $f(x) = [u(x)]^r \quad (r \in \mathbb{Q}^*)$ هي: $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ و } u(x) > 0\}$
- $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \left((u(x))^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \times u'(x) \times [u(x)]^{\frac{1}{n}-1}$

لكل عنصرين x و y من $\mathbb{R}_+^*$ ولكل عنصرين r و r' من $\mathbb{Q}^*$

$$(x^r)^{r'} = x^{r \times r'} \qquad x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r} \qquad (x \times y)^r = x^r \times y^r$$

$$\frac{1}{x^{r'}} = x^{-r'} \qquad \left(\frac{x^r}{y^{r'}}\right) = x^{r-r'}$$

المتتاليات العددية

المتتالية الحسابية – المتتالية الهندسية

	لمتتالية حسابية	لمتتالية هندسية
تعريف	$u_{n+1} = u_n + r$ r هو الأساس	$u_{n+1} = q \times u_n$ q هو الأساس
الحد العام	$u_n = u_p + (n-p)r$ $(p \leq n)$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$ $(p \leq n)$
مجموع حدود متتابعة	$u_p + \ldots + u_n = (n-p+1) \times \left(\frac{u_p + u_n}{2}\right)$	$u_p + \ldots + u_n = u_p \times \left(\frac{q^{n-p+1} - 1}{q-1}\right)$ $(q \neq 1)$
a و b و c ثلاثة حدود متتابعة	$2b = a + c$	$b^2 = a \times c$

المتتالية المكبورة – المتتالية المصغورة:

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية

- $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة بالعدد M $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_n \leq M$
- $(u_n)_{n\in I}$ مصغورة بالعدد m $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_n \geq m$
- $(u_n)_{n\in I}$ محدودة $\Leftrightarrow$ $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة و مصغورة

رتابة متتالية عددية:

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية

- $(u_n)_{n\in I}$ تناقصية $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n$
- $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$
- $(u_n)_{n\in I}$ ثابتة $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n$

ملاحظة:

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية حدها الأول: u_p

- إذا كانت $(u_n)_{n\in I}$ تناقصية فإن: $u_n \leq u_p \quad \forall n \in I$
- إذا كانت $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية فإن: $u_n \geq u_p \quad \forall n \in I$

نهاية متتالية:

نهاية المتتالية (n^{α}) حيث: $\alpha \in \mathbb{Q}^*$:

$\alpha < 0$	$\alpha > 0$
$\lim_{n \to +\infty} n^{\alpha} = 0$	$\lim_{n \to +\infty} n^{\alpha} = +\infty$

نهاية المتتالية الهندسية (q^n) حيث: $q \in \mathbb{R}$:

$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
المتتالية (q^n) ليس لها نهاية	$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$	$\lim_{n \to +\infty} q^n = 1$	$\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

مصاديق التقارب:

- كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متتالية متقاربة
- كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متتالية متقاربة

$$\left.\begin{array}{l} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim_{n \to +\infty} v_n = \ell \\ \lim_{n \to +\infty} w_n = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} u_n = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} |u_n - \ell| \leq v_n \\ \lim_{n \to +\infty} v_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} u_n = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \geq v_n \\ \lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

متتالية من النوع $u_{n+1} = f(u_n)$:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

حيث f دالة متصلة على مجال I بحيث $f(I) \subset I$ و a عنصرا من I

إذا كانت (u_n) متقاربة فإن نهايتها ℓ حل للمعادلة $f(x) = x$

إشارة حدانية
إشارة و تعميل ثلاثية الحدود

إشارة الحدانية: $ax+b$ $(a \neq 0)$

x	$-\infty$ $\qquad$ $-\frac{b}{a}$ $\qquad$ $+\infty$	
$ax+b$	عكس إشارة a	إشارة a

إشارة و تعميل ثلاثية الحدود: ax^2+bx+c $(a \neq 0)$

نضع : $P(x)=ax^2+bx+c$

<table>
<tr><th colspan="2">المميز</th><th>حل المعادلة:
$x \in \mathbb{R}$ $P(x)=0$</th><th>إشارة $P(x)$</th><th>تعميل $P(x)$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$\Delta = b^2 - 4ac$</td><td>$\Delta < 0$</td><td>$S=\phi$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>إشارة a</td></tr></table></td><td>غير ممكن
بواسطة حدانيتين</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$</td><td>$S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$</td><td><table><tr><td>$x$</td><td colspan="2">$-\infty$ $\qquad$ $\frac{-b}{2a}$ $\qquad$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>إشارة a</td><td>إشارة a</td></tr></table></td><td>$P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$</td></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$</td><td>$S=\{x_1,x_2\}$
حيث:
$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
و
$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td><td><table><tr><td>$x$</td><td colspan="3">$-\infty$ $\quad$ x_1 $\quad$ x_2 $\quad$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>إشارة a</td><td>عكس إشارة a</td><td>إشارة a</td></tr></table></td><td>$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$</td></tr>
</table>

إذا كان x_1 و x_2 حلي المعادلة: $ax^2+bx+c=0$ $\quad$ $x \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$

فإن: $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ و $x_1 \times x_2=\frac{c}{a}$