نفس المنصف.

• ABC على استقامة واحدة يعني:

$\vec{AB}=\alpha\vec{AC}$ يكافئ $(\vec{AB},\vec{AC})=k\pi$

يكافئ $\arg\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=k\pi$

يكافئ: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ حقيقي

• $\vec{AB}\perp\vec{AC}$ يكافئ:

يكافئ: $(\vec{AB},\vec{AC})=(2k+1)\frac{\pi}{2}$

يكافئ: $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=(2k+1)\frac{\pi}{2}$

$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ تخيلي صرف.

Exemple: * $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=i$

ABC قائم ومتساوي الساقين

* $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=-i$

ABC قائم ومتساوي الساقين

* $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=3i$ أو $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=-3i$

ABC قائم

* $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$

ABC متساوي الساقين.

* $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

يعني: $(\vec{AB},\vec{AC})\ \frac{\pi}{3}$ و $AC=AB$

ومنه ABC متقايس الأضلاع

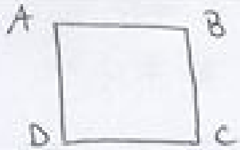
• لكي نعرف طبيعة المثلث ABC نحسب الأطوال:

1) $AB=AC=BC$: متقايس الأضلاع

2) $AB=AC$ و $AB^2+AC^2=BC^2$: قائم و متساوي الساقين

ABCD مستطيل

1) $\vec{AB}=\vec{DC}$ وزاوية قائمة مع $AD\neq AB$



ABCD مربع

$\vec{AB}=\vec{DC}$ وزاوية قائمة مع $AD=AB$

أو الأقطار متعامدة ومتساوية ومتناصفة

ABCD معين: الأقطار متعامدة وليست متساوية أو: $\vec{AB}=\vec{DC}$

$AD=AB$

لكن الزاوية لا تكون قائمة.

مرجح ومركز ثقل جملة مثقلة:

• G مركز ثقل للمثلث ABC يكافئ:

$\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$ و

$$z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$$

• G مركز ثقل مستطيل ABCD:

$$z_G=\frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}$$

• G مرجح الجملة المثقلة،

$\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$

$\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}+\gamma\vec{GC}=\vec{0}$

$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

دراسة مجموعة النقاط

عين مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق:

الأعداد المركبة

الشكل الجبري:

$$Z = x + iy$$

$x = Re\, Z$ الجزء الحقيقي

$y = Im\, Z$ الجزء التخيلي

Exemple: $Z = 3 + 4i$

$Z = -2i$

$Z = 3$

الشكل المثلثي:

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

حيث: $r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = Arg\, Z$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\sin\theta = \frac{y}{r}$

Exemple: $Z = 1 - i$

$r = \sqrt{(1)^2 + (-i)^2} = \sqrt{2}$

$\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ ، $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ومنه: $\theta = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$

$Z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$

قانون موافر:

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

Exemple: $Z = 1 - i$

أوجد $\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)^{2010}$ ، $\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)^{2009}$

$Z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$

$Z^{2010} = (\sqrt{2})^{2010} \cos\left(-\frac{\pi}{4} \times 2010\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} \times 2010\right)$

$Z^{2010} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} i = -i$

بنفس الطريقة $\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)^{2009}$

* قيم n حيث: Z^n حقيقي:

يكافئ التخيلي معدوم يكافئ:

$\sin\left(-\frac{\pi n}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{-\pi}{4} n = k\pi$

$n = -4k$

* Z^n تخيلي صرف، سالب $\left\{\begin{array}{l}\text{الحقيقي معدوم} \\ \text{التخيلي سالب}\end{array}\right.$

يكافئ: $\begin{cases} \cos\left(\frac{-\pi}{4} n\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{-\pi}{4} n\right) < 0 \end{cases}$

يكافئ: $-\frac{\pi}{4} n = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\theta$	0	$1/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

خواص العمدة:

$Z = [r, \theta]$ $\quad Z' = [r', \theta']$

$Arg\, Z \times Z' = Arg\, Z + Arg\, Z' + 2k\pi$

$Arg\, \frac{Z}{Z'} = Arg\, Z - Arg\, Z' + 2k\pi$

$Arg\, \frac{1}{Z} = -Arg\, Z + 2k\pi$

$Arg\, \bar{Z} = -Arg\, Z + 2k\pi$

$Arg\, Z^n = n\, Arg\, Z + 2k\pi$

Exemple: $Z = 1 + i$, $Z' = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$Z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$Z' = 1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\frac{Z}{Z'} = \frac{\sqrt{2}}{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right)$

Exemple ①: $\|3\vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}\| = 4$

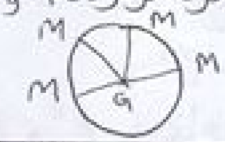
مرجح ومنه :

$\|3(\vec{MG}+\vec{GA}) + 2(\vec{MG}+\vec{GB}) - 3(\vec{MG}+\vec{GC})\| =$

$\|2\vec{MG} + \underbrace{3\vec{GA} + 2\vec{GB} - 3\vec{GC}}_{=\vec{0}}\| = 4$

$\|2\vec{MG}\| = 4 \Rightarrow MG = 2$

مجموعة النقاط دائرة مركزها G ونصف قطرها 2



Exemple ②:

$\|3\vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MC}\|$

H مرجح لـ A، C / G مرجح لـ A، B، C

$\|2\vec{MG}\| = \|2\vec{MH}\| \Rightarrow MG = MH$

مجموعة النقاط هي محور القطعة [HG]

Exemple ③: $3MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 10$

G مرجح لـ A، B، C

$3(\vec{MG}+\vec{GA})^2 + 2(\vec{MG}+\vec{GB})^2 - 3(\vec{MG}+\vec{GC})^2 = 10$

$2MG^2 + 3GA^2 + 2GB^2 - 3GC^2 = 10$

نحسب الأطوال GA، GB، GC ثم نرتبها ونخوض. أمثلة:

- $MG^2 = 4 \Leftarrow MG = 2$: دائرة مركزها G ونصف قطرها 2
- $MG^2 = -3$: مجموعة خالية
- $MG^2 = 0$: نقطة G

Exemple ④: $3\vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC} = 2\vec{FE}$

$2\vec{MG} = 2\vec{FE}$

$\vec{MG} = \vec{FE} \Rightarrow \vec{GM} = \vec{EF}$

مجموعة النقط هي النقطة M صورة G بانسحاب شعاعه $\vec{EF}$

التحويلات النقطية :

① عبارة الانسحاب الذي شعاعه $\vec{AB}$:

$$Z' = Z + Z_B - Z_A$$

② التحاكي الذي نسبته k ومركزه ω :

$$Z' - Z_\omega = k(Z - Z_\omega)$$

③ الدوران الذي زاويته θ ومركزه ω :

$$Z' - Z_\omega = e^{i\theta}(Z - Z_\omega)$$

④ التشابه الذي نسبته k وزاويته θ ومركزه ω

$$Z' - Z_\omega = k e^{i\theta}(Z - Z_\omega)$$

Exemple:

- عين الدوران الذي زاويته $\theta = \frac{-\pi}{2}$ ومركزه $A(1,1)$

$Z' - Z_A = e^{i(\frac{-\pi}{2})}(Z - Z_A)$

$Z' - (1+i) = -i(Z - (1+i))$

$Z' - 1 - i = -iZ + i - 1$

$Z' = -iZ + 2i$

- لتكن $A(0,1)$، أوجد D صورة A بالتحاكي الذي مركزه $\omega(1,0)$ ونسبته $k = -2$

$Z_D - Z_\omega = k(Z_A - Z_\omega)$

$Z_D - 1 = -2(i - 1)$ أي

$Z_D = -2i + 3$

التعرف على أنواع التحويلات :

$Z' = aZ + b \qquad b = \alpha + i\beta$

① $a = 1$

انسحاب شعاعه ذو اللاحقة b

$$Z' = Z + 3 - i$$

خواص الطويلة:

* $|Z \times Z'| = |Z| \times |Z'|$
* $|Z + Z'| \neq |Z| + |Z'|$
* $\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$ $Z' \neq 0$
* $\left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{|Z|}$ $Z \neq 0$

المرافق:

$Z = x + iy$, $\overline{Z} = x - iy$

Exemple: $\overline{3+2i} = 3 - 2i$

$\overline{-3+i} = -3 - i$

$\overline{3i} = -3i$

$\overline{2} = 2$

خواص المرافق:

* $\overline{Z \times Z'} = \overline{Z} \times \overline{Z'}$
* $\overline{Z + Z'} = \overline{Z} + \overline{Z'}$
* $\overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\overline{Z}}{\overline{Z'}}$ $Z' \neq 0$
* $\overline{\left(\frac{1}{Z}\right)} = \frac{1}{\overline{Z}}$ $Z \neq 0$
* $\overline{(Z^n)} = \overline{Z}^n$

ملاحظة:

$|Z| = 1$ يكافئ: $\frac{1}{Z} = \overline{Z}$

Z حقيقي يكافئ: $Z = \overline{Z}$

Z تخيلي صرف يكافئ: $\overline{Z} = -Z$

Exemple: • $Z = \frac{1+4i}{Z-i}$

ماهو $\overline{Z}$ ؟

$$\overline{Z} = \overline{\left(\frac{1+4i}{Z-i}\right)} = \frac{\overline{1+4i}}{\overline{Z-i}}$$

$$\overline{Z} = \frac{1-4i}{Z+i}$$

• $Z = 3Z^2 + iZ + 3 - i$

$\overline{Z} = \overline{3Z^2 + iZ + 3 - i}$

$\overline{Z} = \overline{3Z^2} + \overline{iZ} + \overline{3-i}$

$\overline{Z} = 3 \times \overline{Z}^2 - i\overline{Z} + 3 + i$

الهندسة والأعداد المركبة:

• لاحقة $\overrightarrow{AB}$ هي: $Z_B - Z_A$

• طول AB هو: $AB = |Z_B - Z_A|$

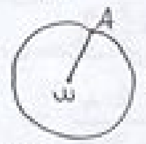
• لاحقة منتصف AB: $Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$

• النقطة $M(x, y)$ لاحقتها $Z = x + iy$

Exemple: $A(3, -1)$

لاحقتها $Z_A = 3 - i$

• (C) دائرة

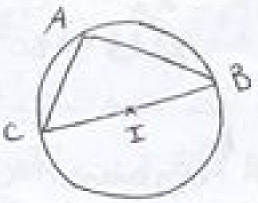


A من (C) يعني: $\omega A = r$

$|Z_A - Z_\omega| = r$

• ABC قائم في A

القطر هو الوتر



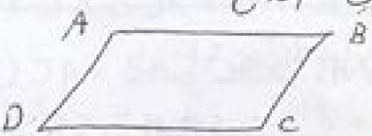
معادلة الدائرة:

$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = r^2$

$Z_I = \frac{Z_C + Z_B}{2}$

$r = \frac{|Z_B - Z_C|}{2}$

$ABCD$ متوازي أضلاع



يكافئ: $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

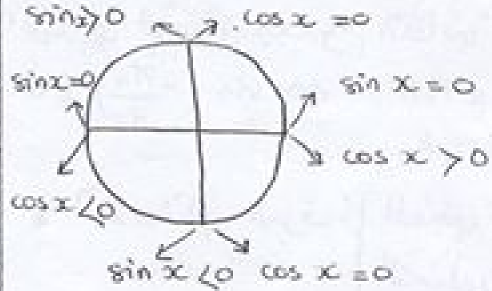
يكافئ: $Z_C - Z_D = Z_B - Z_A$

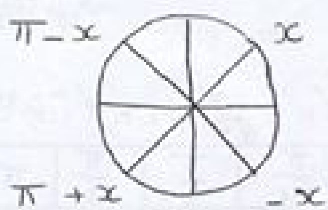
يمكن أن نبرهن أن AC و DB لهما

$$\left(\frac{z}{z'}\right)^3 = (\sqrt{2})^3\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{12}\right)\right)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\bar{z} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$





ملاحظة: تخيلي صرف أو حقيقي صرف نضيف $K\pi$.

تخيلي صرف سالب، تخيلي صرف موجب، حقيقي موجب، حقيقي سالب نضيف $2K\pi$

القيم المضبوطة:

$z_1 = 3\sqrt{2} + i\sqrt{6}$, $z_2 = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$

وجد القيم المضبوطة ل:

$$\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}$$

$$z_1 = 2\sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$z_2 = \sqrt{6}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

نبحث عن $\frac{z_1}{z_2}$ شكل مثلثي وجبري:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{3}i} \times \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + \sqrt{3}i}$$

$$= \underbrace{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}}_{x} + \underbrace{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}}_{y} i$$

الشكل المثلثي تتبع الخواص:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \underbrace{2}_{r}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

ومنه:

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

الشكل الأسي:

$$z = re^{i\theta}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

خواص:

* $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$
* $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$
* $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')}$

ملاحظة: $z = -3e^{i\theta}$

$$z = 3e^{i(\theta + \pi)}$$

بين أن:

$$z = -\cos\theta - i\sin\theta$$

يكافئ: $z = \cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi)$

أوجد الشكل المثلثي ل z:

$$z = -2(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = 2(-\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$z = 2(\cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi))$$

خواص الشكل الأسي:

$$z = re^{i\theta}, \quad z' = r'e^{i\theta'}$$

$$z \times z' = rr'e^{i(\theta + \theta')}$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta - \theta')}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

مثال الانتقال من الشكل الأسي إلى الجبري:

$$z = 2e^{i\pi/4} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$