UNIVERSITÉ BATNA 2
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT S.C.S.T.

22 Mai 2017

EXAMEN FINAL DE MÉTHODES NUMÉRIQUES

(durée : 1h 30 mn)

Exercice 1 *Isujet de l'interrogation écrite* **: (8 pts)**

Soit l'équation $f(x) = x^5 - 2x^4 + 1 = 0$.

1) Séparer ***analytiquement*** les racines de cette équation.
2) Trouver une fonction F pour laquelle la méthode du ***point fixe*** converge vers la racine ***minimale*** de l'équation $f(x) = 0$.
3) Calculer cette racine à 10^{-3} près.

Exercice 2 : (12 pts)

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

1) Mettre ce système sous la forme matricielle $Ax = b$.
2) Calculer sa solution ***exacte*** par la méthode d'élimination de ***Gauss*** puis en déduire la valeur du ***déterminant*** de la matrice A.

Bon Courage

66,409

$x^5 = 2x^4 - 1$

$x = \sqrt[5]{2x^4 - 1}$

10,48576

-3,62.

9/4

Exercice 1 :

1) La fonction $f(x) = x^5 - 2x^4 + 1$ est ***définie*** et ***continue*** sur $\mathbb{R}$ car c'est un ***polynôme***. .25 pt

Elle a pour dérivée $f'(x) = 5x^4 - 8x^3$. .25 pt

Cherchons d'abord les racines de $f'(x) = 0$:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 8x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(5x - 8) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 1.6)$. .25 pt

Passons ensuite aux limites :

$f(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^5 - 2x^4 + 1) = \lim_{x\to-\infty} x^5(1 - 2/x + 1/x^5) = -\infty$. .25 pt

$f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^5 - 2x^4 + 1) = \lim_{x\to+\infty} x^5(1 - 2/x + 1/x^5) = +\infty$. .25 pt

Calculons enfin les valeurs de f aux points où s'annule la dérivée $f'(x)$:

$f(0) = 1$ et $f(1.6) = -1.62144$. .5 pt

En vertu du ***théorème des valeurs intermédiaires***, on a :

dans $]-\infty, 0[$: $f(-\infty).f(0) < 0$ et $f'(x) \neq 0$

alors l'équation donnée $f(x) = 0$ admet ***une racine unique***. .5 pt

dans $]0, 1.6[$: $f(0).f(1.6) < 0$ et $f'(x) \neq 0$

alors l'équation donnée $f(x) = 0$ admet ***une racine unique***. .5 pt

dans $]1.6, +\infty[$: $f(1.6).f(+\infty) < 0$ et $f'(x) \neq 0$

alors l'équation donnée $f(x) = 0$ admet ***une racine unique***. .5 pt

En résumé, l'équation donnée $f(x) = x^5 - 2x^4 + 1 = 0$ admet ***trois racines réelles*** : la 1ère dans $]-\infty, 0[$, la 2ème dans $]0, 1.6[$ et la 3ème dans $]1.6, +\infty[$.

2) Il est clair que la ***racine minimale*** de l'équation $f(x) = x^5 - 2x^4 + 1 = 0$ appartient à $]-\infty, 0[$. Cet intervalle peut être réduit à $]-1, 0[$ vu que $f(-1).f(0) = (-2).(1) < 0$. .25 pt

Une ***condition suffisante*** pour que la méthode du ***point fixe*** soit ***convergente*** vers la ***racine minimale*** de l'équation $f(x) = 0$ est de trouver une fonction F telle que sa dérivée vérifie $|F'(x)| < 1$ pour $x \in [-1, 0]$.

Transformons l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $x = F(x)$. On a :

$x^5 - 2x^4 + 1 = 0$ d'où $x^4(x - 2) + 1 = 0$ soit $x^4 = \frac{1}{2-x}$ d'où $x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2-x}}$.

Puisque la ***racine minimale*** est ***négative***, on choisira la forme $x = F(x) = -\frac{1}{\sqrt[4]{2-x}}$. 1 pt

Il s'ensuit $F'(x) = -\frac{1/4}{\sqrt[4]{(2-x)^5}}$. Voyons si la condition $|F'(x)| < 1$ est respectée pour $x \in [-1, 0]$. On a :

$$-1 \le x \le 0 \Rightarrow 0 \le -x \le 1 \Rightarrow 2 \le 2 - x \le 3 \Rightarrow 2^5 \le (2-x)^5 \le 3^5 \Rightarrow \sqrt[4]{2^5} \le \sqrt[4]{(2-x)^5} \le \sqrt[4]{3^5} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3^5}} \le \frac{1}{\sqrt[4]{(2-x)^5}} \le \frac{1}{\sqrt[4]{2^5}} \Rightarrow \frac{1/4}{\sqrt[4]{3^5}} \le \frac{1/4}{\sqrt[4]{(2-x)^5}} \le \frac{1/4}{\sqrt[4]{2^5}} \text{ soit } \frac{1/4}{\sqrt[4]{3^5}} \le |F'(x)| \le \frac{1/4}{\sqrt[4]{2^5}} \text{ c'est-à-dire :}$$

$0.063319.. \le |F'(x)| \le 0.105112..$

Ceci prouve que $|F'(x)| < 1$ pour $x \in [-1, 0]$: la *condition de convergence est respectée.* **1.5 pt**

Une autre méthode :

La dérivée $F'(x) = -\dfrac{1/4}{\sqrt[4]{(2-x)^5}}$ et la dérivée seconde $F''(x) = -\dfrac{5/16}{\sqrt[4]{(2-x)^9}}$.

Pour $x \in [-1, 0]$: $(2 - x) > 0$ et $F''(x) < 0$. Ainsi, $F'(x)$ est ***décroissante*** dans le même intervalle.

Par conséquent : $F'(0) \le F'(x) \le F'(-1)$ ou bien $-\dfrac{1/4}{\sqrt[4]{32}} \le F'(x) \le -\dfrac{1/4}{\sqrt[4]{243}}$.

En prenant les valeurs absolues : $\dfrac{1/4}{\sqrt[4]{243}} \le |F'(x)| \le \dfrac{1/4}{\sqrt[4]{32}}$ c'est-à-dire $0.063319.. \le |F'(x)| \le 0.105112..$

Ainsi $|F'(x)| < 1$, et la ***condition de convergence est vérifiée.***

En résumé, la suite (x_n) définie par $x_n = F(x_{n-1}) = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{2-x_{n-1}}}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ ***converge*** $\forall x_0 \in [-1, 0]$.

3) Avec l'équation ***récurrente*** $x_n = F(x_{n-1}) = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{2-x_{n-1}}}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ $x_0 = -0.5$ et $\varepsilon = 10^{-3}$, les ***itérations*** de la méthode du ***point fixe*** sont :

$x_1 = -0.795$;

$x_2 = -0.773$;

$x_3 = -0.775$; **2 pts**

$x_4 = -0.775$.

Vu que $|x_4 - x_3| < 10^{-3}$, on ***arrête les calculs***. L'équation donnée $f(x) = x^5 - 2x^4 + 1 = 0$ admet comme ***racine minimale*** le nombre -0.775 à 10^{-3} *près*.

Exercice 2 :

1) L'équation matricielle $Ax = b$ est :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$ **.5 pt**

2) La méthode d'élimination de ***Gauss*** transforme l'équation matricielle $Ax = b$, où A est une ***matrice quelconque***, en une équation équivalente $Ux = b'$, où U est une ***matrice triangulaire supérieure***.

Ecrivons d'abord la matrice augmentée :

$$[A, b] = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 10 \\ -1 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$ **.5 pt**

1ère étape : On annule les termes ***sous-diagonaux*** de la 1ère colonne de A en utilisant les équations :

$L_2^{(1)} = L_2 - L_1$ .5 pt

$L_3^{(1)} = L_3 - 2.L_1$ .5 pt

$L_4^{(1)} = L_4 + L_1$ .5 pt

La matrice augmentée devient :

$$[A, b]^{(1)} = \begin{array}{@{}c@{}l@{}} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 7 \end{array}\right] & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \\ L_4^{(1)} \end{array} \end{array}$$

1 pt 1 pt 1 pt

2ème étape : On annule le terme ***sous-diagonal*** de la 3ème colonne de $A^{(1)}$, puisque ceux de la 2ème colonne sont déjà nuls, en utilisant l'équation : $L_4^{(2)} = L_4^{(1)} + L_3^{(1)}$ .5 pt

La matrice augmentée devient :

$$[A, b]^{(2)} = \begin{array}{@{}c@{}l@{}} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \\ L_4^{(2)} \end{array} \end{array}$$

1 pt

3ème étape : Par substitution inverse, on obtient :

$x_4 = 3$; 1 pt

$x_3 - 2x_4 = -4$ d'où $x_3 = 2$; 1 pt

$-x_3 + x_4 = -2$ d'où $x_3 = 5$; 1 pt

Vu que la 2ème et la 3ème ligne nous donnent des ***résultats contradictoires***, il est clair que l'on est dans un *cas d'impossibilité*. Par conséquent, le système linéaire donné n'admet *aucune solution*. 1 pt

Une autre méthode (pour la 3ème étape seulement)

Par substitution inverse, on obtient :

$x_4 = 3$;

$x_3 - 2x_4 = -4$ d'où $x_3 = 2$;

$0.x_2 - x_3 + x_4 = -2$ d'où $0.x_2 = -3$: il s'agit d'un *cas d'impossibilité*.

On en déduit que le système linéaire donné n'admet *aucune solution*.

Le déterminant de la matrice A est égal au produit des éléments diagonaux de la matrice $A^{(2)}$. .5 pt

Il en résulte :

$\det A = 1 \times 0 \times 1 \times 1$ soit $\det A = 0$. .5 pt