Université de Batna 2 Mostefa ben Boulaïd
Faculté de technologie
Département du socle commun sciences et technologies

Module: logique combinatoire et séquentielle LCS
2ème année

SERIE DE TD N°2 :
L'Algèbre de Boole et les portes logiques

EXERCICE N°1

Simplifier algébriquement les fonctions suivantes:

1/ $F_1 = a.(a+b)$

2/ $F_2 = (a+b).(\overline{a}+b)$

3/ $F_3 = (a\overline{b}+c)(a+\overline{b}).c$

4/ $F_4 = a\overline{b} + a.\overline{c} + \overline{bc}$

EXERCICE N°2

1 / Exprimer la fonction suivante : $F(A,B,C) = (A+B)(B+\overline{C})(A+\overline{B})$ en utilisant seulement des NAND.

2/ Monter que F est identique à: $F(A,B,C) = AB + A\overline{C}$

3/ Donner l'expression de F avec 4 NOR à 2 entrées.

EXERCICE N°3

a/ Simplifier algébriquement la fonction F présentée par la table de vérité suivante :

a	b	c	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

b/ Etablir le logigramme de la fonction F simplifiée.

c/ Donner la table de vérité de la fonction $T = \overline{a}bc + a\overline{b}c + ab\overline{c} + abc$

Exo 1 :-

1)- convertiven binaire et en Hexadecimal le nombre décimal suivant 23,21124

2)- Déterminer l'équivelent décimal des nombre suivant :

a)- $(11,01101)_2$; b)- $(134)_8$; c)- $(EA7)_H$

solution :-

1)-

$$\begin{array}{r|l} 23 & 2 \\ \hline 1 & 11 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 11 & 2 \\ \hline 1 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 \end{array}$$

$(23)_{10} = (10111)_2$

$(0,21124)_{10} = ?$

$0,21124 \times 2 = 0,42248$

$0,42248 \times 2 = 0,84496$

$0,84496 \times 2 = 1,68992$

$1,68992 \times 2 = 1,37984$

$0,37984 \times 2 = 0,75968$

$0,75968 \times 2 = 1,51936$

$(0,21124)_{10} = (0,001101)$

$(23,21124)_{10} = (10111,001101)_2$

-: Tox 3

b) en Hexadécimale (base 16) :

$(23,21124)_{10} = (\qquad\qquad)_{16}$

$$\begin{array}{r|l} 23 & 16 \\ \hline 7 & \begin{array}{r|l} 1 & 16 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \end{array}$$

$(23)_{10} = (17)_H$

$0,21124 \times 16 = \boxed{3},37984$

$0,37984 \times 16 = \boxed{6},0744$

$(0,21124)_{10} = (0,36)_H$

$(23,21124)_{10} = (17,36)_{16}$

وناه لي شداليهم

2) a) $(11,01101)_2 = ?$

$1\times 2^0 + 1\times 2^1 + 0\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3} + 0\times 2^{-4} + 1\times 2^{-5}$

$= (3,40625)_{10} = 2 + 1 + 0,25 + 0,125 + 0,03125$

b) $(134)_8 = (\ ?\ )_{10}$

$4\times 8^0 + 3\times 8^1 + 1\times 8^2 = 8 + 24 + 64 = (92)_{10}$

c) $(EA7)_H = (\ ?\ )_{10}$

$7\times 16^0 + A\times 16^1 + E\times 16^2 = 7 + (10\times 16) + (14\times 16^2)$

$= (3751)_{10}$

A = 10 F = 15

B = 11

C = 12

D = 13

E = 14

Exo N° 2 :-

1) convertir le nombre binaire suivant en code Gray $(11100)_2$:

2) convertir le code Gray suivant en binaire 11100

Exo N° 3 :-

1) convertire le nombre BCD suivant en décimale 10000110

2) convertire le nombre décimale suivant 13 en BCD

Exo N° 4 :-

effectuer en binaire, en octal, en Hexadécimale et en BCD l'addition suivante : 37 + 28

Exo N° 5 :-

Faire la soustraction suivante en complement à deux

10,25 - 7,75

solution :-

Exo 4 :- en binaire

$37 + 25 = ?$

les régles de l'addition binaire

$(37)_{10} = (100101)_2$

$(28)_{10} = (11100)_2$ $\Rightarrow$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}\overset{1}{0}\overset{1}{0}101 \\ +\ 11100 \\ \hline \boxed{1000001} \end{array}$$

$$\begin{cases} 0+0=0 \\ 0+1=1 \\ 1+0=1 \\ 1+1=0 \text{ avec : } r=1 \end{cases}$$

en octale :-

37 + 28

$(37)_{10} = (45)_8$

$(28)_{10} = (34)_8$

40x3

(45)

$$\begin{array}{r|l} 37 & 8 \\ \boxed{5} & 4 \mid 8 \\ & \boxed{4} \mid 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ +34 \\ \hline 101 \end{array}$$

الفهم :-

$$\begin{array}{rr} \overset{1}{4} & 5 \\ 3+ & 4 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 8 \\ \boxed{0} & 1 \mid 8 \\ & \boxed{1} \mid 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ +4 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 8 \\ \boxed{1} & 1 \mid 8 \\ & \boxed{1} \mid 0 \end{array}$$

$9\,(11)_8$

$8\,(10)_8$

en Hexadicimale :-

$(37)_{10} = (25)_H$

$(28)_{10} = (1C)_H$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{2}5 \\ +1C \\ \hline 41 \end{array}$$

$$5 + C = 17 \;\begin{array}{r|l} & \cancel{16} \\ \boxed{1} & 1 \mid 8 \\ & \boxed{1} \mid 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 28 & 16 \\ \boxed{12} & 1 \mid 16 \\ & \boxed{1} \mid 0 \end{array} \quad (1C)$$

$$\begin{array}{r|l} 37 & 16 \\ \boxed{5} & 2 \mid 16 \\ & \boxed{2} \mid 0 \end{array} \quad (25)_{16}$$

$$1 + 2 + 1 = 4 \;\begin{array}{r|l} & \cancel{16} \\ \boxed{4} & 0 \mid 16 \\ & \boxed{0} \mid 0 \end{array}$$

ملاحظة :- دائما نضيف 6 عند الكود الأكبر من 9

code BCD (Binary coded décimal)

N	code binaire $2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0$
0	0 0 0 0
1	0 0 0 1
2	0 0 1 0
3	0 0 1 1
4	0 1 0 0
5	0 1 0 1
6	0 1 1 0
7	0 1 1 1
8	1 0 0 0
9	1 0 0 1
10	1 0 1 0
11	1 0 1 1
12	1 1 0 0
13	1 1 0 1
14	1 1 1 0
15	1 1 1 1

$(45)_{10} = (01000101)_{BCD}$

$(45)_{10} = (101101)_2$

$(1000\ 1001,0011)_{BCD} = (89,3$

$(000110001001)_{BCD} = (189)$

او تقسموا من ليمنة (4) و لامكافتش
دو لها 4 صفار.

En BCD :-

$37 + 28$

$(37)_{10} = (0011\ 0111)_{BCD}$

$(28)_{10} = (0010\ 1000)_{BCD}$

$$\begin{array}{r} 0011\,0111 \\ 0010\,1000 \\ \hline \underbrace{0101}_{5}\,|\,\underbrace{1111}_{15>9} \end{array}$$

Donc en ajoute 6.

$$
\begin{array}{r}
0\,1\,0\,1\,1\,1\,1\,1 \\
+ \quad\quad 0\,1\,1\,0 \\
\hline
\underbrace{0\,1\,1\,0}_{6}\;\underbrace{0\,1\,0\,1}_{5}
\end{array}
$$

2 d f X

EXO N° 02 :-

conversion binaire - code Gray :-

$(11100)_2 = 10010$

MSB

Où :-

$$
\begin{array}{r}
1\,1\,1\,0\,0 \\
+1\,1\,1\,0\,0 \\
\hline
1\,0\,0\,1\,0|0
\end{array}
$$

code Gray

نهزو رقم أول MSB كما راه
مبعد نجمعوا رقم لوراه و لي
قدامو : $0 = 1 + 1$

$0 = 1 + 1$

$0 = 0 + 1$

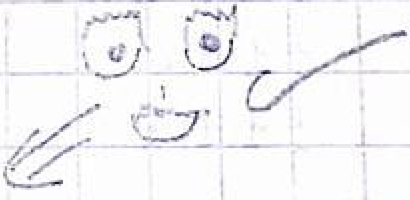
$0 = 0 + 0$

conversion BCD - décimal ⇒ code Gray - binaire :-

MSB 1 1 1 0 0

MSB 1 0 1 1 1

نحطوا رقم أول كما راه و مبعد نتيجة
لي لقيناها نجمعوها مع الرقم.



EX N° 3 :-

conversion BCD - décimal :-

$(10000110)_{BCD} = (86)_{10}$

$\{ou = +\}$ $\{ond = \times\}$

2) conversion décimal - BCD :-

$(13)_{10} = (000\ 1\ 0011)_{BCD}$

Exo N° 5

كفاه خرجو هذي

$10,25 - 7,75$

$(10,25)_{10} = (1010,010)_2$

$(7,75)_{10} = (0111,110)_2$

$Cp_2(N) = Cp_1(N) + 1$

$Cp_1(0111,110) = (1000,001)$

$$\begin{array}{r} 1000,001 \\ +\quad\quad\quad 1 \\ \hline 1000,010 \end{array}$$

$Cp_2(7,75) \rightarrow 1000,010$

$$\begin{array}{r} 1010,010 \\ +1000,010 \\ \hline 1\,\underbrace{0010}_{2},\underbrace{100}_{50} \end{array}$$

↓

débordement

dépacement de capacité.

Ex supplementaire :-

عاوديها

a) $(140)_8 = (001100000)_2$

b) $(100110011010)_2 = (4632)_8$

نقسمها 3 3 ثواني

c) $(001110011101)_2 = (39D)_H$

d) $(7A1F)_H = (0111\,1010\,0001\,1111)_2$

Rappel du cours l'algèbre de Boole :

نظام الباردائقا (0,1)

$(a\bar{b}+c)(a+\bar{b})\cdot c =$

$ca a\bar{b} + a\bar{b}\bar{b}c + ca + c\bar{b}c$

$ca\bar{b} + a\bar{b}c + ac + c\bar{b}$

$\bar{b}(ca + ca) + c(a + \bar{b})$

$\bar{b}ca +$

مسلمة

Poustulat	Propriété	ou (OR)	et (AND)
1	Associativité رجوع تجميع	$a + (b+c) = (a+b)+c = (a+c)+b$	$a\cdot(bc) = (ab)c = b(a\cdot c)$
2	commutativité تبديل	$a + (b\cdot c) = a + b = b+a$	$a\cdot b = b\cdot a$
3	distributivité توزيع	$a + (b\cdot c) = (a+b)\cdot(a+c)$	$a(b+c) = ab + ac$
4	element neutre حيادي (لا يؤثر)	$a + 0 = a$	$a\cdot 1 = a$
5	complémentation عكس	$a + \bar{a} = 1$ محفظ	$a\cdot\bar{a} = 0$ محفظ

théorème	propriété	ou (OR)	et (AND)
1	Idempotence	$a+a=a$	$a\cdot a=a$
2	Involution	$\bar{\bar{a}}=a$ $\Leftrightarrow$	$\bar{\bar{a}}=a$
3	élément absorbant	$a+1=1$	$a\cdot 0=0$
4	Loi d'absorption 1	$a+ab=a$	$a(a+b)=a$
5	Loi d'absorption 2	$a+\bar{a}b=a+b$	$a(\bar{a}+b)=a\cdot b$
6	loi de Morgan	$(\overline{a+b})=\bar{a}\cdot\bar{b}$	$(\overline{a\cdot b})=\bar{a}+\bar{b}$
7	loi d'absorption 3	$ab+\bar{a}c=ab+\bar{a}c$	$(a+b)(\bar{a}+c)=(a+b)(\bar{a}+c)$

TD N 2 :-

Exo 1 :-

$F_1) = a\cdot(a+b) = a\cdot a + ab$

$a + ab$

$a(1+b) = a$

$F_2) (a+b)(\bar{a}+b) = \cancel{a}\bar{a} + ab + b\bar{a} + \cancel{b}b$

$$ab + b\bar{a} + b \Rightarrow b(a + \bar{a}) + b$$
$$= b + b$$
$$= b$$

$$F_3 = (a\bar{b} + c)(a + \bar{b}) \cdot c$$
$$(a\bar{b} + c)(ac + \bar{b}c)$$
$$a\bar{b}ac + a\bar{b}\bar{b}c + cac + c\bar{b}c$$
$$\underbrace{a\bar{b}c + a\bar{b}c}_{} + ca + c\bar{b}$$
$$a\bar{b}c + ca + c\bar{b}$$
$$\bar{b}c(a + 1) + ca$$
$$c(\bar{b} + a)$$

$$F_4 = a\bar{b} + a\bar{c} + \overline{bc}$$
$$a\bar{b} + a\bar{c} + \bar{b} + \bar{c}$$
$$\bar{b}(a + 1) + a\bar{c} + \bar{c}$$
$$\bar{b} + \bar{c}(a + 1)$$
$$\bar{b} + \bar{c} = \overline{b \cdot c}$$

المهم !!

$$(1742)_8 = (\ ?\ )_H$$
$$(1742)_8 = (001\ 111\ 100\ 010)_2 = (3E2)_H$$

Exercice 2 :-

1) Exprimer la fonction suivant
$F(A,B,C) = (A+B)(B+\bar{C})(A+\bar{B})$ en utilisant seulement des NAND

2) Montrer que F est identique à $F(A,B,C) = AB + A\bar{C}$

3) Donner l'expression de F avec 4 NOR à 2 entrées.

Rappel :-

1° NOT ← نفي

Notation

NOT $(A) = \bar{A}$

symbole

table de vérité

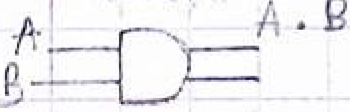
A	$\bar{A}$
0	1
1	0

2° AND (et)

Produit

$S = A \cdot B$

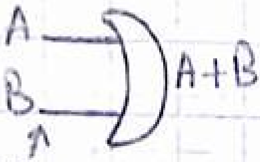
Le nombre de variable



A	B	A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3° OR (ou)

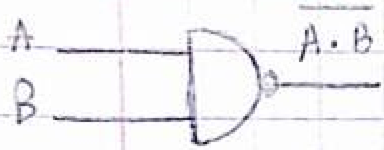
$S = A + B$



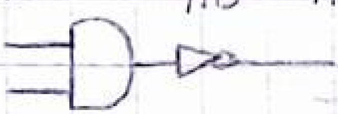
عندما الأقل واحدة منهم تساوي 1

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

4° NAND (NOT AND) (non et)



ou



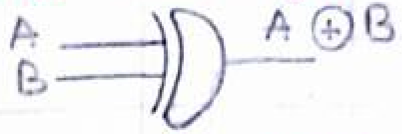
A	B	$\overline{A.B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

5° NOR (NOT OR):

$S = \overline{A+B}$

A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

6° oR exclusif (xoR) :-

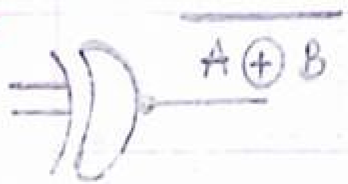


$S = A \oplus B$

$\overline{A}B + A\overline{B}$

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

7° $\overline{XOR}$



A	B	$\overline{A \oplus B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

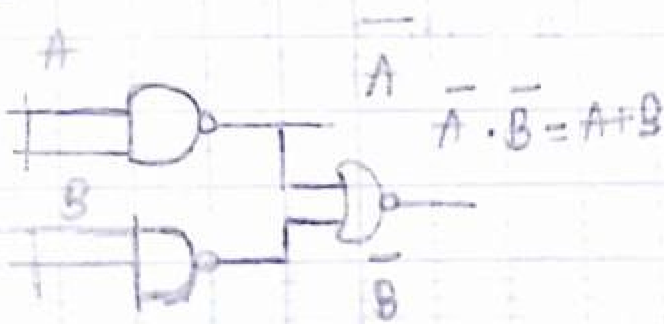
Réalisation des opération logiques à partir de porte NAND :-

1) NoT

$\overline{A} = \overline{A \cdot A}$

2) oR.

$A + B = \overline{\overline{A + B}} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$



Exo 3 :-

$F(A,B,C) = (A+B)(B+\bar{C})(A+\bar{B})$

$\overline{\overline{(A+B)}}\ \overline{\overline{(B+\bar{C})}}\ \overline{\overline{(A+B)}}$

$\overline{\bar{A}\cdot\bar{B}}\cdot\overline{\bar{B}\cdot C}\cdot\overline{\bar{A}\cdot B}$

$\overline{\overline{\bar{A}\cdot\bar{B}}\cdot\overline{\bar{B}\cdot C}\cdot\overline{\bar{A}\cdot B}} = \overline{\overline{\overline{\bar{A}\cdot\bar{B}}\cdot\overline{\bar{B}\cdot C}}\cdot\overline{\bar{A}\cdot\bar{B}}}$

2) إثبات أن:-

$B+\bar{B}=1$

$F(A,B,C) = AB + A\bar{C}$

$(A+B)(B+\bar{C})(A+\bar{B})$

ننشرو نبسط:-

$(A+B)(A+\bar{B})(B+\bar{C})$

$(A+A\bar{B}+AB)(B+\bar{C})$

$AB+AB+A\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+AB\bar{C}$

$= AB + A\bar{C} + A\bar{C}$

$= AB + A\bar{C}$

باش نرجع للجمع نديرو 2 بار $=$

3) $F = AB + A\bar{C}$

$= A\cdot(B+\bar{C})$

$\overline{\overline{A\cdot(B+\bar{C})}} = \overline{\bar{A}\cdot\overline{(B+\bar{C})}}$

4 NAND

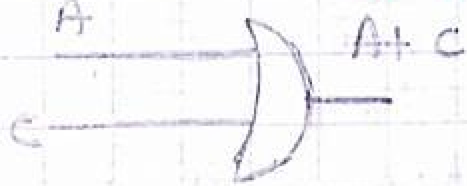
$$F = AB + A\bar{C} = \overline{\overline{AB + A\bar{C}}}$$
$$= \overline{\overline{AB} \cdot \overline{A\bar{C}}}$$

Exercice 3 :- ورقة راها تتلعوف

a- وين كاين 0 في جدول نديرو ابار

$$F = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$
$$\bar{a}c(\bar{b} + b) + a\bar{b}(\bar{c} + c) + ab(\bar{c} + c)$$
$$= \bar{a}c + a\bar{b} + ab$$ وين 1 في F
$$= \bar{a}c + a(\bar{b} + b) = \bar{a}c + a$$
$$= a + \bar{a}c = a + c$$

l'intibition



$$T = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$

a	b	c	T
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Logique c8.1

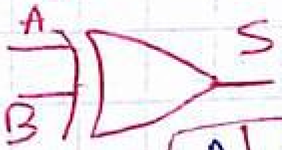
cours

les portes logiques

XOR

$S = A \oplus B$

$\bar{A} B + A \bar{B}$



A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	S
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0
				0

XNOR

$S = \overline{A \oplus B}$

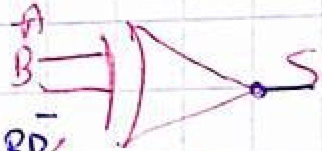
$= \overline{\bar{A} B + A \bar{B}}$

$(A + \bar{B})(\bar{A} + B)$

$\cancel{A\bar{A}} + AB + \bar{B}\bar{A} + \cancel{B\bar{B}}$

$= AB + \bar{A}\bar{B} = A \odot B$

نفس كتابة $< A \otimes B$



A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

chapitre 4 :-

simplification des fonctions logiques

كتابة الدالة بأقل عدد ممكن

الدالة منطقية ذات متغيرات حقيقية (3)

علاقة أو و ، لا

une fonction logique $f(x_i)$ de n variables x_i combinées par les operation Et, ou et non

Ex :- $f(x,y,z) = xy + \bar{x}z + \bar{y}\bar{z}$

représentation d'une fonction logique :-

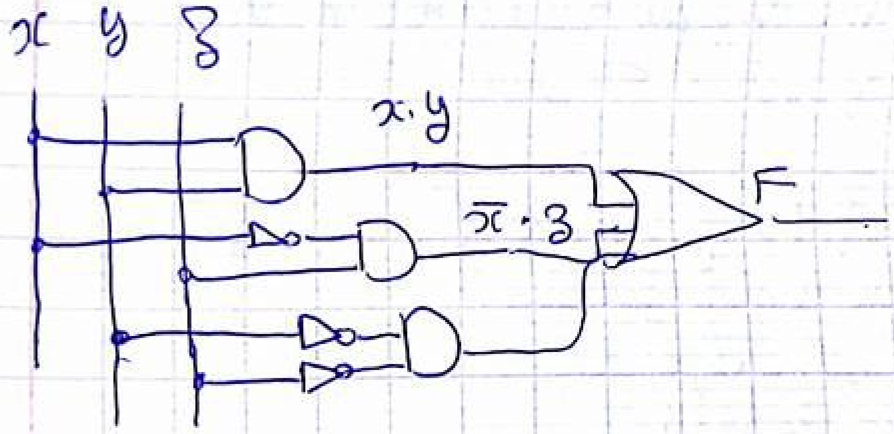
1) Expression algébrique
2) Table de vérité
3) logigramme.

Exemple :-

$f(x,y,z) = xy + \bar{x}z + \bar{y}\bar{z}$

نعوضو قيم في معادلة

N	X	Y	Z	F	minternes	Maxternes
m_0 0	0	0	0	1	$\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}$	$x+y+z$
1	0	0	1	1	$\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z$	$x+y+\bar{z}$
2	0	1	0	0	$\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}$	$x+\bar{y}+z$
3	0	1	1	1	$\bar{x}\cdot y\cdot z$	$x+\bar{y}+\bar{z}$
4	1	0	0	1	$x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}$	$\bar{x}+y+\bar{z}$
5	1	0	1	0	$x\cdot\bar{y}\cdot z$	$\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$
6	1	1	0	1	$x\cdot y\cdot\bar{z}$	$\bar{x}+\bar{y}+z$
7	1	1	1	1	$x\,y\,z$	$\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$



4.2. Forme canonique d'une fonction logique

1ère forme canonique de Shannon (mintermes)

une forme canonique lorsque les variables ou leurs complements apparaissent une seule fois dans chaque terme :

$$f = \sum_{i=0}^{2^{n}-1} m_i f(m_i)$$

Exemple :

$$f = xy + \bar{x}z + \bar{y}\cdot\bar{z}$$

F

$$f = m_0 f(m_0) + m_1 f(m_1) + m_2 f(m_2) - \dots + m_7 f(m_7)$$

$$\bar{x}\,\bar{y}\cdot\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz + x\bar{y}\cdot z + x\cdot y\cdot\bar{z} + xyz$$

2ème forme canonique :-
de shannon :

$$f = \prod_{i=0}^{2^n-1} [M_i + f(M_i)]$$

produit