UNIVERSITÉ BATNA 2
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT S.C.S.T.

Matière : Méthodes Numériques
Travaux Dirigés : Série N°2
Année Universitaire : 2016/2017

Résolution des systèmes d'équations linéaires par les méthodes directes

Exercice 1 :

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

1) Mettre ce système sous la forme matricielle $Ax = b$.

2) Calculer sa solution *exacte* par la méthode d'élimination de *Gauss* puis en déduire la valeur du *déterminant* de la matrice A.

3) Idem avec la *variante* de la méthode de *Gauss*.

Exercice 2 :

Considérer le système linéaire ci-dessous :

$$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 - x_3 - 2x_4 = -14 \\ 2x_1 - 8x_2 + 3x_4 = -17 \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -10 \\ 8x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -25 \end{cases}$$

Écrire l'équation matricielle $Ax = b$ puis calculer sa solution *exacte* à l'aide de la méthode de *Gauss*.

Exercice 3 :

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 0.002x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6.002 \\ x_1 + 3x_2 - 0.5x_3 = 3.5 \\ 1.5x_1 - 2x_2 - 2.5x_3 = -3 \end{cases}$$

Écrire l'équation matricielle $Ax = b$ puis trouver sa solution *approchée* par la méthode de *Gauss*.

Exercice 4 :

Considérer le système linéaire ci-dessous :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 19x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 9 \end{cases}$$

1) Mettre ce système sous la forme matricielle $Ax = b$.

2) Trouver la décomposition $A = LU$, où $L = (l_{ij})$ et $U = (u_{ij})$ sont les matrices de la méthode de *Crout* puis en déduire la solution *exacte* de l'équation $Ax = b$ et la valeur du *déterminant* de la matrice A.

3) Idem avec la méthode de *Doolittle*. (= Cont)

Exercice 5 :

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 14 \\ x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$$

Écrire l'équation matricielle $Ax = b$ puis calculer sa solution *exacte* par la méthode de *Cholesky*.

FIN

Exo 1 :-

Méthode de Gauss :

$$[A.b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$A.x = b$

$[A][x] = [b]$

on peut transférée

1- $AX = b \longrightarrow Ux = b$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

1ère étape :-

$L_2^{(1)} = L_2 - L_1$

$L_3^{(1)} = L_3 - L_1$

$L_4^{(1)} = L_4 - L_1$

$$[A.b]^{(1)} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \\ L_4^{(1)} \end{array}$$

2ème étapes :-

$L_3^{(2)} = L_3^{(1)} + 2L_2^{(1)}$

$L_4^{(2)} = L_4^{(1)} + 2L_2^{(1)}$

$$[A.b]^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -7 & -12 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} \\ L_4^{(2)} \end{array}$$

3ème étaps :-

$L_4^{(3)} = L_4^{(2)} - \frac{2}{3} L_3^{(2)}$

$$[A.b]^{(3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{26}{3} \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} \\ L_4^{(3)} \end{array}$$

4ème étaps :-

$\frac{13}{3} x_4 = -\frac{26}{3} \Rightarrow x_4 = 2$

$3x_3 - 4x_4 = -5 \Rightarrow x_3 = 1$

$x_2 + x_3 - 2x_4 = -3 \Rightarrow x_2 = 0$

$x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 8 \Rightarrow x_1 = -1$

le det : $A = 1 \times 1 \times 3 \left(-\frac{13}{3}\right) = -13$

one $A^{(n-1)}$ avec $n=4$

alors $A^{(n-1)} = A^{(4-1)}$

$\Rightarrow A^{(3)}$

العكس

3) $Ax = b \rightarrow Lx = b$

$$L \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix}$$

on a :

$$[A.b] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} L^{(1)} \\ L_1^{(1)} \\ L_3^{(1)} \\ L_4 \end{array}$$

1ère etaps :-

$L_1^{(1)} = L_1 - \frac{4}{1} L_4$

$L_2^{(1)} = L_2 - \frac{2}{1} L_4$

$L_3^{(1)} = L_3 - \frac{4}{1} L_4$

$$[A.b]^{(1)} \begin{bmatrix} -3 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1^{(1)} \\ L_4^{(1)} \\ L_3^{(1)} \\ L_4 \end{array}$$

2ème etape :-

$L_1^{(2)} = L_1^{(1)} - \frac{3}{2} L_3^{(1)}$

$L_2^{(1)} = L_2^{(2)}$

Exercice 2 :-

$$[A.b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -8 & -2 & -14 \\ 2 & -8 & 3 & -17 \\ 6 & -1 & -5 & -10 \\ -8 & 4 & 1 & -25 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Méthode de Gauss :

$Ax = b \rightarrow Ux = b'$

1ère etaps :

$L_2^{(1)} = L_2 - L_1$

$L_3^{(1)} = L_3 - 3L_1$

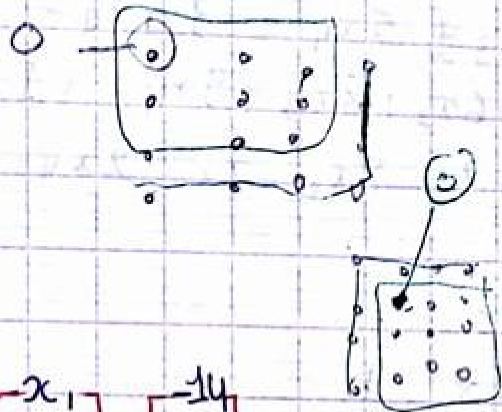
$L_4^{(1)} = L_4 - 4L_1$

2^{eme} etaps :-

$\frac{\alpha}{0}$ n'est pas definie عملية غير معرفة

on utilison le pivot total

2^{eme} etaps



$p = 23$

$$L_3^{(2)} = L_3^{(1)} \frac{2}{36} L_4^{(1)}$$

1)

$$Ax = b = \begin{bmatrix} 2 & -8 & -1 & -2 \\ 2 & -8 & 0 & 3 \\ 6 & -1 & 2 & -5 \\ -8 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ -17 \\ -10 \\ -20 \end{bmatrix}$$

$$[A.b]^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 8 & -1 & -2 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{67}{18} & -\frac{19}{4} & \frac{439}{84} \\ 0 & 3 & 2 & 9 & 31 \end{array}\right]$$

$$\frac{19}{4} \times \frac{1}{5} = \boxed{\frac{19}{20}}$$

le pivot $= 5$

3^{eme} etape

$$L_3^{(3)} = L_3^{(2)} + \frac{19}{20} L_2^{(2)}$$

$$\begin{array}{cc} [A.b]^{(3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -8 & -1 & -2 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{841}{180} & 0 & \frac{841}{90} \\ 0 & 36 & \frac{18}{2} & 9 & 31 \end{array}\right] & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \end{array}$$

$$\frac{841}{180} x_3 = \frac{841}{90} \Rightarrow x_3 = 2$$

$X_3 + 5x_4 = -3 \Rightarrow x_4 = -1$

$36x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 31 \Rightarrow x_1 = 1$

$2x_1 - 8x_2 - x_3 - 2x_4 \Rightarrow x_2 = -3$

Exo 3 : -

$A \cdot x = b$

$$\begin{bmatrix} 0{,}002 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -0{,}5 \\ 1{,}5 & -2 & -2{,}5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}002 \\ 3{,}5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

le 1 = pivot est petit par rapport aux autres elements de la matrice on doit utiliser la méthode du pivot total

$$[A \cdot b] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0{,}002 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -0{,}5 \\ 1{,}5 & -2 & -2{,}5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

1^{ere} etape :

Pivot : $4 \Rightarrow L_1^{(1)} = L_1$

$L_2^{(1)} = L_2 + \alpha \cdot L_1 / \alpha = \frac{-3}{4} = 0{,}75$

$L_2^{(1)} = L_2 - 0{,}75 \cdot L_1$

$L_3^{(1)} = L_3 + \beta \cdot L_1 \,/\, \beta = \frac{2}{4} = 0{,}5$

$L_3 = L_3 + 0{,}5 \cdot L_1$

$$[A \cdot b]^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0{,}002 & 4 & 2 & 6{,}002 \\ 0{,}998 & 0 & -2 & -1{,}002 \\ 1{,}501 & 0{,}15 & 0{,}001 & 0{,}001 \end{array}\right]$$

2^{eme} etape :-

نحذف سطر و العمود ثاني ثم نختار أكبر قيمة فيهم بالقيمة المطلقة

2 _ هو نقسم و ثم نقوم 1,5 -

$$L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - \frac{1{,}5}{2} \cdot L_2^{(1)}$$

$$= L_3^{(1)} - 0{,}75 \cdot L_2^{(1)}$$

$$[A \cdot b]^{(2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 0{,}002 & 4 & 2 & 6{,}002 \\ 0{,}998 & 0 & -2 & -1{,}002 \\ 0{,}7592 & 0 & & 0{,}752 \end{array}\right]$$

$1{,}5 = 0{,}75 \times 2$

ناقص $1{,}5 = 0$

etap 3 :- substitution :-

$$\begin{bmatrix} 0{,}002 & 4 & 2 \\ 0{,}998 & 0 & -2 \\ 0{,}752 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}002 \\ 1{,}002 \\ 0{,}752 \end{bmatrix}$$

$$0{,}002x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6{,}002 \quad x_2 = 1$$
$$0{,}998x_1 \quad - 2x_3 = -1{,}002 \quad x_3 = 1$$
$$0{,}752x_1 \quad = 0{,}752 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 4 :-

1)
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & 19 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

2) مصفوفة مثلثية علوية

$A = L \times U$

مصفوفة مثلثية سفلية

Methode de crout :-

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \; ; \; U \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L \times U = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}.u_{12} & l_{11}.u_{13} & l_{11}.u_{14} \\ l_{21} & l_{21}.u_{12}+l_{22} & l_{21}.u_{13}+l_{22}.u_{23} & l_{21}.u_{14}+l_{22}.u_{24} \\ l_{31} & l_{31}.u_{12}+l_{32} & l_{31}.u_{13}+l_{32}.u_{23}+l_{33} & l_{31}.u_{14}+l_{32}.u_{24}+l_{33}.u_{34} \\ l_{41} & l_{41}.u_{12}+l_{42} & l_{41}.u_{13}+l_{42}.u_{23}+l_{43} & l_{41}.u_{14}+l_{42}.u_{24}+l_{43}.u_{34}+l_{44} \end{bmatrix}$$

$l_{11} = 1 \quad l_{11}.u_{12} = 3$ ou $u_{12} = 3$

$l_{21} = 2 \quad l_{21}u_{12} + l_{22} = 4 \Rightarrow l_{22} = -2$

$l_{31} = 3 \quad l_{31}u_{12} + l_{32} = -2 \Rightarrow l_{32} = 11$

$l_{41} = 1 \quad l_{41}u_{12} + l_{42} = 3 \Rightarrow l_{42} = 0$

3) Méthode de Doolittle ;-

$A = L \times U$

$$L \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \qquad U : \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

$$L\times U=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & l_{13} & u_{14} \\ l_{21}u_{11} & u_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} & l_{21}u_{14}+u_{24} \\ l_{31}u_{11} & u_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} & l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+u_{34} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{34}u_{34}+u_{44} \end{bmatrix}$$

عمود الأول:-

$\boxed{u_{11}=1}$

$l_{21}u_{11}=2 \Rightarrow \boxed{l_{21}=2}$

$l_{31}u_{11}=3 \Rightarrow \boxed{l_{31}=3}$

$l_{41}.u_{11}=1 \Rightarrow \boxed{l_{41}=1}$

عمود 2 :-

$\boxed{u_{12}=3}$

$l_{21}u_{12}+u_{22}=4 \Rightarrow \boxed{u_{22}=-2}$

$l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22}=-2 \Rightarrow \boxed{l_{32}=\frac{11}{2}}$

$l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22}=3 \Rightarrow \boxed{l_{42}=0}$

عمود الثالث:-

$\boxed{u_{13}=7}$

$l_{21}u_{13}+u_{23}=2 \Rightarrow \boxed{u_{23}=-12}$

$u_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33}=3 \Rightarrow \boxed{u_{33}=48}$

$l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33}=1 \Rightarrow \boxed{l_{13}=\frac{1}{8}}$

عمود الرابع :-

$\boxed{u_{14}=5}$

$l_{21}u_{14}+u_{24}=2 \Rightarrow \boxed{u_{24}=-8}$

$l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+u_{34}=19 \Rightarrow \boxed{u_{34}=48}$

$l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{43}u_{34}+u_{44}=4$

$\boxed{u_{44}=5}$

$$L\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{11}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix} ; \quad U\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & -2 & -12 & -8 \\ 0 & 0 & 48 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$A \times x = b \Rightarrow (L \times U).x = b \Rightarrow L \times (U \times x) = b$

posons $U \times x = y \Rightarrow L \times y = b$

$L \times y = b \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \\ 2y_1 + y_2 = -2 \Rightarrow y_2 = -12 \\ 3y_1 + \frac{11}{2} y_2 + y_3 = -3 \Rightarrow y_3 = 48 \\ y_1 - \frac{1}{8} y_3 + y_4 = 9 \Rightarrow y_4 = 10 \end{cases}$

$U.x = y$

$x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 5 \Rightarrow x_1 = -10$

$-2x_2 - 12x_3 - 8x_4 = -12 \Rightarrow x_2 = 4$

$48x_3 + 48x_4 = 48 \Rightarrow x_3 = -1$

$5x_4 = 10 \Rightarrow x_4 = 2$

la solution du systeme est $x = \begin{bmatrix} -10 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Exo 2.

$$[A.b]=\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -8 & -1 & -2 & -14 \\ 2 & -8 & 0 & 3 & -17 \\ 6 & -1 & 2 & -5 & -10 \\ 8 & 4 & -2 & 1 & -25 \end{array}\right]\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$\boxed{P_1 = 2}$

1^{ere} étape :-

$L_2^{(1)} = L_2 - \frac{2}{2} L_1$

$L_3^{(1)} = L_3 - \frac{6}{2} L_1 \Rightarrow L_3^{(1)} = L_3 - 3L_1$

$L_4^{(1)} = L_4 - \frac{8}{2} L_1 \Rightarrow L_4^{(1)} = L_4 - \frac{8}{2} L_1$

$$[A,b]\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -8 & -1 & -2 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 23 & 5 & 1 & 32 \\ 0 & 36 & 2 & 9 & 31 \end{array}\right]\begin{array}{l} L_1^{1} \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \\ L_4^{(1)} \end{array}$$

2^{eme} etap : on associe à la méthode de Gosse.

$\boxed{P_2 = 36}$ la stratégie total parceque :

$\boxed{a_{22} = 0}$

le pivo total $=36$

نختاروا أكبر عدد

$$L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - \left(\frac{23}{36}\right) L_4^{(1)}$$

$$[A,b]^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -8 & -1 & -2 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{67}{18} & -\frac{19}{4} & \frac{439}{36} \\ 0 & 36 & 2 & 9 & 31 \end{array}\right]\begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \\ L_4^{(1)} \end{array}$$

3^{eme} etape :-

$\boxed{P_3 = 5}$

$$L_3^{(3)} = L_3^{(2)} + \frac{19}{20} L_2^{(1)}$$

$$[A, b]^{(3)} = \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -8 & -1 & -2 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{841}{180} & 0 & \frac{841}{90} \\ 0 & 36 & 2 & 9 & 31 \end{array}\right] & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \\ L_4^{(1)} \end{array} \end{array}$$

$$L_3 + \frac{19}{\frac{4}{5}} = L_3^{(1)} + \frac{19}{20}$$

إيجاد x_1 , x_2 , x_3 , x_4

$\frac{841}{180} x_3 = \frac{841}{90} \Rightarrow \boxed{x_3 = 2}$

$x_3 + 5x_4 = -3 \Rightarrow \boxed{x_4 = -1}$

$36x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 31 \Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$

$2x_1 - 8x_2 - x_3 - 2x_4 \Rightarrow \boxed{x_1 = -3}$

Ex 01 :

$$[A,b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

قبل ما نكتبوها على الشكل هذا ↑ نكتبوها هكا:

$$Ax = b \rightarrow Ux = b'$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

1ère étape :-

$L_2^{(1)} = L_2 - \left(\frac{1}{1}\right) L_1 \Rightarrow L_2^{(1)} = L_2 - L_1$

$L_3^{(1)} = L_3 - \left(\frac{1}{1}\right) L_1 \Rightarrow L_3^{(1)} = L_3 - L_1$

$L_4^{(1)} = L_4 - L_1$

$$[A,b]' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right]$$

2ème étape :-

$L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - \left(\frac{-2}{1}\right) L_2^{(1)} \Rightarrow L_3^{(2)} = L_3^{(1)} + 2L_2^{(1)}$

$L_4^{(2)} = L_4^{(1)} + 2L_2^{(1)}$

$$[A,b]^{(2)} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -7 & -12 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \\ L_4^{(1)} \end{array}$$

$3^{ème}$ etape : -

$L_4^{(3)} = L_4^{(2)} - \frac{2}{3} L_3^{(2)}$

$$[A,b]^{(3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{26}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} \\ L_4^{(3)} \end{array}$$

$4^{ème}$ etape : -

$-\frac{13}{3} x_4 = -\frac{26}{3} \Rightarrow \boxed{x_4 = 2}$

$3x_3 - 4x_4 = -5$

$3x_3 - 4(2) = -5 \Rightarrow \boxed{x_3 = 1}$

$x_2 + x_3 - 2x_4 = -3$

$x_2 + 1 - 2(2) = -3 \Rightarrow \boxed{x_2 = 0}$

$x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 8$

$x_1 = 3(0) + 1 + 4(2) = 8$

$\Rightarrow \boxed{x_1 = -1}$

detA استاج

$\det A = 1 \times 1 \times 3 \times \left(-\frac{13}{3}\right) = \boxed{-13}$

2 $Ax = b \rightarrow Lx = b''$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix}$$

$$[A, b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$1^{ère}$ etape :-

$L_1^{(1)} = L_1 - 4L_4)$

$L_2^{(1)} = L_2 - 2L_4$

$L_3^{(1)} = L_3 - 4L_4$

$$[A,b]^{(1)} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \\ L_4^{(1)} \end{array}$$

2^{eme} etap :-

$$L_1^{(2)} = L_1^{(1)} - \left(\frac{-3}{-2}\right) L_3^{(1)}$$

$$L_1^{(2)} = L_1^{(1)} - \frac{3}{2} L_3^{(1)}$$

$$L_2^{(2)} = L_2^{(1)} - 0\, L_3^{(1)}$$

$$[A,b]^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 0 & 0 & \frac{-3}{2} \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \\ L_3^{(2)} \\ L_4^{(2)} \end{array}$$

$$L_1^{(2)} = L_1^{(1)} - \frac{3}{2} L_3^{(1)}$$

$$-3 - \frac{3}{2}(-3) = -3 + \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$$

$$-1 - \frac{3}{2}(-3) = -\frac{7}{2} + \frac{9}{3} = \frac{7}{2}$$

$$-3 - \frac{3}{2}(-2) = 0$$

$$0 - \frac{3}{2}(0) = 0$$

$$0 - \frac{3}{2}(1) = -\frac{3}{2}$$

3^{eme} etape :-

$L_1^{(3)} = L_1^{(2)} - \left(\frac{7/2}{2}\right) L_2^{(2)} \Rightarrow$

$L_1^{(3)} = L_1^{(2)} - \frac{7}{4} L_2^{(2)}$

$\frac{3}{2} - \frac{7}{4}(-1) = \frac{6}{4} + \frac{7}{4} = \frac{13}{4}$

$\frac{7}{2} - \frac{7}{4}(2) = 0$

$0 - \frac{7}{4}(0) = 0$

$0 - \frac{7}{4}(0) = 0$

$-\frac{3}{2} - \frac{7}{4}(1) = \frac{-13}{4}$

$$[A, b]^{(3)} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{13}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{4} \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} L_1^{(3)} \\ L_2^{(2)} \\ L_3^{(2)} \\ L_4^{(2)} \end{array}$$

4^{eme} etape :-

$\frac{13}{4} x_1 = -\frac{13}{4} \Rightarrow \boxed{x_1 = -1}$

$-x_1 + 2X_2 = 1 \Rightarrow \boxed{X_2 = 0}$

$-3X_1 - 3X_2 - 2X_3 = 1 \quad \boxed{x_3 = 1}$

$x_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 2 \Rightarrow \boxed{X_4 = 2}$

[illegible]

$$\det A = \frac{13}{4} \times 2 \times (-2) \times 1 = -13.$$