UNIVERSITÉ HADJ LAKHDAR – BATNA 2

FACULTÉ DE TECHNOLOGIE

SOCLE COMMUN SCIENCES ET TECHNOLOGIES

Année Universitaire : 2016/2017

Matière : Théorie de signal

T.D. : Série N°1 (Signaux + série de Fourier)

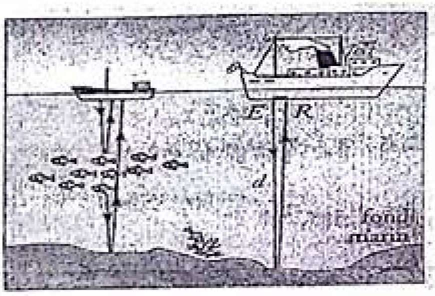
Exercice 1 : Sachant que :

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

1. Donner en fonction de $(\cos(a),\ \cos(b), \sin(a)\ et\ \sin(b))$ les relations suivantes : $\sin(2a)$, $\cos(2a)$, $\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin(a-b)$, $\cos(a-b)$, $\sin\left(a-\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(a-\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin(a)+\sin b$, $\sin(a)-\sin b$, $\cos(a)+\cos b$ et $\cos(a)-\cos(b)$,
2. Déduire $C\ et\ \varphi$ pour que $A\cos(a) + B\sin(a) = C\cos(a+\varphi) \quad avec \quad (A,B) \in R^{*2}$

Exercice 2 : Soit la configuration suivante :

Un **sonar** est un appareil utilisant la propagation du son dans l'eau pour détecter et situer les objets sous l'eau. Soit la configuration suivante : Un ensemble de poissons émis sous l'eau des sons à proximité de deux bateaux : le premier est un bateau de navigation maritime utilise un sonar 1 pour mesurer la profondeur. Le deuxième est un bateau de pêche utilise un deuxième sonar 2 pour pêcher du poisson.



1. Déterminer pour chacun des systèmes (le bateau de navigation, le bateau de pêche et les poissons) : Le (les) signal (aux) utile (s), le (les) bruit (s), l'(les) émetteur (s), le (les) récepteur (s), le (les) canal (aux) de transmission.

Exercice 3 : Soit les signaux suivants

$$x_1(t) = 2\cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{3}\right),\ x_2(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{t},\ x_3(t) = (2+\sin(2\pi t))\sin(20\pi t) \quad avec\ t \in R^+,$$

$$x_4(k\Delta t) = e^{-k} \quad avec \quad k \in \mathbb{N}\ et\ \Delta t = 0.5$$

$$x_5(t) = e^{-k\Delta t}\ si\ \ k\Delta t \le t < (k+1)\Delta t \quad avec \quad k \in \mathbb{N}\ et\ \Delta t = 1$$

$$x_6(k) = \frac{n}{6}\ \ si \quad n \le 6e^{-k\Delta t} < (n+1) \quad avec\ (k,n) \in \mathbb{N}^2\ et\ \Delta t = 1,25$$

x_7 Jet d'un dé non truqué chaque seconde

x_8 L'allumage et l'éteignement d'une lampe dans une cuisine au cours d'un mois.

x_9 Le son émit par des baleines

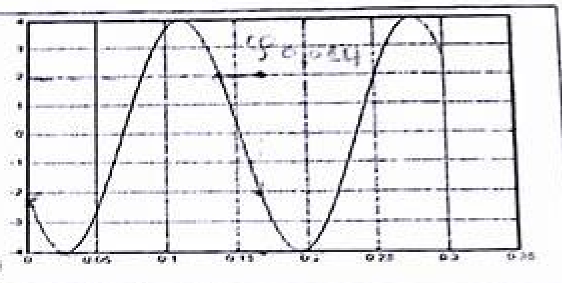
1. Tracer ces signaux et classer les phénoménologiquement et morphologiquement
2. Classer énergétiquement le signal x_l. Justifier.

Exercice 4 : Soit les signaux suivants

$$x_1(t) = 2\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \qquad x_3(t) = x_1(4t)$$

$$x_4(t) = -\frac{1}{2} + 3\,x_1(t) + x_2(t)$$

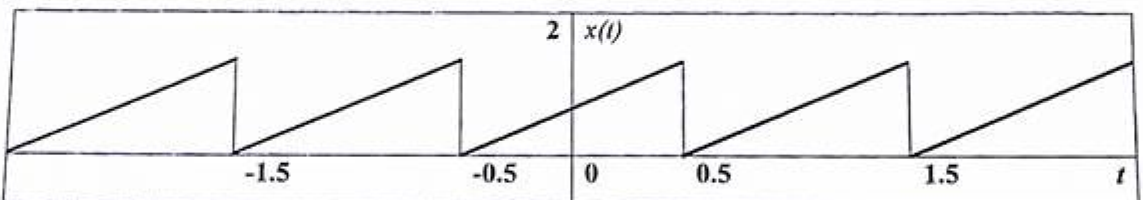
$$x_5(t) = \left(1 + \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\right)\cos(6\pi t)$$



$x_2(t)$

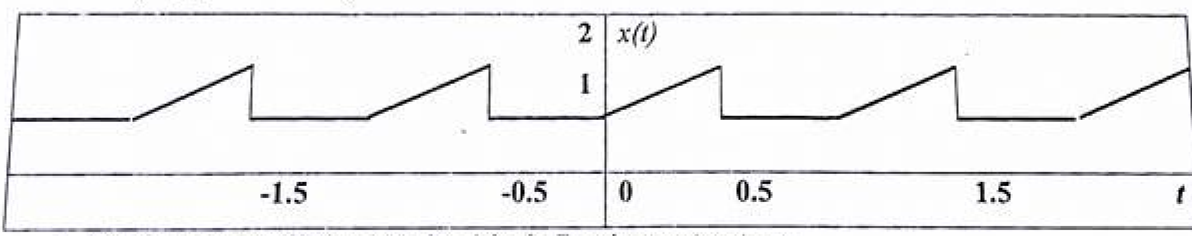
1. Quelle est : la période, la fréquence, la pulsation de chacun des signaux?
2. Donner la moyenne et les fréquences présentes dans chacun des signaux
3. Tracer sur le même repaire que $x_2(t)$ les signaux $x_1(t)$ *et* $x_3(t)$ en fonction du temps.
4. Y'a-t-il un déphasage entre le signal $x_1(t)$ *et* $x_2(t)$? Si oui quel est la valeur de ce déphasage.
5. Calculer analytiquement le déphasage entre $x_2(t)$ *et* $x_3(t)$. $x_2(t)$ est-il en retard, en déduire de combien ?
6. Réécrire $x_4(t)$ sous la forme $x_4(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k)$ (déterminer(f_0, A_0, n, A_k *et* φ_k)).
7. Utilisez les formules d'Euler pour écrire $x_4(t)$ et $x_5(t)$ sous forme complexe, en déduire les coefficients complexes de la série de Fourier de $x_4(t)$ et $\cancel{x_5(t).}$
8. Dessinez les spectres d'amplitude et de phase unilatéraux de $x_4(t)$ et les bilatéraux de $x_5(t)$. En suite comparé les résultats avec la question 2.

Exercice 5 : Soit le signal *x(t)* suivant :



1. Calculer les coefficients de la série de Fourier du signal *x(t)*.
2. Déduire la forme cosinus et la forme complexe
3. Tracer le spectre unilatéral et bilatéral du signal *x(t)*
4. Calculer les coefficients complexes de Fourier du signal *x(t)* et comparer le résultat avec la question 2

Exercice (Supplémentaire)



1. Calculer les coefficients de la série de Fourier du signal *x(t)*.
2. Déduire les formes, cosinus et complexe et tracer le spectre unilatéral de l'amplitude et de la phase
3. Calculer les coefficients complexes de Fourier du signal *x(t)* et comparer le résultat avec la question 2.
4. Tracer le spectre bilatéral du signal *x(t)*

TD N° 1

Exo 1 :-

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \end{cases}$$

① $\sin(2a) = \sin(a+a)$

$= \sin(a)\cos(a) + \cos(a)\sin(a)$

$= 2\cos(a)\sin(a)$

② $\cos(2a) = \cos(a+a)$

$= \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a)$

$= \cos^2(a) - \sin^2(a)$

$= 1 - 2\sin^2(a)$

③ $\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right) = \sin(a)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + \cos(a)\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}$

$= \cos(a)$

④ $\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(a)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(a)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= -\sin(a)$

⑤ $\sin(a-b) = \sin(a+(-b))$

$= \sin(a)\cos(-b) + \cos(a)\sin(-b)$

Rq :-

$\cos(x)$ est paire $\rightarrow \cos(x) = \cos(x)$

$\sin(x)$ est impaire $\rightarrow \sin(-x) = -\sin(x)$

$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

⑥ $\cos(a - b) = \cos(a + (-b)) = \cos(a)\cos(-b) - \sin(a)\cos(-b)$

$= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

⑦ $\sin(a - \frac{\pi}{2}) = \sin(a + (-\frac{\pi}{2}))$

$= \sin(a)\cos(-\frac{\pi}{2}) + \cos(a)\sin(\frac{-\pi}{2})$

$= -\cos(a)$

⑧ $\cos(a - \frac{\pi}{2}) = \cos(a + (-\frac{\pi}{2}))$

$= \cos(a)\cos(-\frac{\pi}{2}) - \sin(a)\sin(-\frac{\pi}{2})$

$= \sin(a)$

* $\sin(a) + \sin(b)$

Nous avons : $\sin(a + b) + \sin(a - b)$

$= \sin(a)\cos(b) + \cancel{\cos(a)\sin(b)} +$

$\sin(a)\cos(b) - \cancel{\cos(a)\sin(b)}$

$= 2\sin(a)\cos(b)$

posons : $\begin{cases} a + b = \beta \\ a - b = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\beta + \gamma}{2} \\ b = \frac{\beta - \gamma}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \sin(a+b) + \sin(a - b) = \sin(\beta) + \sin(\gamma)$

$= 2\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)$

* $\sin(a) - \sin(b) = \sin(a) + \sin(-b)$

$= \sin(\beta) + \sin(-\gamma)$

$= -2\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)$

* $\cos(a)+\cos(b) = \cos(a+b)+\cos(a-b)$

$$= \cos(a)\cos(b) - \cancel{\sin(a)\sin(b)}$$
$$\cos(a)\cos(b) + \cancel{\sin(a)\sin(b)}$$
$$= 2\cos(a)\cos(b)$$

$$\Rightarrow \cos(\beta)+\cos(\gamma) = 2\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$$

* $\cos(a) - \cos(b)$

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$

$\sin(a-b) = \sin(a+(-b))$

$$= \sin(a)\cos(-b)+\cos(a)\sin(-b)$$
$$= \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$$

$\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos(a)\cos(-b)-\sin(a)\sin(-b)$

$$= \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$$

$\cos(a+b)-\cos(a-b) = -2\sin(a)\sin(b)$

$$\Rightarrow \cos(\beta)-\cos(\gamma) = -2\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)$$

$$\begin{cases} a+b=\beta \\ a-b=\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\beta+\gamma}{2} \\ b = \frac{\beta-\gamma}{2} \end{cases}$$

2) Déduire c et φ

$A\cos(a)+\beta\sin(a) = c\cos(a+\varphi)$

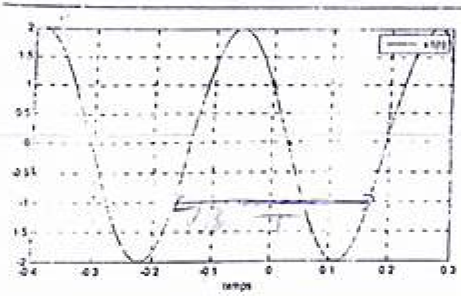
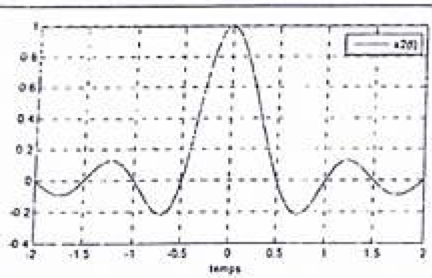
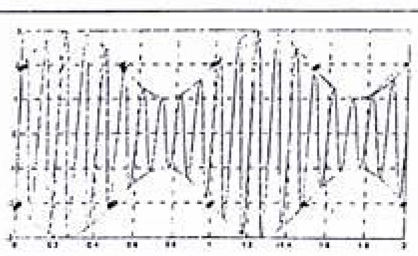
$$= c\left[\cos(a)\cos(\varphi)-\sin(a)\sin(\varphi)\right]$$

2ème année TD T. Signal

Exercice 2 (objectifs : signal utile et bruit, expliquer le fonctionnement du sonar dans chaque cas)

	Bateau de navigation	Bateau de pêche	les poissons
Les signaux utiles	Signal envoyé par le sonar 1. Signal réfléchi par le sol de la profondeur (dû au sonar 1 avec un retard).	Signal envoyé par le sonar 2, Signal réfléchi par le sol de la profondeur (dû au sonar 2), Signal réfléchi par les poissons (dû au sonar 2 avec un retard).	Signaux envoyé par les poissons
Les bruits	Signal envoyé par le sonar 2 Signal réfléchi par le sol de la profondeur et les poissons (dû au sonar 2 avec un retard) Sons envoyé par les poissons	Signal envoyé par le sonar 1 Signal réfléchi par le sol de la profondeur (dû au sonar 1) Sons envoyé par les poissons	Tous les signaux envoyés par le sonar 1 et le sonar 2 Signaux réfléchi par le sol de la profondeur et les poissons dû au sonar 1 et sonar 2
Les émetteurs	Bateau de navigation	Bateau de pêche	Poisons
Les récepteurs	Bateau de navigation Bateau de pêche Les poissons Le sol de la profondeur	Bateau de navigation Bateau de pêche Les poissons Le sol de la profondeur	Bateau de navigation Bateau de pêche Les poissons Le sol de la profondeur
Le Canal	L'eau	L'eau	L'eau

Exercice 3 (classification des signaux, enveloppe, tracer les signaux)

Graphe	phénoménologique	morphologique
	$x_1(t) = 2\cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$ Signal déterministe car on peut prévoir la valeur de $x_1(t)$ à n'importe quel instant t. Il est périodique car il a le même motif qui se répète chaque période 1/3s.	Signal analogique car le temps est continu ainsi que la valeur de l'amplitude $x_1(t)$
	$x_2(t) = \dfrac{\sin(2\pi t)}{t}$ (Sinus Cardinal) Signal déterministe pseudopériodique car la période est de 1 et l'amplitude de $x_2(t)$ change avec le temps	Signal analogique le temps : continu l'amplitude $x_2(t)$: continue
	$x_3(t) = (2 + \sin(2\pi t))\sin(20\pi t)$ Signal déterministe périodique de période égale à 1.	Signal analogique le temps : continu l'amplitude $x_3(t)$: continue

Avec la correspondance en a:

$$\begin{cases} A\cos(x) = c\cos(x)\cos(\varphi) \\ A\sin(x) = c\sin(x)\sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \frac{A}{C} \quad \dots (1) \\ \sin\varphi = \frac{-B}{C} \quad \dots (2) \end{cases}$$

$$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow \underbrace{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}_{1} = \frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2}$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\frac{(2)}{(1)} \quad \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{-B}{A} = tg(\varphi)$$

Exercice 3.-

$$x_1(t) = 2\cos\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$W = \lim_{T\to+\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_1^2(t)\, dt$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} \left(2\cos\left(6\pi t + \frac{T}{3}\right)\right)^2 dt$$

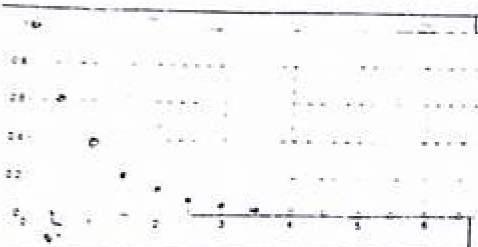
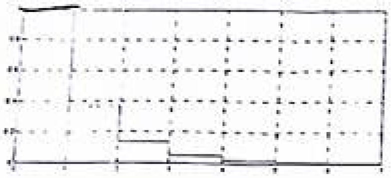
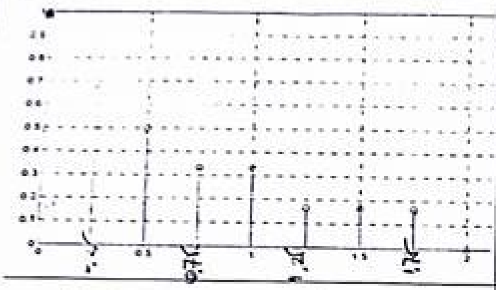
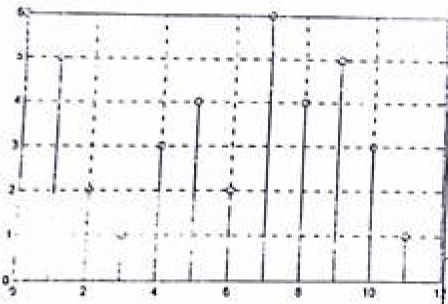
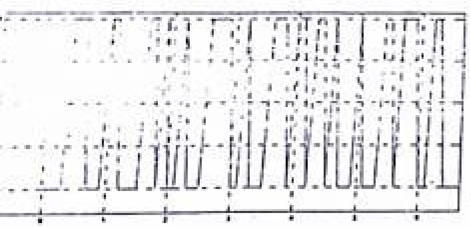
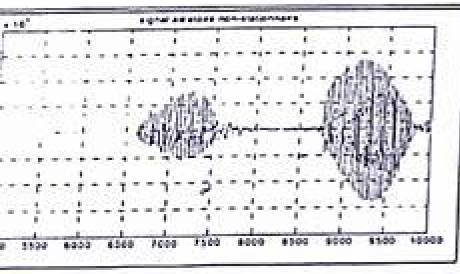
$$= \lim_{T\to+\infty} \int_{\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} \left(4\cos^2\left(6\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\right)^2 dt$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2(x)$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} \left(4\left(1 - \sin^2\left(6\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\right)\right) dt$$

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}}$$

	$x_4(k\Delta t) = e^{-k} \quad k \in \mathbb{N} \; et \; \Delta t = 0.5$ Signal déterministe non-périodique	Signal discret car le temps et discret et la valeur de l'amplitude es continu
	$x_5(t) = e^{-k\Delta t} \; si \; k\Delta t \le t < (k+1)\Delta t$ $avec \; k \in \mathbb{N} \; et \; \Delta t = 1$ Signal déterministe non périodique	Signal quantifié car le temps est continu et la valeur de l'amplitude es discrète
	$x_6(k) = \frac{n}{6} \; si \; n \le 6e^{-k\Delta t} < (n+1) \quad avec \; k \in \mathbb{N} \; et \; \Delta t = 0.25$ Signal déterministe non périodique	Signal numérique car le temps est discret et la valeur de l'amplitude es discrète
	x_7 Jet d'un dé chaque seconde Signal aléatoire stationnaire car on ne peut pas prévoir le comportement mais on peut affirmer que la probabilité d'apparition des six chiffres est la même 1/6 ce qui implique une moyenne *E(x)* probabiliste fixe.	Signal numérique car le temps est discret et les valeurs de l'amplitude est discrète
	$E(x) = \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot P(x_i) = \frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{6}{6} = \frac{21}{6}$	
	x_8 L'allumage et l'éteignement d'une lampe dans une cuisine au cours d'un mois. Signal aléatoire non stationnaire car on ne peut pas prévoir ni le comportement ni la probabilité d'allumage ou éteignement.	Signal est quantifier car le temps est continu et l'amplitude est discrète (0 ou 1)
	x_9 Le son résultant d'une discussion entre deux personnes Signal aléatoire non stationnaire car on ne peut pas prévoir ni le comportement ni la probabilité de parler.	Signal est analogique car le temps est continu et l'amplitude est continue

$$= \lim_{T\to+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} (4(1-(\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}))(6\pi t+\frac{\pi}{3})dt$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} (4(1-(\frac{1-\cos(12\pi t+2\pi/3)}{2}))dt$$

$$4-\cancel{4}(\frac{1-\cos(12\pi t+2\pi/3)}{\cancel{2}})dt$$

$$4-2(1-\cos(12\pi t+2\frac{\pi}{3})dt$$

هنا نشرنا 2 فقط

$$W = \lim_{T\to+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} (4-2+2\cos(12\pi t+\frac{2\pi}{3})dt$$

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} (2+2\cos(12\pi t+\frac{2\pi}{3})dt$$

$$W = \lim_{T\to+\infty} 2t\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{\sin(12\pi t+2\pi/3)}{6\pi}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{T/2} = +\infty$$

$\Rightarrow$ est un singnal d'energie infinie.

Ex 4 :-

$$\omega = 2\pi f \quad \ldots (1)$$
$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \ldots (2)$$
$$T = \frac{1}{f} \quad \ldots (3)$$

$$x(t) = A_0 + \sum A_K \cos(2\pi f . K t) + B_K \sin(2\pi f K t)$$

signal	Pulsation	fréquence	périodes	Moyenes et fréquence presentes
$x_1(t) = 2\cos(3\pi t + \frac{\pi}{3})$	$\omega_1 = 3\pi$	$f_1 = \frac{3}{2}$	$T_1 = \frac{2}{3}$	la moyen egal à 0 la fréquence presente dans le signal $x_1(t)$ est $f_1 = \frac{3}{2}$
$x_2(t) = 4\sin(12\pi t + \frac{\pi}{6})$	$\omega_2 = 12\pi$	$f_2 = 6$	$T_2 = \frac{1}{6}$	la moyen egal à 0 la fréquence présente dans le signal est $f = 6$
$x_3(t) = x_1(4t) = 2\cos(12\pi t + \frac{\pi}{3})$	$\omega_3 = 12\pi$	$f_3 = 6$	$T_3 = \frac{1}{6}$	la moyen égal à 0 la fréquence est $f_3 = 6$

$x_4(t) = -\frac{1}{2} + 6\cos(3\pi t + \frac{\pi}{3}) - 4\sin(2\pi t + \frac{\pi}{6})$	$\omega_4 = 3\pi$ (PGDc) plus Grend division commuen	$f_4 = \frac{3}{2}$ (PGDc) أكبر قاسم مشترك	$T_4 = \frac{2}{3}$ (PPMc) Plus petit Multiple communes	la moyen egal à $-\frac{1}{2}$ les fréquence present dans le signal $x_4(t)$ sont, 0, $\frac{3}{2}$, 6
$x_5(t)$ $(1+\cos(2\pi t+\frac{\pi}{6}))\cos(6\pi t)$	/	/	/	la moyen egal à 0 la fréquence 2, 3, 4

$$T = 0.17 \quad ; f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.17} = 5.88 \simeq 6$$

$$\omega = 2\pi f = 12$$

$$x_2(t) = -4\cos(12\pi t + \varphi)$$

$\varphi = \omega \cdot t\varphi$

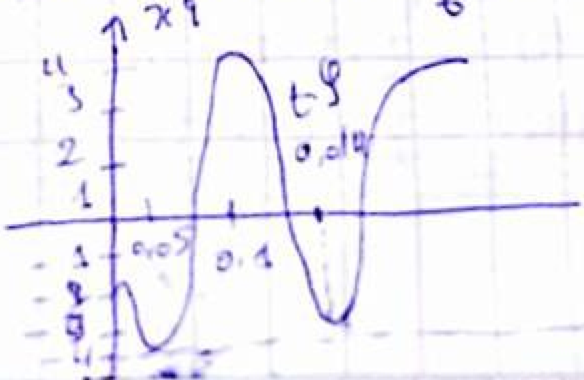
$\varphi = 12\pi \cdot 0.014$

$\simeq 30$

à $t = 0$

$x_2(t=0) = -2$

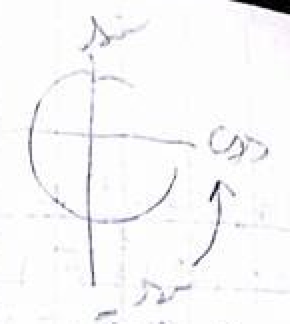
$x_2(t) = -4\sin(12\pi t + \frac{\pi}{6})$



$x_1 \Rightarrow 2\cos(3\pi(0)+\frac{\pi}{3})$ ... $t=0$ لما

$2\cos\frac{\pi}{3} = \cos 60 \; (2)$

$x_1 = \boxed{1}$



$x_1(t) = 2\cos(3\pi t + \frac{\pi}{3})$

à $t=0$ $x_1 = 1$ $\Rightarrow$ $T = \frac{2}{3} = 0.6$

$x_3(t) = 2\cos(12\pi t + \frac{\pi}{3})$

à $t=0$ $x_3 = 1$; $T = \frac{1}{6} = 0.16$

كي كنا نحكو ها déphasage نقدر نحسبوه بين زوج

4) on peut pas parler de déphasage entre x_1 et x_2 parce que : ils n'ont pas la meme fréquence $f_1 \neq f_2$)

5) calcul de déphasage entre x_2 et x_3 :

من sin لـ cos نزيد $\frac{\pi}{2}$

كي نحبو نحسبو φ لازم يكونو في زوج cos

$x_2(t) = -4\sin(12\pi t + \frac{\pi}{6}) = 4\cos(12\pi t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2})$

هنا كي نحول

$x_2(t) = 4\cos(12\pi t + \frac{2\pi}{3})$

sin ⟸ cos

$x_3(t) = 2\cos(12\pi t + \frac{\pi}{3})$

$\varphi = \varphi_2 - \varphi_3 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} > 0$ $x_2(t)$ est en avance par rapport au $x_3(t)$

باش نعرف مقدار

$\varphi = w \cdot t_\varphi \Rightarrow t_\varphi = \frac{\varphi}{w} = \frac{\pi/3}{12\cancel{\pi}} = \frac{1}{36}\,s \Rightarrow x_2(t)$

est en avance par rapport au $(x_3(t)$ par $\frac{1}{36}$ seconde.

6) $x_4(t) = A_0 + \sum_{K=1}^{n} A_K \cos(2\pi K f_0 t + \varphi_K)$

$(f_0, A_0, n, A_K$ et $\varphi_K)$ ...

حولناها cos

$x_4(t) = -\frac{1}{2} + 6\cos(3\pi t + \frac{\pi}{3}) - 4\sin(12\pi t + \frac{\pi}{6})$

$x_4(t) = -\frac{1}{2} + 6\cos(3\pi t + \frac{\pi}{3}) + 4\cos(12\pi t + \frac{2\pi}{3})$

$x_4(t) = -\frac{1}{2} + 6\cos(3\pi \cdot \underset{K}{1} \cdot (\frac{3}{2}) \cdot t + \frac{\pi}{3}) + 4\cos(12\pi \cdot 4 \cdot (\frac{3}{2}) \cdot t + \frac{2\pi}{3})$

$2\pi K f_0 t = 3\pi t \Rightarrow w = 3\pi$

$f_0 = \frac{3}{2}$

8

$A_K = 1$

Par correspendance :-

$A_0 = -\frac{1}{2}$; $f_0 = \frac{3}{2}$, $n = 4$; $A_1 = 6$; $A_4 = 4$

$\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$; $\varphi_4 = \frac{2\pi}{3}$

$A_K = \varphi_K = 0$ ailleurs) خارج [illegible] (X)

7) $x_4(t) = -\frac{1}{2} + 6\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right) - 4\sin\left(12\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$

$= -\frac{1}{2} + 6\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 4\cos\left(12\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$

$= -\frac{1}{2} + 6\,\frac{e^{j(3\pi t + \frac{\pi}{3})} + e^{-(j3\pi t + \frac{\pi}{3})}}{2} + 4\,\frac{e^{j(12\pi t + \frac{2\pi}{3})} + e^{-j(12\pi t + \frac{2\pi}{3})}}{2}$

$= -\frac{1}{2} + 3e^{j(3\pi t + \frac{\pi}{3})} + 3e^{-j(3\pi t + \frac{\pi}{3})} + 2e^{j(12\pi t + \frac{2\pi}{3})} + 2e^{-j(12\pi t + \frac{2\pi}{3})}$

$= -\frac{1}{2} + 3e^{j3\pi t}\cdot e^{j\frac{\pi}{3}} + 3e^{-j3\pi t}\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} + 2e^{j12\pi t}\cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} + 2e^{-j12\pi t}\cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}$

$x(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} X(K)\, e^{j2\pi K f_0 t}$

(+)

Par correspondance on a :-

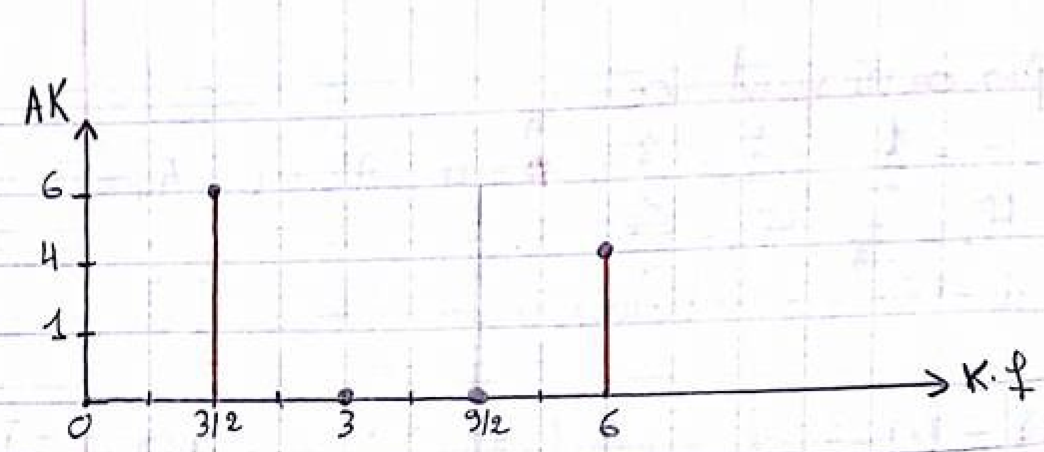
$X_4(1) = 3e^{j\frac{\pi}{3}}$ $\qquad X_4(-1) = 3e^{-j\pi/3}$

$X_4(4) = 2e^{j\frac{2\pi}{3}}$ $\qquad X_4(-4) = 2e^{-j\frac{2\pi}{3}}$

$X_4(0) = -\frac{1}{2}$ $\qquad X_4(K) = 0$ ailleurs

8). Dessener les spectre :-

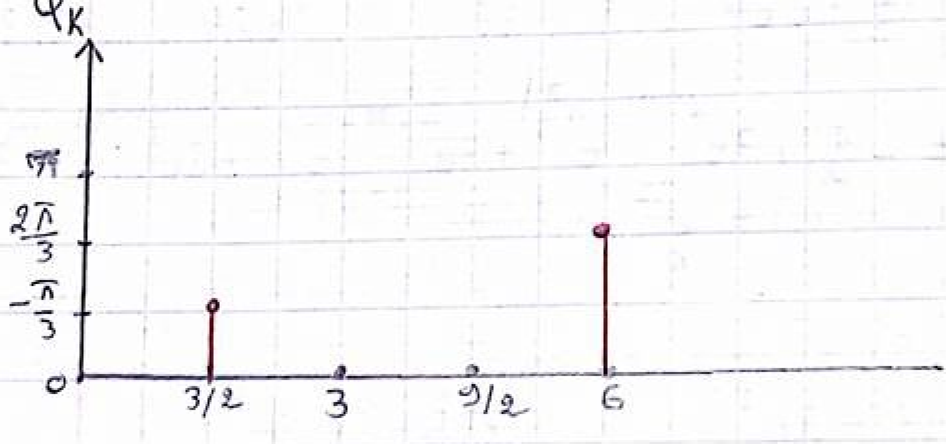
Spectre unilateral :-



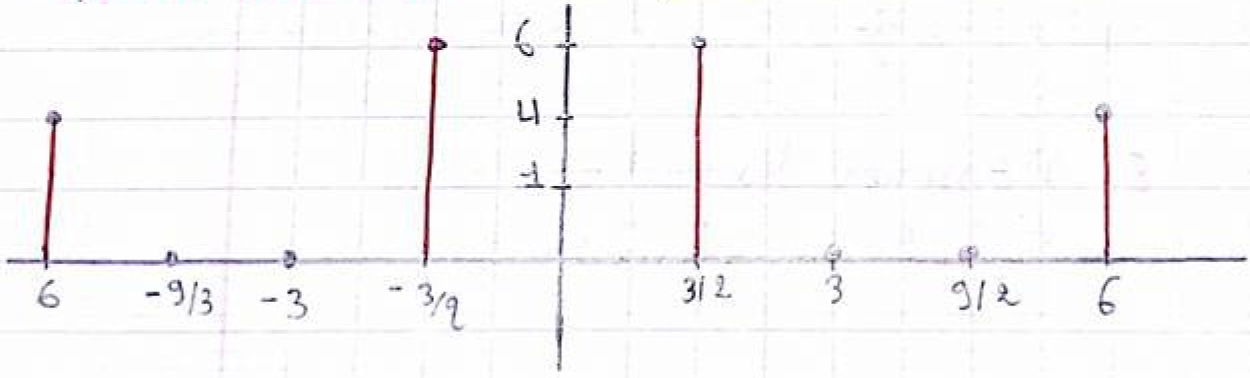
$$A_K = 2|X(K)|$$

Specter de phase:-

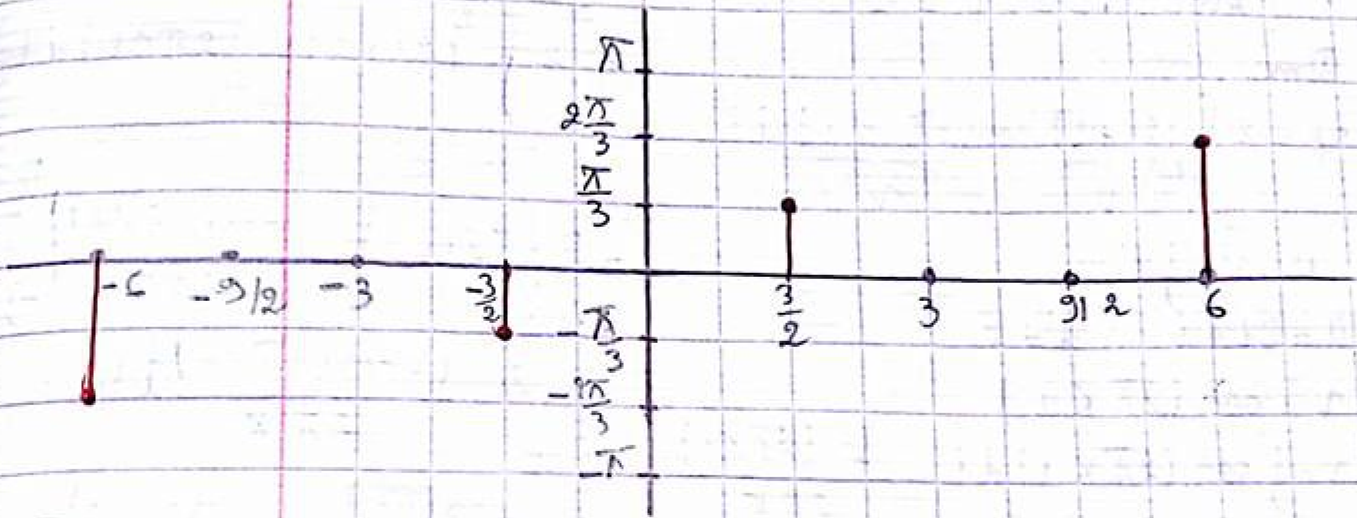
$$\varphi_K = \text{arctg}\,(X(K))$$



Specter bilatéral: d'amplitude



spectre bilatéral : de phase.



Exo 5 :-

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^{\infty} (a_K \cos(2\pi K \cdot f_0 t) + b_K \sin(2\pi K \cdot f_0 \cdot t)$$

$$a_K = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (x(t) \cdot \cos 2\pi \cdot K \cdot f_0 \cdot t) \cdot dt$$

$$b_K = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (x(t) \cdot \sin(2\pi \cdot K \cdot f_0 \cdot t) \cdot dt$$

$$x = at + b$$

$$a = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{2-0}{0{,}5-(-0{,}5)} = \boxed{2}$$

$$2 = 2 \cdot 0{,}5 + b \Rightarrow b = 2 - 1 = \boxed{1}$$

$\Rightarrow x(t) = 2t + 1$

Avec : $T = 1$; $f = 1$

Donc :

$$a_K = 2\int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{(2t+1)}_{u} \cdot \underbrace{\cos(2\pi \cdot K \cdot t)}_{v'}\, dt$$

$u \cdot v - \int u' \cdot v$

$u = 2t+1 \Rightarrow u' = 2$

$v' = \cos(2\pi K t)$

$$v = \int \cos(2\pi \cdot K \cdot t)\, dt = \frac{\sin(2\pi K t)}{2\pi K}$$

$T = 1$, $f = 1$

$$a_K = 2\int_{-1/2}^{1/2} (2t+1)\cos(2\pi K t)\, dt$$

$$a_K = 2\left[(2t+1) \cdot \frac{\sin(2\pi K t)}{2\pi K} \right|_{-1/2}^{1/2} - \int_{-1/2}^{1/2} 2 \cdot \frac{\sin(2\pi K t)}{2\pi K}\, dt$$

$$= 2\frac{\sin(\pi K)}{\pi K} + 4\frac{\cos(2\pi K t)}{(2\pi K)^2} \Big|_{-1/2}^{1/2}$$

$$= 2 \cdot \frac{\sin(\pi K)}{\pi K} + 4\frac{\cos(\pi K)}{(2\pi K)^2} - 4\frac{\cos(-\pi K)}{(2\pi K)^2}$$

$$= 2 \cdot \frac{\sin(\pi K)}{\pi K} = 2\frac{(\sin \pi K)}{\pi K} = 0$$

$$b_K = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi K f t)\, dt$$

$$= 2\int_{-1/2}^{1/2} (2t+1)\sin(2\pi K t)\, dt$$

$$= 2\left[(2t+1) \cdot \frac{-\cos(2\pi K t)}{2\pi K} \right|_{-1/2}^{1/2} - \int_{-1/2}^{1/2} 2 \cdot \frac{(-\cos(2\pi K t))}{2\pi K}\, dt$$

$$-2 \cdot \frac{\cos(\pi K)}{\pi K} + 0 \cdot \frac{\cos(-\pi K)}{\pi K} + 4\frac{\sin(\pi K)}{(2\pi K)^2}$$

$$-4\frac{\sin(-\pi K)}{(2\pi K)^2}$$

$$= 2 \cdot \frac{\cos(\pi K)}{\pi K} = -2\frac{(\cos(\pi))^K}{\pi K}$$

$$= -2\frac{(-1)^K}{\pi K} = 2\frac{(-1)^{K+1}}{\pi K}$$

$$x_m = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt =$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (2t+1)\, dt = (t^2 + t)\Big|_{-1/2}^{1/2}$$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$ $\boxed{a_0 = 2}$

Donc : $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^{+\infty} a_K \cdot \cos(2\pi K f t) + b_K \sin(2\pi K f t)$

$$x(t) = 1 + \sum_{K=1}^{+\infty} 2 \cdot \frac{(-1)^{K+1}}{\pi K} \sin(2\pi K t)$$

La forme cosinus :

$$x(t) = A_0 + \sum_{K=1}^{+\infty} A_K \cos(2\pi K f_0 t + \varphi_x)$$

Avec : $A_0 = \frac{a_0}{2} = 1$

$$A_K = \sqrt{a_K^2 + b_K^2} = \sqrt{\left(2 \cdot \frac{(-1)^{K+1}}{\pi K}\right)^2} = \frac{2}{\pi K}$$

et $tg(\varphi_K) = \frac{-b_K}{a_K} = \frac{-2(-1)^{K+1}}{\pi K \cdot 0} = 2 \cdot \frac{(-1)^K}{0}$

$$\varphi_K \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si K est paire} \rightarrow tg(\varphi_K) = +\infty \\ \frac{\pi}{2} \text{ si K est impaire} \rightarrow tg(\varphi_K) = -\infty \end{cases}$$

$$-2\frac{(-1)^{K+1}}{\pi K \cdot 0} = \frac{-2(-1)}{\pi K \cdot 0} = 2 \cdot \frac{(-1)^K}{0}$$

$$x(t) = 1 + \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi K} \cos\left(2\pi K f t + (-1)^K \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\sin(2\pi K t)}{2\pi K} dt$$

$$\frac{\cos(2\pi K t)}{(2\pi K)(2\pi K)} = \frac{\cos(2\pi K t)}{(2\pi K)^2}$$

$$2 \cdot \frac{(\sin(\pi))^K}{\pi K}$$

$$2 \cdot \frac{\sin(180)^K}{\pi K} = 0$$

$$\left(\sqrt{\frac{2 \cdot (-1)^{K+1}}{\pi K}}\right)^2$$

$$2 \cdot \frac{(-1)^K \cdot (-1)^2}{\pi K}$$

$$\frac{2(1)}{\pi K} = \boxed{\frac{2}{\pi K}}$$

$$\Rightarrow x(t) = 1 + \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi K} \cdot \cos\left(2\pi K \cdot f t + (-1)^K \frac{\pi}{2}\right)$$

la forme complexe :

$$x(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} X(K) \cdot e^{j2\pi K f t}$$ Avec : $T = 1$ et $f = 1$

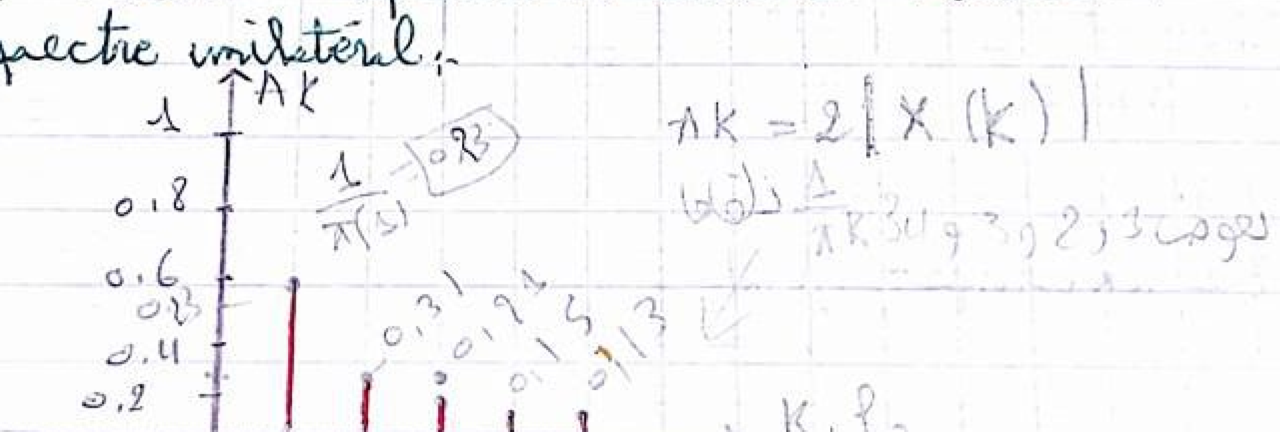
$$x(t) = 1 + \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \frac{\cancel{2}}{\pi K} \cdot \frac{e^{(j2\pi K t + (-1)^K \frac{\pi}{2})} + e^{-j(2\pi K t + (-1)^K \frac{\pi}{2})}}{\cancel{2}}$$

$$= 1 + \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi K} \cdot e^{j2\pi K t} \cdot e^{j(-1)^K \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\pi K} e^{-j2\pi K t} \cdot e^{-j(-1)^K \frac{\pi}{2}}$$

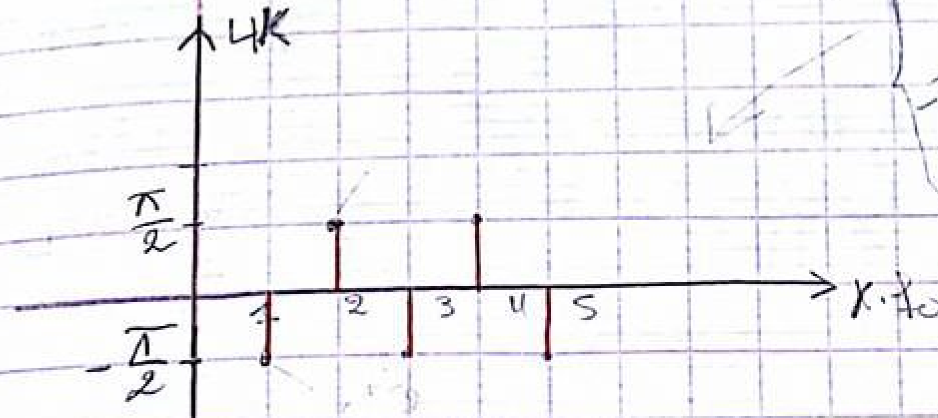
$$X_K = \begin{cases} x(K) = 1 \text{ pour } K = 0 \\ X(K) = \frac{1}{\pi K} \cdot e^{j(-1)^K \frac{\pi}{2}} & \text{si } K \text{ est pair } X(K) = \frac{1}{\pi K} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \\ X(K) = \frac{1}{\pi K} \cdot e^{-j(-1)^K \frac{\pi}{2}} & \text{si } K \text{ est impair } X(K) = \frac{1}{\pi K} e^{-j\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

3) tracer les spectres unilatéral et bilatéral :

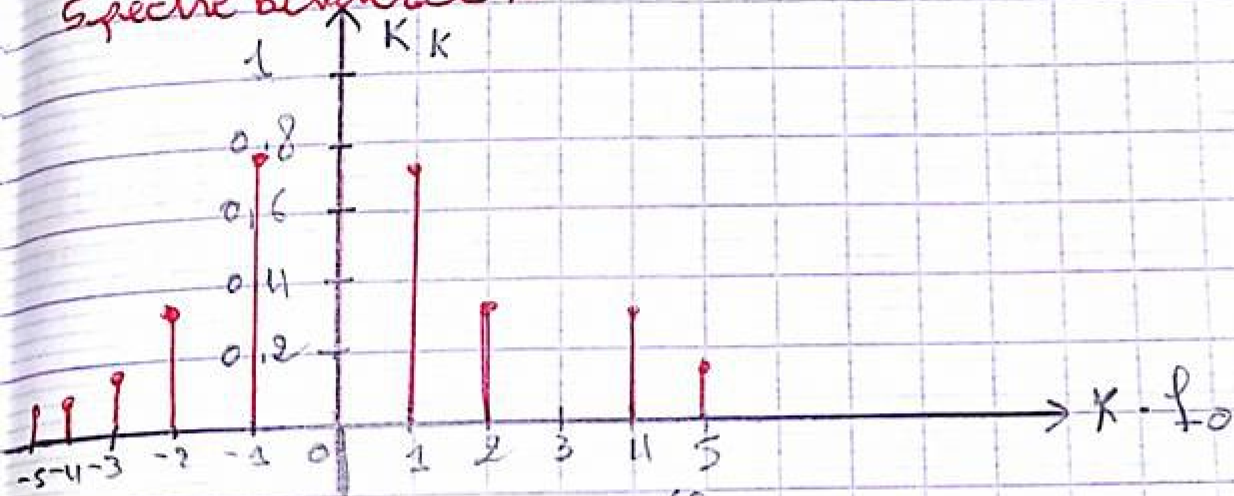
spectre unilatéral :

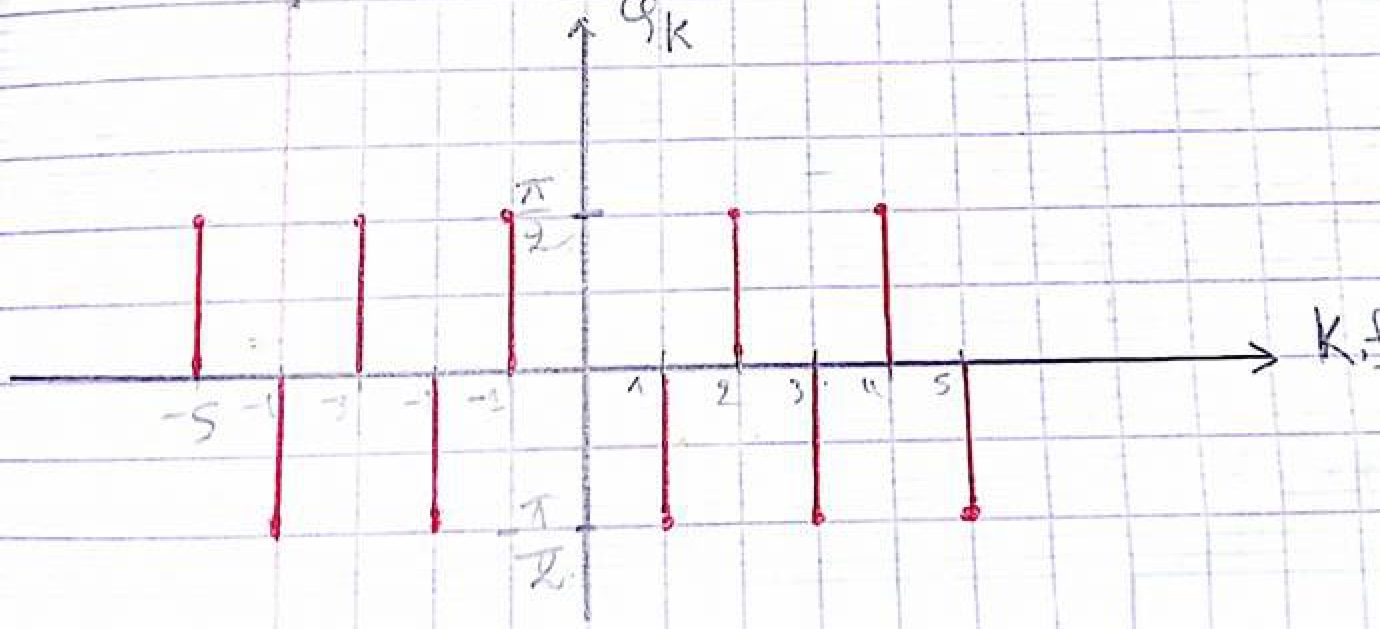


$$\varphi_K = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } K \text{ et paire} & \log(\varphi_K) = +\infty \\ -\frac{\pi}{2} \text{ } K \text{ est impaire} & \log(\varphi_K) = -\infty \end{cases}$$



Spectre bilateral :-





EX : Cour

Exe: Cour:-

$x_1 = 4\cos(2\pi t + \frac{\pi}{3})$

$x_2 = -2\sin(8\pi t + \frac{\pi}{3})$

$x_3 = 2 + 4\cos(2\pi t) - 6\sin(3\pi t)$

	période T	fréquence f	pulsation ω
x_1	1	1	2π
x_2	$\frac{1}{4}$	4	8π
x_3	2	$\frac{1}{2}$	π

$T = 1$, $T = \frac{2}{3}$

نراعي للقاسم المشترك بناتج

$2\pi t$ و $3\pi t$ تضرب 1×3

$= 3$ و $1 = 1\times2$

و منه $\omega = \pi$.

طـ نقطة

$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot \frac{1}{2}$

$= \pi$

$n_1 \cdot T_1 = n_2 T_2 = T$

$n_1 \cdot 1 = n_2 \cdot \frac{2}{3}$

$\frac{n_1}{n_2} = \frac{2}{3}$ $\Rightarrow n_1 = 2 \; ; n_2 = 3$

$2 \cdot 1 = 3 \cdot \frac{2}{3} = T = 2$